

УДК 533.6.011.5

К РЕШЕНИЮ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЕ СВЕРХЗВУКОВЫХ СОПЕЛ

СЕРГИЕНКО А. А., СОБАЧКИН А. А.

В [1] дана постановка задачи об оптимальной форме осесимметричного сверхзвукового сопла с использованием контрольного характеристического контура, получены необходимые условия экстремума в виде краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В [2] указанная краевая задача решена в явном виде и в случае безвихревого течения газа получены конечные выражения, связывающие значения газодинамических параметров на замыкающей характеристике первого семейства. Попытка нахождения отличных от [2] решений путем численного анализа общего решения системы уравнений Эйлера не принесла положительных результатов [3]. Решения, полученные в [1, 2] и последующих за ними публикациях, основаны на выполнении требования обращения в нуль первой вариации функционала Лагранжа на оптимизируемом участке замыкающей характеристики. Такой подход исключает из рассмотрения краевые экстремумы на границе области существования решений.

В настоящей работе снимается требование обращения в нуль одного из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала Лагранжа, рассматривается область существования решения возникающей краевой задачи, приведены результаты расчетов для одного примера с выделением как экстремума известного типа, так и краевых экстремумов. В общем случае при отыскании краевых экстремумов необходимо принимать отличными от нуля все члены первой вариации функционала Лагранжа. Однако алгоритмы решения экстремальных задач с заранее неизвестными границами области существования решения в такой постановке отсутствуют. В то же время подход, предложенный в настоящей работе, позволяет выявить новые, неизвестные ранее краевые экстремумы.

1. Рассмотрим задачу об оптимальной форме сверхзвукового сопла с контуром, проходящим через две заданные точки A и B (фиг. 1). Пусть внутри сопла реализуется сверхзвуковое осесимметричное изоэнтропическое незакрученное течение идеального газа. В меридиональной плоскости (x, r) , где x — ось симметрии течения, рассмотрим контрольный характеристический контур ACB , состоящий из отрезков характеристик второго (AC) и первого (CB) семейств. Будем полагать течение слева от характеристики ACO заданным, пусть для определенности это будет сверхзвуковое течение потока, обтекающего угловую точку A с прямолинейной линией перехода через скорость звука AD . Выразим безразмерную x -вую компоненту силы, действующую на контур $AB - J$, через сумму интегралов вдоль характеристик AC и CB

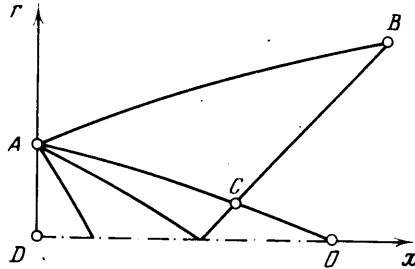
$$J = \int_{r_a}^{r_c} F_1 dr + \int_{r_c}^{r_b} \Phi_1 dr \quad (1.1)$$

$$\Phi_1 = r\varepsilon\sqrt{\tau}\lambda \left[\frac{\sin \alpha}{\gamma} + \frac{\cos \theta}{\sin(\theta + \alpha)} \right]$$

$$F_1 = r\varepsilon\sqrt{\tau}\lambda \left[\frac{\sin \alpha}{\gamma} - \frac{\cos \theta}{\sin(\theta - \alpha)} \right]$$

$$\tau = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\gamma - \cos 2\alpha}, \quad \varepsilon = \tau^{1/(\gamma-1)}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma - \cos 2\alpha}}$$

Здесь θ — угол наклона вектора скорости газа к оси x , α — угол Маха, γ — показатель адиабаты (принимается постоянным). На контрольном характеристическом контуре должны выполняться изопериметрические условия постоянства длины сопла и расхода газа, а на замыкающей ха-



Фиг. 1

рактеристике CB дифференциальная связь — условие совместности

$$\Psi = \int_{r_a}^{r_c} F_2 dr + \int_{r_c}^{r_b} \Phi_2 dr = 0 \quad (1.2)$$

$$L = \int_{r_a}^{r_c} F_3 dr + \int_{r_c}^{r_b} \Phi_3 dr = \text{const}$$

$$\Phi_4 = (\lambda^2 - 1) \frac{d\alpha}{dr} + \frac{d\theta}{dr} + \frac{\sin \theta \sin \alpha}{r \sin(\theta + \alpha)} = 0$$

$$\Phi_2 = \frac{r\varepsilon\sqrt{\tau}}{\sin(\theta + \alpha)}, \quad F_2 = -\frac{r\varepsilon\sqrt{\tau}}{\sin(\theta - \alpha)}$$

$$\Phi_3 = \text{ctg}(\theta + \alpha), \quad F_3 = \text{ctg}(\theta - \alpha)$$

Вариационная задача на условный экстремум заключается в определении функций $\alpha(r)$, $\theta(r)$ и $x(r)$ на замыкающей характеристике CB , реализующей максимум J при заданных x_a, r_a, x_b, r_b (здесь и далее индексы a, b, c относятся к параметрам в точках A, B, C соответственно), функциях $\alpha(r)$, $\theta(r)$, $x(r)$ на характеристике AC и выполнении двух изопериметрических условий и дифференциальной связи из (1.2). Оптимальный контур сопла AB определяется из решения задачи Гурса между характеристиками AC и CB . Функционал Лагранжа для сформулированной задачи примет вид

$$I = \int_{r_a}^{r_c} F dr + \int_{r_c}^{r_b} \Phi dr \quad (1.3)$$

$$F = F_1 + \mu F_2 + \sigma F_3, \quad \Phi = \Phi_1 + \mu \Phi_2 + \sigma \Phi_3 + \nu(r) \Phi_4$$

где μ и σ — постоянные, а $\nu(r)$ — переменный множители Лагранжа; отметим, что первый интеграл в (1.3) по заданной характеристике AC является функцией координат точки C . Запишем первую вариацию δI в

следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_{r_c}^{r_b} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{d}{dr} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha'} \right) \delta \alpha + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{d}{dr} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta'} \right) \delta \theta \right] dr + \\ & + \left\{ F - \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha'} \left[\left(\frac{d\alpha}{dr} \right)_1 - \left(\frac{d\alpha}{dr} \right)_2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta'} \left[\left(\frac{d\theta}{dr} \right)_1 - \left(\frac{d\theta}{dr} \right)_2 \right] \right\}_c \delta r_{2c} + v_b \delta \beta_b \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по r , индексы 1 и 2 соответствуют вариациям и производным вдоль направлений характеристик первого и второго семейств,

$$\beta = \theta - \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{ctg} \alpha \right) - \alpha$$

Потребуем обращения в нуль интегральных членов первой вариации (1.4), что даст систему уравнений Эйлера (1.5), из которой можно получить явное выражение для v

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - 1) \frac{dv}{dr} - \frac{\sin^2 \theta}{r \sin^2(\theta + \alpha)} v &= f_1(r, \alpha, \theta, \mu, \sigma) \\ \frac{dv}{dr} - \frac{\sin^2 \alpha}{r \sin^2(\theta + \alpha)} v &= f_2(r, \alpha, \theta, \mu, \sigma) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} v = & \frac{r}{(\lambda^2 - 1) \sin^2 \alpha - \sin^2 \theta} \left\{ \lambda^2 \left[r \varepsilon \sqrt{\tau} \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} (\lambda \cos \theta + \mu) - \sigma \right] + \right. \\ & \left. + 2(\lambda^2 - 1) [r \varepsilon \sqrt{\tau} (\lambda \cos \alpha + \mu \cos(\theta + \alpha)) + \sigma] \right\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Исключая v из (1.5), получим линейное дифференциальное уравнение относительно функций $\alpha(r)$ и $\theta(r)$. Это уравнение вместе с условиями направления и совместности образуют систему из трех дифференциальных уравнений, которая описывает искомую характеристику CB

$$\frac{d\alpha}{dr} = g_1(r, \theta, \alpha, \mu, \sigma), \quad \frac{d\theta}{dr} = g_2(r, \theta, \alpha, \mu, \sigma), \quad \frac{dx}{dr} = \operatorname{ctg}(\theta + \alpha) \quad (1.7)$$

Подробный вывод соотношений (1.5)–(1.7) и функции f_1 , f_2 , g_1 , g_2 представлены в [3].

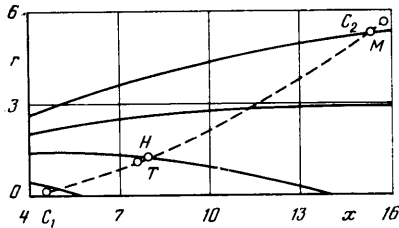
Для последующего анализа потребуем обращения в нуль множителя при δr_{2c} из (1.4) [1, 2]

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\sin 2\alpha}{\cos(\theta + \alpha) \cos(\theta - \alpha)} \left[r \varepsilon \sqrt{\tau} \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} (-\lambda \cos \theta - \mu) + \sigma \right] + \right. \\ & \left. + 2v \left[\left(\frac{d\theta}{dr} \right)_2 \frac{\sin^2 \alpha \sin \theta \cos \theta}{r \cos(\theta + \alpha) \cos(\theta - \alpha)} \right] \right\}_c = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

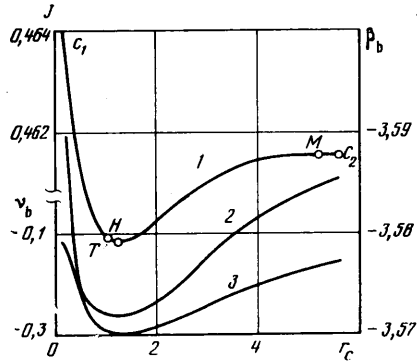
После сделанных допущений (1.5) и (1.8) в выражении (1.4) останется только одно слагаемое

$$\delta I = v_b \delta \beta_b \quad (1.9)$$

Условие $v_b = 0$, впервые введенное в [1], автоматически приводит к условию $\delta I = 0$ на CB и к решению работы [2]. Откажемся от требования его выполнения; в таком случае первая вариация функционала Лагранжа (1.9) станет отличной от нуля, что позволит выявить краевые экстре-



Фиг. 2



Фиг. 3

мумы J на границе области существования решения, причем в случаях максимума должно выполняться условие $\delta I \leq 0$.

2. Определим область существования решения полученной задачи. Для этого выберем в заданном пучке характеристик AOD некоторую характеристику второго семейства ACO (фиг. 1) и точку C , лежащую на ней. В точке C известны величины $x_c, r_c, \alpha_c, \theta_c$, а также их производные вдоль ACO . Выражения (1.6)–(1.8) содержат неизвестные величины $\mu, \sigma, v(r)$ и производные $\alpha'_2, \theta'_2, x'_2$. Таким образом, система из пяти уравнений содержит шесть неизвестных величин. Задание одной из них, например μ , позволяет из (1.6) и (1.8) определить σ и проинтегрировать систему (1.7) от r_c до заданного r_b . Однако при этом $x \neq x_b$, а Ψ из (1.2) отлично от нуля. Меняя величину μ , можно добиться выполнения условия $x = x_b$, но при этом $\Psi \neq 0$. Добиться выполнения условия $\Psi = 0$ можно, изменяя положение точки C на заданной характеристике второго семейства ACO , причем может оказаться, что на данной характеристике такой точки нет. Аналогичную процедуру можно повторить на других характеристиках второго семейства из пучка AOD , после чего в поле предвартельного расширения газа будет выделена некоторая линия C_1C_2 начальных точек характеристик первого семейства, удовлетворяющих системе соотношений (1.6)–(1.8) и приходящих в заданную точку B .

Дальнейший анализ решения полученной задачи проводится на конкретном примере при $x_a = 0, r_a = 1, x_b = 47,7, r_b = 19,9, \gamma = 1,1$. На фиг. 2 показан фрагмент области расширения потока AOD , в котором сплошными линиями выделены участки характеристик второго семейства с различными значениями M_0 — чисел Маха в точках их пересечений с осью потока. Найденная в результате расчетов линия C_1C_2 начальных точек характеристик (1.6)–(1.8), приходящих в заданную точку B представлена штриховой линией. Точка C_1 , как показал расчет, лежит вблизи оси потока.

При движении начальной точки замыкающей характеристики CB вдоль C_1C_2 в направлении C_1 наблюдается увеличение по абсолютной величине производной α'_{1c} , взятой по направлению CB , которая стремится к бесконечности при $r_c \rightarrow 0$. С другой стороны, [4] максимально возможные значения этой производной по модулю обеспечиваются изломом контура AB в точке A . В рассмотренном случае абсолютная величина α'_{1c} превышает максимально допустимые значения на отрезке C_1T линии C_1C_2 (фиг. 2), что приводит к неразрешимости задачи Гурса между характеристиками AC и CB . Для практической реализации полученных решений представляет интерес отрезок TC_2 линии C_1C_2 .

На фиг. 3 представлена зависимость безразмерной величины J от r_c на линии C_1C_2 (кривая 1). На кривой имеются два крайних экстремума J в точках C_1 и C_2 , а также максимум в точке M и минимум в точке H . Ниже

представлены значения v_b и β_b (кривые 2 и 3 соответственно) для тех же решений. Максимум в точке M соответствует известному решению [2] с $v_b=0$. В точке минимума N $v_b \neq 0$, и при сделанных допущениях (1.5) и (1.8) равенство $\delta I=0$ на CB может быть обеспечено только после задания вариация $\delta \beta_b$ из (1.9) обращается в нуль. Заметим, что после задания начальных данных в точке C задачи Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка (1.7) значения параметров в точке B являются определенными единственным образом. Следовательно, после введения дополнительных условий (1.5) и (1.8) вариация $\delta \beta_b$ перестает быть свободной и представляет собой некоторую функцию, зависящую от вариаций координат начальной точки C (см. [3]).

Из фиг. 3 видно, что вблизи минимума N величина β_b постоянна, а ее допустимая вариация, следовательно, равна нулю. При движении точки C от N в направлении C_1 величина J возрастает и, начиная с некоторого момента, превышает значение максимума решения [2] в M , однако, как было отмечено выше, решения, лежащие левее точки T , оказываются непригодными с практической точки зрения в силу неразрешимости задачи Гурса, что не позволяет реализовать выигрыш на краевом экстремуме при стремлении к C_1 . Для рассмотренного примера точка T лежит вблизи минимума N , а значение J у соответствующего ей решения меньше, чем в случае максимума M , соответствующего известному решению работы [2]; таким образом, для рассмотренного случая отказ от требования $v_b=0$ и равенства нулю первой вариации функционала Лагранжа на CB не позволил улучшить известное решение.

Однако полученные результаты свидетельствуют о необходимости выделения краевых экстремумов на границе области существования решения при рассмотрении различных вырожденных вариационных задач газовой динамики, так как не исключена возможность возникновения ситуаций, в которых наилучшие аэродинамические формы будут соответствовать именно таким решениям.

Авторы искренне благодарят Ю. Д. Шмыглевского за постоянный интерес к работе и многочисленные полезные рекомендации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Guderley K. G., Hantsch E. Beste Formen für achsensymmetrische Überschubdüsen.— Z. Flugwiss., 1955, В. 3, Н. 9, S. 305–315. (Рус. перев.: Гудерлей, Хантш. Наилучшие формы сверхзвуковых осесимметричных реактивных сопел. Механика. Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит., 1956, № 4, с. 53–69).
2. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений.— ПММ, 1957, т. 21, вып. 2, с. 195–206.
3. Сергиенко А. А., Сандомирская И. Д. О профилировании сверхзвуковой части осесимметричного сопла наибольшей тяги.— В кн.: Численные методы в газовой динамике. Вып. 4. М.: Изд-во МГУ, 1965, с. 77–102.
4. Шмыглевский Ю. Д. О некоторых свойствах осесимметричных сверхзвуковых течений газа.— Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 5, с. 782–784.

Москва

Поступила в редакцию
2.I.1986