

УДК 536.25

**ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОНВЕКЦИИ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ,
ОБУСЛОВЛЕННОЕ СОВМЕСТНЫМ ДЕЙСТВИЕМ РЭЛЕЕВСКОГО
И ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОГО МЕХАНИЗМОВ НЕУСТОЙЧИВОСТИ**

ГИЛЕВ А. Ю., НЕПОМНЯЩИЙ А. А., СИМАНОВСКИЙ И. Б.

Известно, что потеря устойчивости равновесия в двухслойной системе может иметь монотонный или колебательный характер. Нарастающие колебательные возмущения обнаружены в случае как рэлеевского [1, 2], так и термокапиллярной конвекции [3–5]; при этом, однако, для многих систем минимуму нейтральной кривой соответствуют монотонные возмущения. В [5] приведен пример системы, для которой колебательная неустойчивость становится наиболее опасной при одновременном действии термогравитационного и термокапиллярного механизмов неустойчивости.

В настоящей работе проводится систематическое исследование возникновения конвекции в двухслойной системе, обусловленного совместным действием рэлеевского (объемного) и термокапиллярного (поверхностного) механизмов неустойчивости. Показано, что в том случае, когда рэлеевский механизм неустойчивости действует преимущественно в верхнем слое жидкости, при наличии термокапиллярного эффекта наиболее опасной может стать колебательная неустойчивость. Если термогравитационная конвекция возбуждается в нижнем слое жидкости, то неустойчивость равновесия имеет монотонный характер.

1. Рассматривается система двух вязких несмешивающихся жидкостей, заполняющих пространство между твердыми горизонтальными пластинами $y=a_1$ и $y=-a_2$ (ось x направлена горизонтально, ось y — вертикально). Температура пластин поддерживается постоянной и различной; подогрев осуществляется снизу, разность температур равна θ . Коэффициенты динамической и кинематической вязкости, теплопроводности, температуропроводности и объемного расширения равны соответственно $\eta_m, \nu_m, \kappa_m, \chi_m, \beta_m$ ($m=1$ для верхней жидкости, $m=2$ для нижней). Принята линейная зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры: $\sigma=\sigma_0-\alpha T$. Граница раздела предполагается плоской ($y=0$).

Введем обозначения: $\eta=\eta_1/\eta_2$, $\nu=\nu_1/\nu_2$, $\kappa=\kappa_1/\kappa_2$, $\chi=\chi_1/\chi_2$, $a=a_2/a_1$. В качестве единиц длины, времени, функции тока и температуры выберем соответственно a_1 , a_1^2/ν_1 , ν_1 , θ . Безразмерный градиент температуры dT_0/dy в равновесии равен $A_1=-1/(1+\kappa a)$ в верхней жидкости и $A_2=-\kappa(1+\kappa a)$ в нижней. Для нормальных возмущений функции тока ψ_m и температуры T_m ($m=1, 2$) с волновым числом k и комплексным декрементом $\lambda+i\omega$ линеаризованные уравнения конвекции имеют вид

$$\begin{aligned} (\lambda+i\omega)D\psi_m &= -d_m D^2 \psi_m + ik G b_m T_m \\ -(\lambda+i\omega)T_m - ik \psi_m A_m &= \frac{c_m}{P} D T_m \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$D = \frac{d^2}{dy^2} - k^2, \quad d_1 = b_1 = c_1 = 1, \quad d_2 = \frac{1}{\nu}, \quad b_2 = \frac{1}{\beta}, \quad c_2 = \frac{1}{\chi},$$

$$P = \frac{\nu_1}{\chi_1}, \quad G = \frac{g \beta_1 \theta a_1^3}{\nu_1^2}$$

Здесь P и G — числа Прандтля и Грасгофа.

Условия на твердых границах и на границе раздела

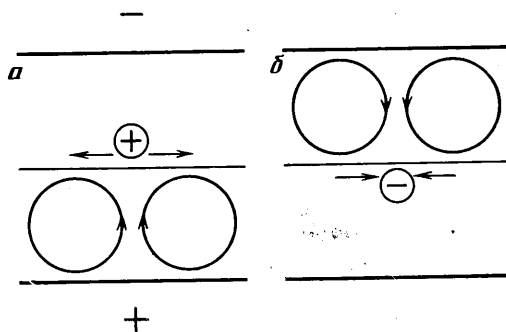
$$y=1: \psi_1=\psi_1'=T_1=0, \quad y=-a: \psi_2=\psi_2'=T_2=0$$

$$y=0: \psi_1=\psi_2=0, \quad \psi_1'=\psi_2', \quad T_1=T_2, \quad \kappa T_1'=T_2', \quad \eta\psi_1''-ikMgT_1=\psi_2'' \quad (1.2)$$

$Mg=\eta M/P$, $M=\alpha\theta a_1/\eta_1\chi_1$ — число Марангони.

Условие $\lambda=0$ определяет нейтральную кривую $G=G(k; Mg)$. При заданном Mg равновесие теряет устойчивость, когда число Грасгофа принимает значение $G_* = \min G(k; Mg)$. Краевая задача (1.1) — (1.2) решалась

методом Рунге — Кутты.



Фиг. 1

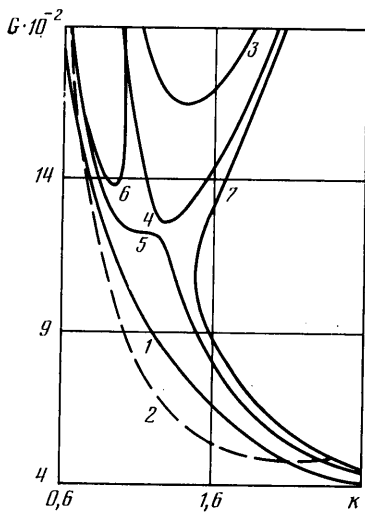
2. Для многих систем «локальные» числа Рэлея $R_m = g\beta_m |A_m| a_m^4 / \nu_m \chi_m$ ($m=1, 2$), характеризующие возникновение конвекции в каждой из жидкостей в отдельности, сильно различаются. По этой причине вблизи порога потери устойчивости равновесия термогравитационная конвекция возникает преимущественно в одной жидкости; в другой жидкости при этом существует слабое индуцированное течение [6].

Термокапиллярный эффект по-разному действует на конвекцию в верхней и нижней жидкости. Действительно, пусть конвекция реализуется главным образом в нижней жидкости (фиг. 1, а). Над восходящим потоком жидкости температура границы раздела повышается, что приводит к понижению коэффициента поверхностного натяжения. Возникающие в результате этого тангенциальные напряжения увеличивают интенсивность движения. В этом случае при наличии термокапиллярного эффекта можно ожидать понижения критического числа Грасгофа. Напротив, если конвекция осуществляется преимущественно в верхней жидкости (фиг. 1, б), термокапиллярные силы препятствуют движению жидкости. При этом порог монотонной неустойчивости должен повышаться.

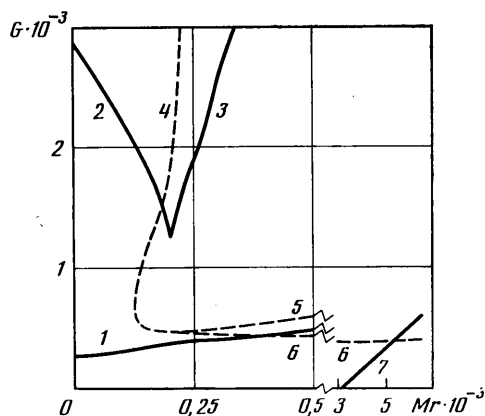
Встречаются системы, для которых при одних значениях волнового числа конвекция начинается в верхней жидкости, а при других — в нижней [1, 2]. Для таких систем при $Mg \neq 0$ естественно ожидать стабилизацию возмущений, соответствующих конвекции в верхней жидкости, а понижение порога возбуждения конвекции — в нижней жидкости.

Результаты численных расчетов подтверждают приведенные выше соображения. Рассмотрим сначала систему воздух — вода ($P=0,758$; $\eta=0,0182$; $\nu=15,1$; $\kappa=0,0396$; $\chi=138$; $\beta=17,7$; $a=1$), для которой при $Mg=0$ конвекция возбуждается преимущественно в нижней жидкости. Неустойчивость имеет монотонный характер, $G_* \approx 200$. С увеличением Mg порог возбуждения конвекции понижается практически по линейному закону, обращаясь в нуль при $Mg=21$.

Более сложная ситуация реализуется для системы вода — силиконовое масло № 200 ($P=6,28$; $\eta=0,915$; $\nu=1,116$; $\kappa=0,169$; $\chi=0,472$; $\beta=7,16$;



Фиг. 2



Фиг. 3

$a=1,6$). При $Mg=0$ пороговое число Грасгофа для возбуждения конвекции в верхней жидкости $G_1=270$, а в нижней $G_2=2860$; обе моды неустойчивости монотонные. С ростом Mg нейтральная кривая для возмущений в первой жидкости медленно поднимается вверх, а для возмущений во второй жидкости — быстро снижается. Линии 1, 3 фиг. 2 соответствуют монотонным нейтральным кривым для значения $Mg=175$. При увеличении Mg нейтральные кривые сближаются (линии 4, 5; $Mg=201$). В дальнейшем происходит их перецепление и разделение на не связанные между собой участки, лежащие в длинно- и коротковолновой областях (соответственно линии 6, 7; $Mg=210$). На фиг. 3 показана зависимость от числа Mg минимизированного по k числа Грасгофа для нижней (линия 1) и верхней нейтральных кривых до и после перецепления (соответственно линии 2 и 3).

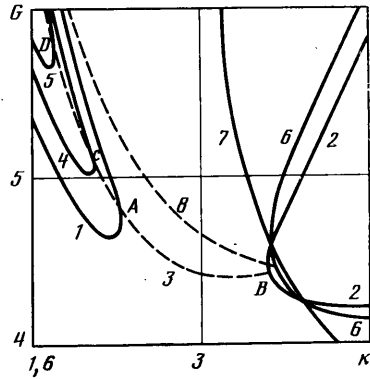
Перейдем теперь к обсуждению колебательной неустойчивости в рассматриваемой системе. При $Mg > 125$ на нейтральной кривой для возмущений в верхней жидкости появляется колебательный участок. Он сохраняется после перецепления монотонных нейтральных кривых, связывая длинно- и коротковолновые фрагменты монотонной нейтральной кривой. Для $Mg=210$ колебательная нейтральная кривая показана на фиг. 2 пунктирной линией 2; для других значений Mg колебательные нейтральные кривые не изображены, так как совпадают с приведенной кривой в масштабе графика.

На фиг. 3 показаны зависимости от Mg значений числа Грасгофа, соответствующих левой и правой точкам окончания колебательной нейтральной кривой (линии 4, 5), и значения минимального числа Грасгофа для колебательной неустойчивости (линия 6). При $Mg > 400$ колебательная неустойчивость становится наиболее опасной. При $Mg > 3200$, $G=0$ в системе имеет место монотонная термокапиллярная неустойчивость равновесия. Поскольку для рассматриваемой системы термокапиллярный и рэлеевский механизмы неустойчивости действуют противоположно друг другу (фиг. 1, б), с увеличением G термокапиллярная неустойчивость стабилизируется. Равновесие оказывается устойчивым в конечном интервале значений G , соответствующем области между линиями 7 и 6 на фиг. 3. При $Mg > 5300$ равновесие оказывается неустойчивым при любых значениях G .

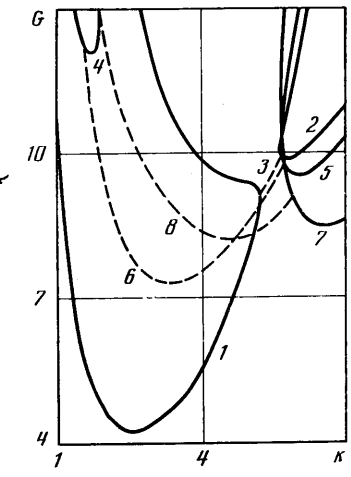
3. Рассмотрим теперь возбуждение конвекции в системе трансформаторное масло — муравьиная кислота ($P=306$; $\eta=11,1$, $\nu=15,4$; $\kappa=0,41$;

$\chi=0,714$; $\beta=0,672$). Согласно расчетам [1, 2], выполненным для этой системы при $Mg=0$, в некотором интервале значений a монотонно нарастающие возмущения с малыми волновыми числами локализованы преимущественно в верхней жидкости, а коротковолновые возмущения — в нижней. В зависимости от отношения толщин слоев минимум нейтральной кривой может реализоваться как на коротковолновых ($a=0,667$), так и на длинноволновых ($a=0,54$) возмущениях. В промежуточной области волновых чисел имеет место колебательная неустойчивость, которая, однако, не является наиболее опасной.

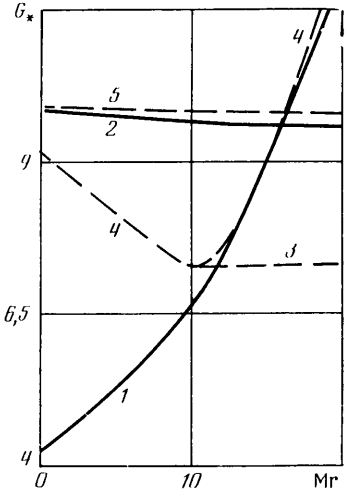
Остановимся сначала на случае $a=0,667$, для которого при $Mg=0$ конвекция возбуждается раньше в нижней жидкости. Соответствующие нейтральные кривые изображены на фиг. 4; сплошными линиями показаны монотонные, а пунктирными — колебательные ветви нейтральной



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

кривой. Линии 1, 2 и участок линии 3 между точками A и B относятся к значению $Mg=0$. Уже при небольших значениях Mg левый фрагмент монотонной нейтральной кривой и левая точка окончания колебательной ветви 3 быстро смещаются в длинноволновую область. Линии 4, 5 изображают участки монотонных нейтральных кривых при $Mg=0,5$; 1; точки C и D — точки окончания колебательной ветви 3 при тех же значениях Mg . Смещение колебательной ветви в сравнении со случаем $Mg=0$ в масштабе графика незаметно. Правый фрагмент нейтральной кривой с ростом Mg смещается значительно медленнее; линия 6 отвечает $Mg=5$, линии 7, 8 — $Mg=100$. Пороговое число Грасгофа G_* , отвечающее возмущениям в нижней жидкости, с ростом Mg монотонно понижается.

Опишем теперь случай $a=0,54$, для которого при $Mg=0$ более опасными являются длинноволновые возмущения в верхней жидкости (см. фиг. 5, линии 1—3). Как и в предыдущем случае, левый участок монотонной нейтральной кривой с ростом Mg сильно стабилизируется, что приводит к расширению области существования колебаний. При $Mg=10$ на колебательной ветви нейтральной кривой появляется минимум, а при $Mg>11,5$ колебательные возмущения становятся наиболее опасными. Картина нейт-

ральных кривых при $Mg=20$ показана на фиг. 5 (линии 4–6). С ростом Mg порог возбуждения колебательной конвекции повышается, а порог монотонной неустойчивости, соответствующей развитию конвекции в нижней жидкости, понижается (см. линии 7, 8 фиг. 5; $Mg=200$). При дальнейшем увеличении Mg монотонные возмущения снова становятся наиболее опасными.

На фиг. 6 показаны зависимости от числа Mg для минимизированных по k значений числа Грасгофа, отвечающих монотонно нарастающим длинноволновым (линия 1), коротковолновым (линия 2) и колебательным (линия 3) возмущениям. Линии 4 и 5 соответствуют левой и правой точкам окончания колебательной ветви.

Таким образом, влияние термокапиллярного эффекта на возникновение конвекции в двухслойной системе существенно зависит от вида возмущений, приводящих к неустойчивости равновесия. Если критические возмущения локализованы в нижней жидкости, то указанное влияние сводится лишь к понижению порога монотонной неустойчивости. Если же возмущения локализованы в верхней жидкости, включение термокапиллярного эффекта приводит к тому, что монотонная неустойчивость стабилизируется, а наиболее опасной становится колебательная мода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О монотонной и колебательной неустойчивости двухслойной системы несмешивающихся жидкостей, подогреваемой снизу.— Докл. АН СССР, 1982, т. 265, с. 302–305.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Першина Е. А. О возникновении конвекции в некоторых двухслойных системах.— В кн.: Конвективные течения. Пермь: Перм. пед. ин-т, 1983, с. 3–24.
3. Sternling C. V., Scriven L. E. Interfacial turbulence: hydrodynamic instability and the Marangoni effect.— *AIChE Journal*, 1959, v. 5, № 4, p. 514–523.
4. Непомнящий А. А., Симаковский И. Б. Термокапиллярная конвекция в двухслойной системе.— Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 4, с. 825–827.
5. Непомнящий А. А., Симаковский И. Б. О колебательной конвективной неустойчивости равновесия двухслойных систем при наличии термокапиллярного эффекта.— *ПМТФ*, 1985, № 1, с. 62–65.
6. Симаковский И. Б. Конечно-амплитудная конвекция в двухслойной системе.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1979, № 5, с. 3–9.

Пермь

Поступила в редакцию
7.IV.1986