

УДК 533.6.011.5:536.244

К ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЯ ОБГАРА ТЕЛ В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОМ ПОТОКЕ ГАЗА

ЛУНЕВ В. В.

Изменение формы тел, или распространение фронта их обгара, под воздействием аэродинамического нагрева в высокотемпературном потоке газа для локальных законов теплообмена или, точнее, скоростей уноса материала описывается существенно нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка (подобно распространению звуковых, световых волн и т. д.). Несмотря на сложность таких уравнений, фундамент их теории (в частности, теория характеристик) заложен в классической литературе [1, 2], а специфические вопросы теории применительно к гиперзвуковым условиям обтекания, наиболее типичные задачи, численные методы рассмотрены в целом ряде работ [3-9 и др.].

Для двумерных задач учет влияния предьстории пограничного слоя на конвективный теплообмен каким-либо простейшим интегральным методом (интегролокальный закон теплообмена) придает уравнению обгара интегродифференциальный характер, что внешне не меняет его характеристических свойств, но отражается на характере развития возмущений [5, 10]. Дополнительное же усложнение законов теплообмена может вообще изменить вид уравнения обгара. Так, определение давления по гиперзвуковой формуле Буземана [11] повышает порядок этого уравнения по пространственной переменной до второго [5] (с «отрицательной вязкостью» в сверхзвуковой области течения газа около тела), а учет течения пленки расплава материала — до третьего [12].

Ниже, в рамках локально-интегральной модели (конкретизированной ниже) получено интегродифференциальное уравнение обгара с учетом трехмерных эффектов в законе конвективного теплообмена. За счет зависимости последнего от азимутальных производных от формы поверхности тела, обусловленных расходом невязких линий тока на ней, это уравнение имеет третий порядок по пространственным переменным, а в случае малой асимметрии задачи приобретает черты волнового уравнения.

В работе сделана попытка классификации подобных уравнений, в частности исследованы их характеристические свойства, области влияния, зависимости решений и т. д. Эти результаты могут быть полезными как в дальнейших аналитических исследованиях, так и при разработке численных методов решения подобных задач.

1. Пусть в декартовой системе координат (x', y', z') , жестко связанной с телом, форма его задана уравнением $\Psi(x', y', z', t) = 0$ с нормалью $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$. Дифференцируя его по времени вдоль траектории произвольной точки $x'(t), y'(t), z'(t)$, получим, что проекция D ее скорости на нормаль \mathbf{n} равна

$$D = n_x \frac{dx'}{dt} + n_y \frac{dy'}{dt} + n_z \frac{dz'}{dt} = - \frac{\Psi_t}{\Delta} \quad (1.1)$$

$$\Delta^2 = \Psi_{x'}^2 + \Psi_{y'}^2 + \Psi_{z'}^2, \quad n_x \Delta = \Psi_{x'}, \dots$$

Это уравнение описывает распространение любого фронта возмущений, в том числе, при надлежащем выборе нормальной скорости D , и распространение фронта обгара. Из-за особенностей функции D , связанной с началом пограничного слоя, в подвижной точке торможения (вершине тупого тела с координатами $x' = x_0(t), y' = y_0(t), z' = z_0(t)$) удобней использовать подвижную цилиндрическую систему координат (x, r, φ) с началом в вершине тела, с осью x , направленной вдоль вектора скорости \mathbf{V} набегающего потока. Тогда после обычных преобразований координат в

уравнении (1.1) придем к следующему уравнению обгара для формы поверхности тела:

$$x_i = \frac{D}{n_x} - v = \Phi, \quad n_x = \left(1 + x_r^2 + \frac{1}{r^2} x_\varphi^2 \right)^{-1/2} \quad (1.2)$$

$$v = v(x, r, \cos \varphi, \sin \varphi, x_r, x_\varphi, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$$

Здесь $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — углы (например, тангажа и раскания) задающие ориентацию системы (x, r, φ) в пространстве, переносная скорость v является многочленом от выписанных аргументов, каждый из которых содержится в первой степени.

Имея в виду в основном гиперзвуковые режимы обтекания обгараемых тел, примем локальный закон распределения давления [11] $p = p(n_x)$. Тогда, предположив, что процесс обгара всегда затупляет тело в окрестности его вершины (например, [8]), определим положение начала координат условиями ортогональности вектора V к поверхности тела

$$x_r = x_\varphi = 0, \quad n_x = 1, \quad r = 0 \quad (1.3)$$

Форма тела в окрестности вершины будет представима разложением

$$x = a(t)r^2 + b(t)r^2 \cos[\varphi - \varphi_0(t)] + O(r^3) \quad (1.4)$$

Условия (1.3) должны сохраняться во времени, т. е. при $r=0$ должно быть $x_i = x_{ir} = x_{i\varphi} = 0$, что и определит скорости дрейфа вершины $\dot{x}_0(t)$, $\dot{y}_0(t)$, $\dot{z}_0(t)$. Эти условия можно конкретизировать, полагая $r \rightarrow 0$ в уравнении (1.2) и производных от него. Однако конкретный вид их, как и функции v , в дальнейшем не понадобится и здесь не выписан.

Скорость уноса D зависит как от вида внешнего теплового потока q , так и от реакции материала на тепловые и силовые нагрузки. Ниже примем локальную модель уноса

$$D = \frac{q - q_r(T_w)}{\rho_M H_{ef}}, \quad H_{ef}, T_w = f(p, q, V, r, \varphi, \dots) \quad (1.5)$$

Здесь ρ_M — плотность материала, H_{ef} — его эффективная энтальпия, $q_r(T_w)$ — излучаемое тепло, T_w — температура поверхности. Величины H_{ef} , T_w определяются совокупностью соответствующих законов или экспериментально и обычно представляются в виде простых аппроксимационных зависимостей [13] (для модельных задач часто полагают $H_{ef} = \text{const}$). Такой подход оправдан для чисто сублимируемых материалов, но с некоторым приближением применим и для плавящихся. Строго говоря, для последних зависимость растекания пленки расплава от градиента давления повышает порядок уравнения обгара до третьего [12], но эти эффекты учитывать не будем, ограничившись приближением (1.5).

Внешний конвективный приток тепла определим по пространственной аналогии метода эффективной длины [14]

$$q = AK_1 p U = \frac{h^{n/(1-n)}}{\xi^n}, \quad \xi = \int_0^l p U h^{2n/(1-n)} dl \quad (1.6)$$

Здесь $U(p)$ — скорость газа на внешней границе пограничного слоя, $A(t)$ — размерная функция условий обтекания, характера теплообмена и размеров тела, h — эффективный радиус тела. Введенный здесь корректирующий множитель K_1 определим позже. Для ламинарного теплообмена, всегда присутствующего в окрестности начала координат, $n=1/2$, для турбулентного $n=1/5$. В области смешанного теплообмена (с задаваемыми границами) полагают $D = \Gamma D_{\text{turb}} + (1-\Gamma) D_{\text{lam}}$ с изменением $\Gamma(l) = 0-1$.

Интеграл ξ должен вычисляться вдоль невязких линий тока l , однако здесь примем более простое правило местных меридиональных сечений

[15], вдоль которых и будем вычислять ξ . В этом приближении эффективный радиус тела h подчиняется уравнению ($\rho(p)$ — плотность газа)

$$r^2 U \frac{\partial h}{\partial l} \frac{1}{r} = -\frac{h}{r} I, \quad \frac{\partial l}{\partial r} = \frac{1}{n_x^*} = (1+x_r^2)^{1/2} \quad (1.7)$$

$$I = \int_0^l \left[\frac{1}{\rho U} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial l} (U x_r n_r^*) \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} \right] dl$$

На решении (1.4) локальный закон давления дает при малых r асимптотику

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho B r^2 (1+\gamma), \quad U = r B^{1/2} (1+\gamma)^{1/2}$$

$$h = \text{const } r^{1-\chi}, \quad \gamma = \varepsilon \cos 2(\varphi - \varphi_0) \quad (1.8)$$

$$\chi = \frac{\gamma}{(1+\gamma)}, \quad q = q_0 K_1 K_2$$

$$K_2 = \frac{(1+1/2\gamma)^{1/2}}{(1+\gamma)^{1/4}} = 1 + \frac{1}{16} \gamma^2 + \dots \quad B > 0, \quad |\varepsilon| \leq 1$$

Здесь B и ε — функции a и b , q_0 не зависит от φ , а постоянный множитель при h не влияет на величину q . При малой асимметрии задачи $\varepsilon \ll 1$ многозначность q при $r \rightarrow 0$ исчезает [15]. В общем случае, учитывая полумпирический характер зависимости (1.6), подберем корректирующий коэффициент из условия $K_1 K_2 \rightarrow 1$ при $r \rightarrow 0$, обеспечив тем самым однозначность и регулярность функции $q(r, \varphi) \rightarrow q_0$. Заметим, множитель K_2 близок к единице: $K_2 \leq 1,25$ для параболоида в пределах $1/4 < a/b < 4$. Для сильно сплюснутых тел излагаемый метод, вообще говоря непригоден или требует корректив.

Сформулированную модель уноса материала, или обгара, назовем интегро локальной. Для конвективного теплообмена ее в сущности нельзя уже упростить, не пожертвовав эффектами принципиального характера.

С учетом соотношений (1.6) — (1.7) уравнение обгара (1.2) становится интегродифференциальным, с частными производными высших порядков по переменным r и φ под знаком интегралов по r . Чтобы обойти трудности классификации подобных уравнений, в частности исследования их характеристических свойств, заменим это уравнение системой дифференциальных относительно функций x , ξ , h , продифференцировав по r соотношения (1.6) и (1.7):

$$G = x_i - \Phi(t, r, \varphi, x, \xi, h, x_r, x_\varphi) = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{pU}{n_x^*} h^{2n/(1-n)} = Q_1(r, \varphi, h, x_r, x_\varphi) \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{h} r^3 U n_x^* \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h}{r} \right) \right] = -\frac{n_x^3 p'(n_x)}{\rho U n_x^*} \left(x_r \frac{\partial^3 x}{\partial r \partial \varphi^2} + \frac{x_\varphi \partial^3 x}{r^2 \partial \varphi^3} \right) + Q_2 \quad (1.11)$$

Член Q_2 содержит низшие производные от x по r и φ . Дополнительно краевые условия для этих уравнений вытекают из исходных: при $r \rightarrow 0$ следует положить $\xi = 0$ и потребовать ограниченности h , что в соответствии с (1.8) дает $h \rightarrow 0$, так как другое семейство решений сингулярного уравнения (1.11) не ограничено при $r \rightarrow 0$.

2. Для начала рассмотрим случай локальной зависимости $D(n_x, x, r, \varphi)$ (положив, например, ξ и h заданными функциям r, φ). Уравнение (1.9) при этом станет чисто дифференциальным, назовем его опорным.

Для исследования характеристических свойств этого уравнения в со-

ответствии с общей теорией перейдем к новым переменным $(\zeta, \zeta_2, \zeta_3)$, приведя его к виду $G=G^*(x_{\zeta_i}, \dots)=0$. Из него, задав на поверхности $\zeta(t, r, \varphi)=\zeta_0=\text{const}$ начальную функцию $x^{(0)}(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_3)$ (задача Коши), определим выводящую производную $x_{\zeta}^{(0)}(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_3)$ и тем самым локальное решение $x=x^{(0)}+(\zeta-\zeta_0)x_{\zeta}^{(0)}+\dots$ (высшие выводящие производные определяются последовательным дифференцированием по ζ уравнения $G^*=0$ при $\zeta=\zeta_0$).

Такая процедура окажется невозможной при выполнении на ζ_0 условия

$$\frac{\partial G}{\partial x_{\zeta}} = \zeta_{\zeta} + \kappa_1 \zeta_r + \kappa_2 \zeta_{\varphi} = 0 \quad (2.1)$$

$$\kappa_1 = \frac{\partial G}{\partial x_r} : \frac{\partial G}{\partial x_{\zeta}} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_r}$$

$$\kappa_2 = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_{\varphi}}$$

Поверхность $\zeta=\zeta_0$ (или Σ_0) и будет характеристической. Этому уравнению при $\zeta_r \neq 0$, полагая $\zeta=r-r(t, \varphi)$, можно придать и другой вид

$$r_t + \kappa_2 r_{\varphi} = \kappa_1 \quad (2.2)$$

Характеристики уравнения (2.2) будут в свою очередь бихарактеристиками уравнения (1.9), удовлетворяющими уравнениям [1, 2] (из них (2.4) следует из $dG^*/d\eta=0$)

$$\frac{dr}{dt} = \kappa_1; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \kappa_2 \quad (2.3)$$

$$\frac{dx}{dt} = x_t + x_r \frac{dr}{dt} + x_{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \Phi + \kappa_1 x_r + \kappa_2 x_{\varphi} = \kappa_3$$

$$\frac{dx_{\eta}}{dt} = x_{t\eta} + \kappa_1 x_{r\eta} + \kappa_2 x_{\varphi\eta} = \Phi_{\eta} + \Phi_x x_{\eta} \quad (2.4)$$

$$(\eta=t, r, \varphi)$$

Соотношения (2.3)–(2.4) достаточны для построения характеристической интегральной поверхности $\Sigma=\Sigma_0$, проходящей через любую кривую L в пространстве (t, r, φ, x) с заданными на ней производными x_r, x_{φ} .

Функции κ_i зависят от x_r и x_{φ} , поэтому, варьируя их в точке, получим особую интегральную поверхность — характеристический конус (конус Монжа), который является огибающей интегральных поверхностей, проходящих через эту точку.

3. Рассмотрим общую систему (1.9)–(1.11) с целью ее классификации и прежде всего исследуем ее характеристические свойства, от которых в основном и зависят формы областей влияния, зависимости решения, а также необходимый набор начальных и краевых условий.

Для этих целей рассмотрим задачу Коши, что подразумевает в данном случае задание на поверхности $\zeta(t, r, \varphi)=\zeta_0$ функций x, ξ, h и их младших выводящих производных $x_{\zeta}, x_{\zeta\zeta}, h_{\zeta}$. Если при этом определение из данной системы уравнений старших выводящих производных $x_{\zeta\zeta\zeta}, \xi_{\zeta}, h_{\zeta\zeta}$ окажется невозможным, то поверхность ζ_0 (ниже — поверхность Σ) будет, по определению, характеристической.

Уравнение (1.9) содержит производные лишь первого порядка, поэтому для определения из системы (1.9)–(1.11) старших производных продифференцируем (1.9) по r дважды, используя затем (1.10)–(1.11)

$$\Lambda = x_{trr} + \kappa_1 x_{rrr} + \kappa_2 x_{r\varphi\varphi} - \omega_1 x_{r\varphi\varphi} - \omega_2 x_{\varphi\varphi\varphi} = W \quad (3.1)$$

$$\omega_1 = x_r \omega, \quad \omega_2 = \frac{x_\varphi}{r^2} \omega, \quad \omega = \frac{n}{1-n} \frac{D}{n_x} \frac{n_x^3 p'(n_x)}{\rho r^2 n_x^*{}^2 U^2}$$

Здесь Λ — квазилинейный оператор, определяющий характеристические свойства уравнения. Оператор W и коэффициенты κ_i , ω_i содержат производные более низкого порядка. Очевидно, $p' > 0$ и $\omega > 0$, а так как на разумного вида решении $x_r > 0$, то и $\omega_1 > 0$.

Коэффициенты κ_i и ω_i имеют на решении (1.4) следующие асимптотики при $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{c_1(\varphi)}{r}, & \kappa_2 &= \frac{c_2(\varphi)}{r^2}, & \kappa_3 &= c_3 \\ \omega_1 &= \frac{c^{(1)}(\varphi)}{r^3}, & \omega_2 &= \frac{c^{(2)}(\varphi)}{r^4}, & c_1, c^{(1)} &> 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Вводя еще длину $dS = r d\varphi$, убедимся, что вдоль опорных бихарактеристик dr/dx , $dS/dx \sim r^{-1}$ и они при $r \rightarrow 0$ касаются поверхности тела.

Система (3.1), (1.10), (1.11) линейна относительно старших производных и расщепляется по ним. Соответственно разделяются и характеристические поверхности.

Уравнение (3.1) не содержит производную x_{tt} , поэтому начальная поверхность $t = \text{const}$, или Σ_t , является характеристической. Это несколько неожиданно, так как именно к заданию этой поверхности $x = x^{(0)}(r, \varphi)$ и сводится основная в физическом плане начальная задача, и задание ее позволяет определить выводящую производную x_t и, казалось бы, продолжить решение (например, подобно ситуации с уравнением теплопроводности). Тем не менее, характеристичность Σ_t является свойством исходной системы, а не побочным результатом перехода от уравнения (1.9) к (3.1). Связанные с этим вопросы постановочного характера будут рассмотрены в разд. 5.

В общем случае производную x_{ttt} из уравнения (3.1) определить нельзя, если коэффициент при ней обращается в нуль, что и приводит к уравнению для поверхности Σ

$$\zeta_t \zeta_r^2 + \kappa_1 \zeta_r^3 + \kappa_2 \zeta_r^2 \zeta_\varphi - \omega_1 \zeta_r \zeta_\varphi^2 - \omega_2 \zeta_\varphi^3 = 0 \quad (3.3)$$

Случай $\zeta_r = \zeta_\varphi = 0$, или $t = \text{const}$, $\Sigma = \Sigma_t$, описан выше, а при $\zeta_r \neq 0$ этому уравнению можно придать вид

$$r_t = \psi(t, r, \varphi, r_\varphi) = \kappa_1 - \kappa_2 r_\varphi - \omega_1 r_\varphi^2 + \omega_2 r_\varphi^3 \quad (3.4)$$

Функция ψ зависит от координат через коэффициенты κ_i , ω_i . Это нелинейное уравнение первого порядка имеет, как и в разд. 2, систему характеристик — бихарактеристик уравнения (3.1) и условий полосы

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{\partial \psi}{\partial r_\varphi} = \kappa_2 + 2\omega_1 r_\varphi - 3\omega_2 r_\varphi^2 = \chi_2 \\ \frac{dr}{dt} &= r_t + r_\varphi \frac{d\varphi}{dt} = \kappa_1 + \omega_1 r_\varphi^2 - 2\omega_2 r_\varphi^3 = \chi_1 \\ \frac{dr_t}{dt} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial r} r_t, & \frac{dr_\varphi}{dt} &= \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial r} r_\varphi \end{aligned} \quad (3.5)$$

Уравнений (3.5) достаточно для построения характеристической поверхности в окрестности любой начальной кривой с заданными на ней величинами r_φ , κ_i , ω_i , например кривой $r = r^{(0)}(\varphi)$ на мгновенной поверхности тела Σ_t , форма которой и определит коэффициенты κ_i , ω_i .

Вариация r_φ в точке дает особую характеристическую поверхность —

конус, огибающую все другие поверхности Σ , проходящие через эту точку. При $r_\varphi=0$ бихарактеристики (3.5) совпадают с опорными (2.3), а при $|r_\varphi| \rightarrow \infty$ становятся параллельными оси r , образуя поверхность Σ_t . Соответственно поверхности Σ , проходящие через отрезки касательной к начальной кривой $r^{(0)}(\varphi)$ с наклоном $r_\varphi^{(0)}$, касаются Σ_0 при $r_\varphi^{(0)}=0$ и Σ_t при $|r_\varphi^{(0)}| \rightarrow \infty$.

Рассмотрим вырожденный случай $\omega_2=0$, соответствующий задачам, близким к осесимметричным, когда при вычислении производной $p_{\varphi\varphi}$ через зависимость $p(n_x)$ можно пренебречь членом x_φ^2 в формуле (1.2) для n_x , а, следовательно, и третьей производной $x_{\varphi\varphi\varphi}$ в уравнении (3.1). В этом случае интегрированием по частям интеграла I в уравнении (1.7) можно понизить порядок уравнения (1.11) и вместо (3.1) получить уравнение второго порядка:

$$\Lambda_1 = x_{tr} - \kappa_1 x_{r2} - \kappa_2 x_{r\varphi} - \omega_1 x_{\varphi\varphi} = W_1 \quad (3.6)$$

где W_1 — оператор низшего порядка. Его характеристическое уравнение можно получить из (3.3), положив $\omega_2=0$ и сократив на ζ_r .

В другом вырожденном случае, $\omega_1=\omega_2=0$, соответствующем модели местного осесимметричного тела, производные выше первой вообще исчезают, и свойства системы (1.9)–(1.10) целиком определяются уравнением (1.9) с теми же характеристиками, что и в п. 2.

Здесь, как и в общем случае, добавляются характеристические поверхности уравнений (1.10), (1.11) — с образующими параллельными оси r в пространстве (t, r, φ) , так как на них невозможно задать ξ и h несовместно с этими уравнениями. Но это и не требуется, поэтому эти поверхности играют лишь формальную, второстепенную роль.

Заметим, что вдоль бихарактеристик (3.5) по аналогии с (2.3) можно выписать соотношение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{D}{n_x} + \kappa_1 \chi_1 + \kappa_2 \chi_2 = \chi_3 \quad (3.7)$$

Оно не может быть дополнено, в отличие от п. 2, уравнениями типа (2.4) для x_t, x_r, x_φ , и использовано для построения интегральных поверхностей, но полезно для геометрической иллюстрации характера распространения возмущений, имея в виду, из физических соображений, что $dx/dt > 0$.

4. Исследуем детальной формы характеристических поверхностей (существующих, как показано выше) и сопутствующие вопросы об областях влияния начальных данных на решения или областях зависимости решений от них.

Границами этих областей будут характеристические поверхности, поскольку на них могут вращаться старшие производные и продолжение решения за них — не единственно. Под начальными данными будем подразумевать задание при $t=0$ формы поверхности Σ_t тела или части ее.

Поскольку характеристические свойства уравнений локальны и определяются главной частью их операторов, то вместо общего уравнения (3.1) достаточно рассмотреть однородное $\Lambda=0$ с постоянными коэффициентами κ_i, ω_i , «замороженными» в точке $(x_0, r_0, \varphi_0, t=0)$. Переходя к переменным (y, z) — расстояниям от опорной бихарактеристики, придем к канонической форме такого уравнения

$$\Lambda = x_{tyy} - \omega_1 x_{yzz} - \omega_2 x_{zzz} = 0 \quad (4.1)$$

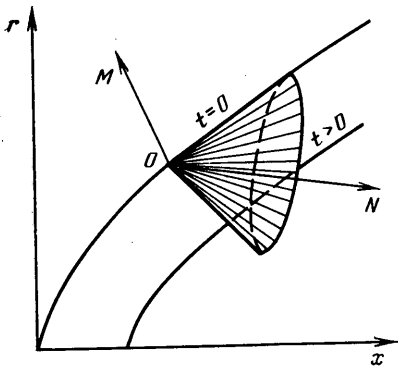
$$y = r - r_0 - \kappa_1 t, \quad z = \varphi - \varphi_0 - \kappa_2 t$$

Характеристические соотношения в новых переменных легко получить, формально заменив в (3.3)–(3.5) (r, φ) на (y, z) и опустив члены с κ_i .

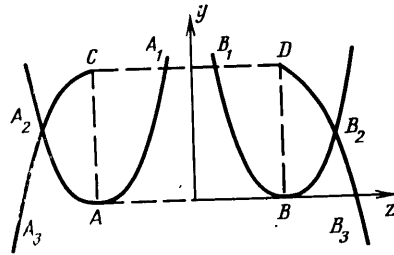
Рассмотрим вначале случай $\omega_2=0$. Уравнение $\Lambda_1=0$ из (3.6) при переходе к переменным (y, z) , а затем к $M = \frac{1}{2}(y+t), N = \frac{1}{2}(y-t)$ сведется к волновому ($\omega_1 > 0$)

$$\Lambda_1 = x_{ty} - \omega_1 x_{zz} = x_{MM} - (x_{NN} + \omega_1 x_{zz}) \quad (4.2)$$

Это обстоятельство позволяет надеяться на определенные аналогии в



Фиг. 1



Фиг. 2

постановке задачи и характере распространения возмущений и для исходного уравнения (3.6).

Исключив y_z из преобразованных уравнений (3.5), получим соответственно связь между угловыми коэффициентами бихарактеристик и уравнение конуса с вершиной в точке $y=z=t=0$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4\omega_1} \frac{dz}{dt}, \quad 4\omega_1 t y = z^2 \quad (4.3)$$

В переменных (M, N, t) последнее уравнение описывает эллиптический конус с продольной осью M , схематично изображенный на фиг. 1. Сечения этого конуса плоскостями $t = \text{const}$ — мгновенной поверхностью тела, дают параболы $(A_2 A A_1, B_2 B B_1)$ на фиг. 2 с вершиной на опорной образующей с параметром $y_z = r_\varphi = 0$. Эти параболы обращены вверх, в сторону больших y, r при $t > 0$, и вниз при $t < 0$. Соответственно и конус расположен выше при $t > 0$ и ниже при $t < 0$ от опорной образующей, ограничивая соответственно области влияния и зависимости своей вершины. Обе ветви параболы сближаются при $t \rightarrow 0$ по закону $\Delta\varphi \sim t^{1/2}$, смыкаясь в предельную образующую $\varphi = \varphi_0$ на Σ_t .

При $\kappa_1 < 0$, в частности на тупом теле [5], сечение $r = r_0$ конуса дает пару прямых $\varphi = (\kappa_2 \pm 2\sqrt{-\kappa_1 \omega_1 t})$, лежащих по одну сторону меридиональной плоскости при $\mu = -4\kappa_1 \omega_1 \kappa_2^{-2} < 1$ и по обе стороны при $\mu > 1$. В силу оценок (3.2) эти лучи в пространстве (x, r, φ) при $r_0 \rightarrow 0$ прижимаются к поверхности тела, разворачиваясь в полуплоскость при $\mu > 1$ и схлопываясь при $\mu < 1$. Так как $\mu \sim \kappa_1^2 / \kappa_2^2$, то при малой асимметрии задачи всегда $\mu > 1$. При большей асимметрии, $\mu < 1$, реализуются оба варианта (κ_2 — знакопеременная функция), но этот случай уже выходит за пределы допущения $|\omega_2| \ll 1$.

В общем случае $\omega_2 \neq 0$ представим уравнения характеристических конусов в виде

$$Y = \frac{y\omega_2^2}{t\omega_1^3} = \lambda^2 - 2\lambda^3, \quad Z = \frac{z\omega_2}{t\omega_1^2} = 2\lambda - 3\lambda^2, \quad \lambda = \frac{\omega_2 y_z}{\omega_1} \quad (4.4)$$

Как указано выше, $\omega_1 > 0$, но $\omega_2 \sim x_\varphi$ может иметь любой знак. Кривая (4.4), изображенная на фиг. 3, имеет характерные точки (λ, Y, Z)

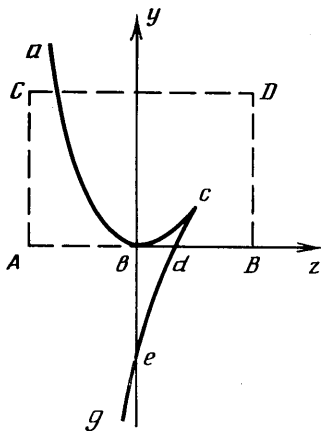
$$a(\lambda = -\infty), \quad b(0, 00), \quad c(1/3, 2/9\sqrt{3}, 1/3) \\ d(1/2, 0, 1/4), \quad e(2/3, -2/9\sqrt{3}, 0), \quad g(\lambda = +\infty)$$

В точке возврата с имеем $Z_\lambda = Y_\lambda = 0$ и максимум величины Z . При больших $|\lambda|$ кривая (4.4) имеет асимптотику

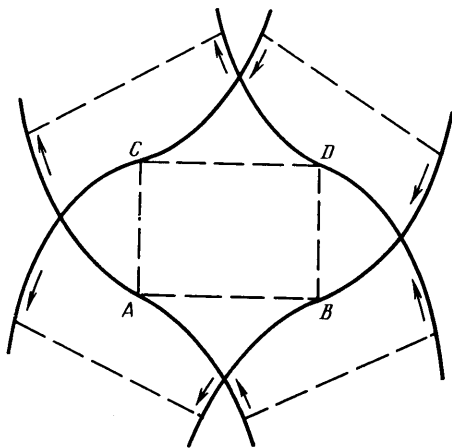
$$Y = \pm 2/9\sqrt{3} (-Z)^{2/3}, \quad \omega_2 t^{1/2} y = \pm 2/9\sqrt{3} (-\omega_2 z)^{2/3} \quad (4.5)$$

Эти поверхности — характеристические конусы уравнения

$$x_{t\varphi\varphi} = \omega_2 x_{zzz} \quad (4.6)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

описывающего асимптотику решения вблизи Σ_t , т. е. при малых t и больших y .

При малых λ кривая (4.4) совпадает с (4.3). В плоскости (y, z) точки $b - e$ при $t \rightarrow 0$ будут стягиваться к началу координат, а асимптотические ветви (4.5) — по закону $z \sim t^{1/3} y^{2/3}$ к оси $z=0$ или $\varphi = \varphi_0$.

Область влияния элемента $\Omega^{(0)}$ начальной поверхности $\Sigma_t^{(0)}$ ($t=0$) на решение на последующей поверхности $\Sigma_t^{(1)}$ ($t=t_1 > 0$) определим как совокупность сечений последней всех характеристических конусов с вершинами на $\Omega^{(0)}$. Наоборот, расположенная на $\Sigma_t^{(0)}$ область зависимости элемента $\Omega^{(1)}$ на $\Sigma_t^{(1)}$ будет заполнена вершинами конусов, достигающих $\Omega^{(1)}$.

Для $\Omega^{(0)}$, $\Omega^{(1)}$ в виде фигуры $ABCD$ эти области (в проекции на одну плоскость $t = \text{const}$) показаны на фиг. 2, 4.

При $\omega_2 = 0$ огибающая конусов с вершинами на $\Omega^{(0)}$ образует на $\Sigma_t^{(1)}$ полуограниченную область влияния $A_2 A B B_2$ (фиг. 2), а линия $A_3 C D B_3$ на $\Sigma_t^{(0)}$ выделяет полуограниченную (в рамках локального анализа) область зависимости элемента $\Omega^{(1)}$. Линии $A_3 C$, $B_3 D$ будут, как легко показать, ветвями тех же парабол, симметричных ветвям $A_2 A$, $B_2 B$ относительно оси z .

При $\omega_2 \neq 0$ для краткости ограничимся асимптотической картиной $t_1 \rightarrow 0$, соответствующей уравнению (4.6). Область влияния здесь имеет вид двух отмеченных уходящими стрелками полуполос, ограниченных ветвями кривой (4.6), соединенных пунктиром (фиг. 4); аналогично области зависимости помечены приходящими стрелками и ограничены кривыми, симметричными (4.5) относительно оси y . Приведенная картина соответствует $\omega_2 > 0$ и при $\omega_2 < 0$ поворотом вокруг оси y меняется на обратную.

Рассмотрим еще асимптотику кривой (4.4) при $\omega_2 \rightarrow 0$. Поскольку $y \sim Y \omega_2^{-2}$, а $z \sim Z \omega_2^{-1}$, то при переходе в плоскость (y, z) из (Y, Z) ординаты возрастают быстрее, чем абсциссы, поэтому любая конечная часть ветви $a - b - c$ на фиг. 3 будет стремиться к параболе (4.3), а ветвь $c - g$ — к линии, параллельной оси r . А так как любому $Z > 0$ будет соответствовать значение $z \rightarrow \infty$, то участок поверхности характеристического конуса $0 - c - g$, где точка 0 — его вершина, будет прижиматься к поверхности Σ_t . Заметим, что сохраняющееся различие областей влияния требует дополнительного обоснования предельного перехода $\omega_2 \rightarrow 0$ в задачах с малой асимметрией.

5. Неограниченность областей влияния и зависимости и отсутствие замкнутых областей определенности решения для конечных элементов Ω являются в данном случае следствием характеристичности поверхности Σ_t . По этой причине задание на ней начальной задачи не обеспечивает в общем случае однозначности решения и требует дополнительных граничных условий. Согласно постановке задачи разд. 1, ими должны быть условия (1.3) регулярности решения при $r \rightarrow 0$, а также, при $\omega_2 \neq 0$, некоторые условия (например, ограниченности) при $r \rightarrow \infty$.

Последний вопрос остается открытым, так как уравнения (4.1) или (4.6) в ма-

тематической физике встречаются, видимо, впервые и их свойства, кроме описанных выше, пока не изучены. Необходимость первого условия можно подтвердить примером линеаризованной плоской задачи [10], для которой получено множество ограниченных решений, одинаковых при $t=0$, и однозначный выбор решения оказался возможным лишь при дополнительном условии (1.3) регулярности решения при $r \rightarrow 0$. Другие примеры неединственности решений приведены в [16, 17]. Некоторым физическим обоснованием такого отбора решений может служить пригодность положенной в основу теории интегролокальной модели уноса лишь для тел с конечной кривизной поверхности.

В силу характеристичности поверхности Σ_t типичной для данной проблемы может быть задача типа Гурса: на характеристических поверхностях $\Sigma_t^{(0)}$, $t=0$, и $\Sigma_\zeta^{(0)}$, $\zeta=0$, с линией пересечения L заданы функция x и на Σ_ζ производная x_ζ . Требуется найти решение в области $t>0$, $\zeta>0$.

Следующие соображения показывают возможности разрешимости этой задачи. Уравнение (4.1) на Σ_ζ имеет вид условия совместности (при $\zeta_2=t$, $\zeta_3=z$)

$$\zeta_y^2 u_t - (2\zeta_y \zeta_z \omega_1 + 3\omega_2 \zeta_z^2) u_z = a_1 u + a_2, \quad u = x_{\zeta\zeta} \quad (5.1)$$

Но тогда, вычисляя на L с помощью перекрестных данных производную $x_t^{(L)}$ для Σ_t и $x_{\zeta\zeta}^{(L)}$ для Σ_ζ , можно определить из уравнений (5.1) и (4.1) производную

$x_{\zeta\zeta}^{(0)}$ на Σ_ζ и $x_t^{(0)}$ на Σ_t , что в принципе дает возможность найти ближайшие по-

верхности $\Sigma_t^{(1)}$, $\Sigma_\zeta^{(1)}$, t_1 , $\zeta_1 > 0$ и решение на них вместе с производной $x_\zeta^{(1)}$ на $\Sigma_\zeta^{(1)}$.

Заметим, что множество решений уравнения (3.1) шире, чем (1.9), так как добавление к последнему произвольной функции вида $g_1(t, \varphi) + r g_2(t, \varphi)$ не изменяет уравнения (3.1). Нужное решение последнего должно еще удовлетворять условиям $G = dG/dr = 0$. Однако есть основание полагать, что регулярное при $r \rightarrow 0$ решение уравнения (3.1) удовлетворит этим условиям автоматически, что позволит использовать это уравнение вместо (1.9) непосредственно при аналитических или численных исследованиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.—Л.: Гостехиздат, 1951. 544 с.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.: Гостехиздат, 1961, т. 1. 478 с.; 1965, т. 2. 655 с.
3. Simpkins P. J. On the stable shape of subliming bodies in a high-enthalpy gas stream.— J. Fluid Mech., 1963, v. 15, № 1, p. 119—132.
4. Мурзинов И. Н. О форме тел, разрушающихся под действием интенсивного нагревания при движении в атмосфере.— Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 4, с. 36—40.
5. Лунев В. В. Некоторые свойства и решения уравнения абляции.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 3, с. 95—102.
6. Chin J. H. Shape change and conduction for nosetips at angle of attack.— AJAA Journal, 1975, v. 13, № 5, p. 599—604.
7. Апштейн Э. З., Пилюгин Н. Н. Стационарная форма тел при их разрушении под действием тепловых потоков, зависящих от локального угла наклона поверхности.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 6, с. 137—143.
8. Знаменский В. В., Лунев В. В., Сенкевич Е. А. Некоторые автомодельные решения уравнения уноса.— В кн.: Газовая и волновая динамика. М.: Изд-во МГУ, 1979, № 3, с. 64—70.
9. Сенкевич Е. А. Об одном точном решении уравнения уноса массы.— Тр. МФТИ. Сер. Аэрофизика и прикладная математика. Долгопрудный, 1979, с. 14.
10. Лунев В. В., Поляков И. Н. Об устойчивости стационарного решения уравнения обгара.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 2, с. 96—103.
11. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
12. Знаменский В. В., Лунев В. В. Об асимптотических свойствах уравнений пленочной теории разрушения материалов в задачах об изменении формы тел при аэродинамическом нагреве.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 1, с. 46—54.
13. Полежаев Ю. В., Юревич Ф. Б. Тепловая защита. М.: Энергия, 1976. 391 с.
14. Авдуческий В. С. Приближенный метод расчета трехмерного ламинарного пограничного слоя.— Изв. АН СССР. ОТИ, 1962, № 2, с. 11—16.
15. Лунев В. В., Сенкевич Е. А. Метод меридиональных сечений в задачах пространственного пограничного слоя.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1986, № 3, с. 67—73.
16. Воронкин В. Г., Лунев В. В., Никулин А. Н. О стационарной форме тел при их разрушении за счет аэродинамического нагрева.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 2, с. 138—146.
17. Мурзинов И. Н. Аналитическое решение задачи о стационарных формах тел в условиях абляции.— В кн.: Газовая и волновая динамика. Вып. 3. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 64—70.