

УДК 532.516:536.25

КОНЕЧНО-АМПЛИТУДНЫЕ РЕЖИМЫ СМЕШАННОЙ КОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ С ВОЛНИСТЫМИ ГРАНИЦАМИ

ВОЗОВОЙ Л. П.

Методом конечных разностей строятся конвективные движения в вертикальном слое с синусоидально искривленными границами при наличии продольного прокачивания жидкости. Помимо стационарных и колебательных режимов, найденных ранее аналитически для малых амплитуд волнистости и медленной прокачки [1, 2], обнаружены новые существенно нелинейные типы движений в виде двухтактных циклов, а также сложных многооборотных циклов, представляющих собой резонансные двумерные торы. Определены области существования режимов разного типа.

1. Рассмотрим бесконечный вертикальный слой, заполненный жидкостью, с искривленными в противофазе твердыми изотермическими границами $x = \pm d(1 - \eta \cos ky/d)$, нагретыми до разных температур $\pm \Theta$. Вдоль слоя задан постоянный объемный расход Q .

Запишем в безразмерной форме систему уравнений двумерной конвекции в приближении Буссинеска

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \varphi + \frac{\partial (\psi, \varphi)}{\partial (x, y)} + G \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Pr} \Delta T + \frac{\partial (\psi, T)}{\partial (x, y)} \quad (1.3)$$

$$G = \frac{g\beta\Theta d^3}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}$$

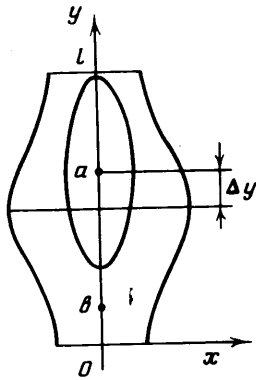
Здесь ψ — функция тока, T — температура, ν — кинематическая вязкость жидкости, G — число Грасгофа, Pr — число Прандтля. Единицами измерения длины, времени, температуры и функции тока служат соответственно d , d^2/ν , Θ , ν .

Граничные условия имеют вид

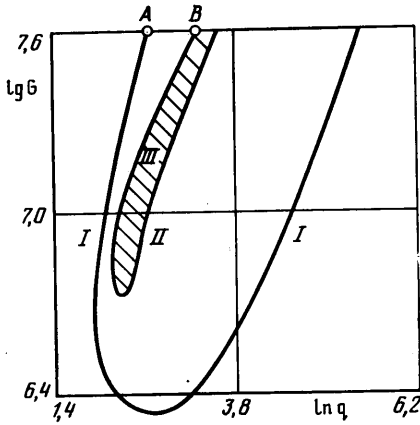
$$\begin{aligned} \psi = q, \quad \partial \psi / \partial x = 0, \quad T = 1, \quad x = 1 - \eta \cos ky \\ \psi = q\psi / \partial x = 0, \quad T = -1, \quad x = -(1 - \eta \cos ky) \\ u(x, y + 2\pi/k) = u(x, y), \quad u = (\psi, \varphi, T) \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $q = Q/\nu$ — безразмерный поток жидкости.

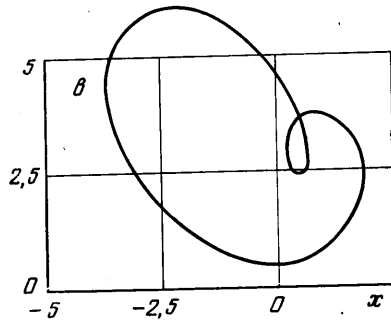
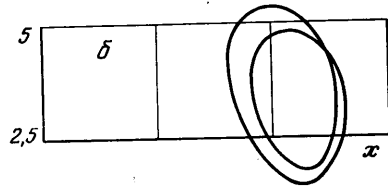
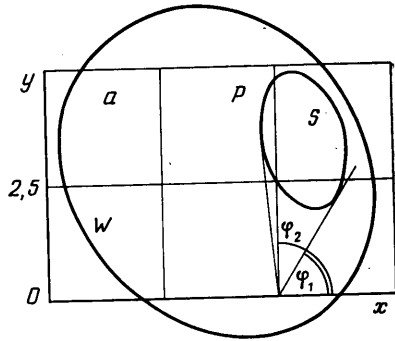
2. Будем решать систему (1.1)–(1.4) численно методом сеток. Удобно перейти к новым координатам $x' = x(1 - \eta \cos ky)^{-1}$, $y' = y$, в которых границы слоя становятся плоскими, а неоднородность переносится в уравнения. Для записи уравнений (1.1), (1.3) в конечно-разностном виде применялась неявная схема «стабилизирующей поправки» метода дробных шагов [3]. Уравнение Пуассона (1.2) решалось итерационным методом Либмана. Выход на стационарный или колебательный предельный режим осуществлялся методом установления. При получении нестационарного решения шаг по времени выбирался равным $\tau = h^2/8$, где h — шаг пространственной сетки. Основные расчеты выполнены на сетке 17×35 , проверочные — на сетке 33×69 . Более подробно метод решения описан в [4], где численно исследовались движения



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

в вертикальном слое с волнистыми границами в случае свободной конвекции при условии замкнутости потока.

3. Приведем вначале некоторые результаты решения данной задачи для ряда предельных случаев.

1. $\eta = q = 0$ (плоский слой, нулевой расход). При любых числах G и Pr существует основное плоскопараллельное течение с кубическим профилем скорости (вблизи горячей стенки жидкость движется вверх, вдоль холодной — опускается) и линейным (теплопроводным) распределением температуры. При $G > G_c \approx 500$ это течение теряет устойчивость. Для чисел $Pr < 12$ наиболее опасно монотонно нарастающее возмущение с длиной волны $\lambda_c \approx 4,55$ [5].

Нелинейное развитие возмущений в надкритической области $G > G_c$ приводит к образованию системы вихрей, периодически повторяющихся вдоль слоя; в силу трансляционной симметрии задачи их положение относительно границ нейтрально.

2. $\eta = 0, q \neq 0$ (плоский слой, ненулевой расход). Прокачивание жидкости приводит к тому, что существующие в надкритической области вихри распространяются вдоль слоя с постоянной фазовой скоростью, пропорциональной q [6].

3. $\eta \neq 0, q = 0$ (волнистые границы, нулевой расход). Плоскопараллельный характер движения нарушается уже при сколько угодно малых числах Грасгофа. Устойчивым решениям отвечает локализация вихрей в широких областях слоя — появление волнистости нарушает трансляционную симметрию по y . Если период волнистости стенок $2l/k$ близок к длине волны критического возмущения λ_c , то при переходе через точку $G = G_c$ движение не испытывает кризиса симметрии и его амплитуда плавно меняется в окрестности точки G_c [4].

4. Перейдем теперь к изложению результатов численного расчета в общем случае $\eta \neq 0, q \neq 0$. Согласно п. 4, прокачка смещает вихри вдоль слоя, а волнистость стремится локализовать их в широких местах, играя роль возвращающей силы. В результате конкуренции этих факторов может возникнуть один из следующих предельных режимов: стационарное

расположение вихрей относительно границ слоя S , периодические колебания вихрей около некоторых средних положений P , распространение вихрей по слою с периодически модулированной фазовой скоростью — бегущая волна W . Подчеркнем, что различие между указанными режимами связано с их поведением во времени, а не с пространственной структурой.

Наглядное представление об эволюции установившихся режимов при изменении параметров задачи можно получить, строя фазовые траектории на плоскости (X, Y) , $X = -r \cos \varphi$, $Y = r \sin \varphi$ (фиг. 1). Здесь $r = (\psi_a - \psi_b)/2$ — амплитуда вихрей, которая определяется как полуразность между максимальным и минимальным значениями функции тока в сечении $x=0$, $\varphi = 2\pi \Delta y/l$ — фаза, задающая положение центров вихрей относительно границ, $l = 2\pi/k$ — период волнистости. Локализации вихрей в широких областях слоя отвечает фаза $\varphi=0$, в узких — $\varphi = \pm l$. Плоскость (X, Y) можно рассматривать как некоторое подпространство в реальном многомерном фазовом пространстве системы.

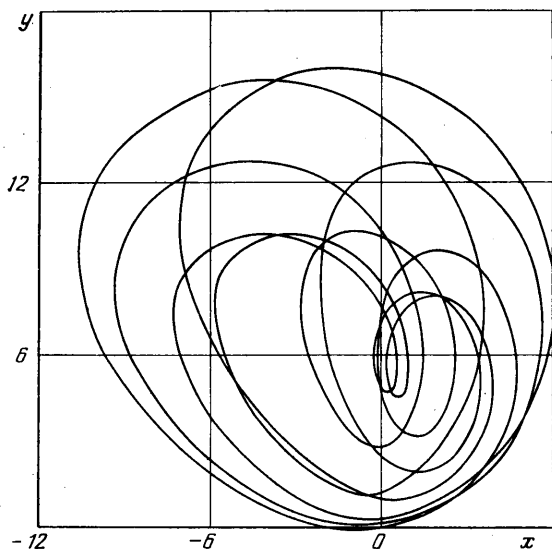
Стационарному режиму на плоскости (X, Y) отвечает неподвижная точка S (фиг. 2, а; $G=1000$, $q=7,6$); в отсутствие продува она имела бы координаты $X=-r$, $Y=0$. Периодический во времени колебательный режим изображается в виде цикла. При движении по кривой P фаза меняется в ограниченных пределах $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, т. е. каждый вихрь колеблется внутри своей конвективной ячейки ($G=1000$, $q=8,7$). Движению по кривой W , охватывающей начало координат, соответствует бегущая волна; при этом фаза φ пробегает весь интервал $0 \leq \varphi < 2\pi$ ($G=1000$, $q=15$). Представленные на фиг. 2, а режимы рассчитаны при параметрах $\eta=0,02$, $P=1$, $l=4$, которые всюду далее сохраняются постоянными.

Вывод о существовании трех описанных типов движений был сделан ранее в [1, 2] методами теории возмущений. При численном исследовании обнаружен также ряд новых существенно нелинейных режимов, которые не могли быть получены на основе асимптотических методов, — двухтактные циклы и сложные многооборотные циклы, описанные в п. 5.

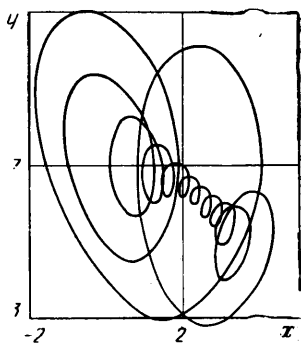
При числах $G > 560$ с ростом параметра прокачки q происходит бифуркация удвоения периода и возникают двухтактные циклы (фиг. 2, б; $G=1000$, $q=9$). В окрестности точки перехода витки расположены близко друг к другу; при увеличении q они деформируются и приобретают вид, показанный на фиг. 2, в ($q=15$).

На фиг. 3 в двойном логарифмическом масштабе изображена сводная диаграмма режимов на плоскости параметров G , q . В области I устойчивы стационарные решения, в области II реализуются простые циклы, а в области III — двухтактные. Обратим внимание на двоякую роль параметра q . При фиксированном G (горизонтальное сечение на диаграмме) увеличение расхода прокачиваемой жидкости сначала развязывает колебания (переход из области I в область II), затем форма колебаний усложняется (область III). Однако по мере дальнейшего роста q происходит обратное развитие картины течения: от двухтактного цикла через простой одноктактный цикл к стационарному режиму. Таким образом, очень сильная прокачка подавляет колебания, меняя средний профиль течения в сторону повышения его устойчивости. Вывод о стабилизирующем влиянии продольного прокачивания на вихревое конвективное движение в плоском вертикальном слое был сделан ранее в [6].

5. При $G=2000$ были получены сложные нестационарные движения, имеющие форму многотактных циклов. Этот режим существует в узком интервале $14,2 < q < 26,7$ (отрезок AB на фиг. 3). Его левая граница (точка A) совпадает с линией нейтральной устойчивости стационарных режимов, а правая (точка B) — с бифуркационной границей удвоения периода. На фиг. 4 демонстрируется один из таких сложных циклов с числом витков $N=10$ ($q=19$). Количество витков при изменении параметра q ме-



Фиг. 4



Фиг. 5

няется скачкообразно:

q	27	26	25	24	23	22	21	20	19,6	19	18,8	18	17	16
N	2	15	25	43	5	8	3	3	3	10	7	4	43	27

Установлено, что наблюдаемые колебания представляют собой резонансные циклы на двумерном торе. Об этом свидетельствует, во-первых, вид частотных спектров колебаний (спектры строились методом быстрого преобразования Фурье), которые практически содержат только линии двух частот ω_1 , ω_2 и их комбинации $\omega_1 \pm \omega_2$. Ниже приведены числа вращения $\rho = \omega_1 / \omega_2$ для некоторых значений q :

q	23	22	21	19	18,8	18
ρ	$2/5$	$3/8$	$1/3$	$3/10$	$2/7$	$1/4$

При изменении q величина ρ меняется монотонно. Из приведенных значений q и N видно, что циклы с числом вращения $\rho = 1/3$ (один из главных резонансов) устойчивы в относительно широком интервале значений q (ступенька синхронизации двухчастотного режима) в соответствии с общей теорией резонансных торов [7]. Во-вторых, при пересечении границы рождения торов со стороны двухтактных циклов можно проследить, как тор «мягко» зарождается путем «разбухания» цикла, начиная примерно с $q = q_B = 26,7$. Отметим, что режим двухчастотных колебаний обнаружен в сложной гидродинамической системе с большим числом степеней свободы (порядка числа узлов расчетной сетки — несколько сотен). Ранее этот режим наблюдался и исследовался в маломодовых динамических системах (см. [8]). В [9] отмечалось появление квазипериодического режима при численном моделировании рэлеевской конвекции на основе галеркинской системы с представительным базисом (порядка нескольких десятков).

Весьма своеобразно выглядит сценарий исчезновения тора на левой границе интервала AB ($q = q_A = 14,2$). Вблизи этой границы резонансный тор приобретает вид, показанный на фиг. 5 ($q = 14,6$). По мере приближения к точке q_A число мелких витков, заключенных между большими (глобальными) участками траектории, быстро нарастает, а их амплитуда стремится к нулю. Имеют место следующие эмпирические закономерности в окрестности $q \gg q_A$: 1) время оборота по каждому из мелких витков почти постоянно и не зависит от их числа ($\omega_2 \approx \text{const}$), 2) при $q \rightarrow q_A$ периоды циклов возрастают по закону $T \sim (q - q_A)^{-1/2}$ ($\omega_1 \rightarrow 0$).

Таким образом, увеличение периода происходит вследствие накопления числа мелких витков (все меньшей амплитуды), а не за счет возрастания времени движения по каждому из этих витков.

Автор благодарит Е. М. Жуховицкого за постоянное внимание к работе, а также В. С. Анищенко и А. А. Непомнящего за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Возовой Л. П., Непомнящий А. А.* Устойчивость пространственно-периодических конвективных движений в вертикальном слое с волнистыми границами при наличии прокачивания жидкости.— В кн.: Конвективные течения. Пермь: Изд. Пермск. пед. ин-та, 1983, с. 86–96.
2. *Возовой Л. П., Непомнящий А. А.* Об устойчивости смешанно-конвективных движений в вертикальном слое с волнистыми границами.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 6, с. 935–941.
3. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1977. 195 с.
4. *Возовой Л. П.* Конвекция в вертикальном слое с волнистыми границами.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 2, с. 31–35.
5. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
6. *Лобов Н. И.* Об устойчивости смешанного конвективного течения в плоском вертикальном слое.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 6, с. 130–132.
7. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
8. *Анищенко В. С.* Стохастические колебания в радиофизических системах. Ч. 1. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985. 179 с.
9. *Петровская Н. В.* О применении метода Галеркина к исследованию переходов в задаче рэлеевской конвекции.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 2, с. 22–27.

Пермь

Поступила в редакцию
24.I.1986