

УДК 533.6.011.35

ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНКИ ОКОЛОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

АСЛАНОВ С. К.

Простейшим для режимов несимметричного трансзвукового обтекания является случай пластинки, установленной под малым углом атаки в звуковом потоке. Будучи в то же время базисной, эта задача характерна наличием двух масштабов явления и принадлежит к классу газодинамических задач с «особыми» возмущениями. Ее решение найдено К. Г. Гудерлеем (1954 г.) лишь в рамках редуцированной постановки, когда не были целиком учтены конкретные граничные условия обтекания передней части пластинки и, самое главное, не был фиксирован наперед истинный характер разветвления течения в точке торможения на ее поверхности. Однако именно с помощью него производится выбор коэффициента при построении двучленной особенности звукового режима данного обтекания, влияние которой естественным образом распространяется на поток в целом.

В настоящей работе решение возникающей на плоскости годографа двусторонней задачи Трикоми построено с удовлетворением всей совокупности краевых условий, что обеспечивает его правильную асимптотику по исчезающему углу атаки. В результате выяснено, что отличие указанного решения Гудерлея от полученного ниже начинается уже с сингулярных членов.

1. Рассматривается плоский безграничный поток газа, который имеет на бесконечности скорость звука a_* и под малым углом атаки δ набегаёт на пластинку длины l (фиг. 1).

Если воспользоваться уравнением Трикоми, то для функции тока $\psi(\eta, \theta)$ на плоскости годографа (фиг. 2) возникает следующая краевая задача:

$$\psi_{\eta\eta} + \eta\psi_{\theta\theta} = 0 \quad (1.1)$$

$$\psi(\eta, -\delta) = 0, \quad \psi(\eta, \pi - \delta) = 0, \quad \psi = 0 \quad (1.2)$$

$$\eta = (\gamma + 1)^{1/2} (1 - w/a_*)$$

Условие $\psi = 0$ выполняется на характеристиках AE и BD , отвечающих повороту сверхзвукового потока около точек A и B .

Здесь θ — угол наклона вектора скорости к направлению набегающего потока в бесконечности, а η — переменная Франкля [2], которая в рамках околозвуковой аппроксимации выражается через модуль скорости w и показатель адиабаты γ .

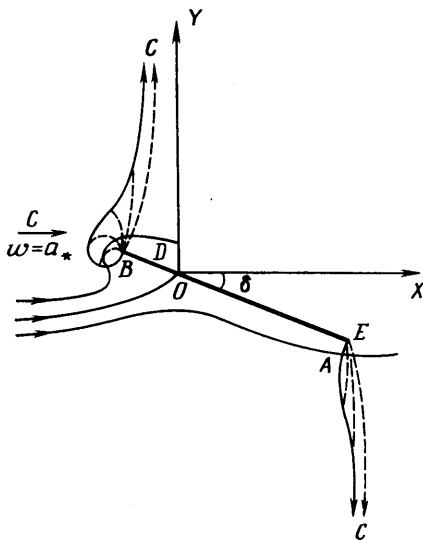
Последнее условие может быть снесено на звуковую линию $\eta = 0$ в виде интегральных соотношений Трикоми [1]

$$\psi(0, \theta) = \frac{3^{1/2} \Gamma^3(1/3)}{4\pi^2} \int_{j\pi - \delta}^{\theta} \frac{\psi_{\eta}(0, t) dt}{(\theta - t)^{1/2}} \quad (1.3)$$

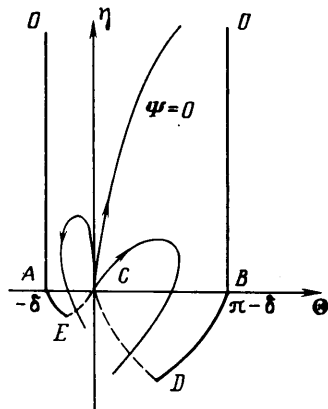
справедливых соответственно для двух участков AC ($j=0$), BC ($j=1$).

Взаимное соответствие областей на фиг. 1 и 2 отмечено одинаковым обозначением точек. Масштаб перехода с плоскости годографа (η, θ) на физическую плоскость (x, y) устанавливает мультипликативную константу в решении однородной задачи (1.1)–(1.3) с помощью условия заданной длины пластинки

$$x_A(0) - x_B(0) = l, \quad x_A(\eta) = x(\eta, -\delta), \quad x_B(\eta) = x(\eta, \pi - \delta) \quad (1.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Решение рассматриваемой задачи $\psi(\eta, \theta)$ должно иметь на годографе особенность в точке C , в которую отображается бесконечно удаленная точка плоскости течения: $\psi \rightarrow \infty$ при стремлении к особой точке C , оставаясь ограниченным на предельных характеристиках $EC(DC)$ [2, 3].

Разветвление линии тока $CO(\psi=0)$, упирающейся в точку O остановки потока по нормали к пластинке ($\theta = \pi/2 - \delta$), на два участка вдоль нее (OA с $\theta = -\delta$ и OB с $\theta = \pi - \delta$), позволяет однозначно построить особенность, которая присуща несимметричному звуковому обтеканию профиля и складывается из нечетного и четного по θ членов [3].

Сформулированная краевая задача, которая до сих пор не решена, впервые исследовалась Гудерлеем [4, 5] в упрощенной постановке: решение строилось в виде бесконечного ряда по автомодельным частным решениям уравнения (1.1) с общим центром в точке A . В результате такого подхода краевые условия (1.2), (1.3) на конкретной части границы OBD остались не выполненными, а равно не был достигнут заданный характер разветвления линии тока CO , обязательно включающий в себя как раз этот участок границы. В то же время условие разветвления течения в застойной точке O существенным образом участвует в правильном построении особенности, которой должно обладать решение задачи в начале координат C плоскости годографа (фиг. 2), а значит, его влияние распространяется на всю краевую область.

Утверждение, что в рамках «предельного перехода $\delta \rightarrow 0$ граничное условие на OBD не играет существенной роли» [4, 5], никак нельзя признать верным, поскольку рассматриваемая задача с позиций теории тонкого профиля является в терминологии [6] задачей с «особыми» возмущениями при обтекании пластинки под малым углом атаки δ наряду с «регулярными» возмущениями (соизмеримыми по величине с δ) в окрестности ее передней кромки возбуждаются конечные («особые») возмущения, которые не могут автоматически исчезнуть при $\delta = 0$ для любой формы краевых условий из области их возбуждения. Поэтому, чтобы решение удовлетворяло в пределе при $\delta = 0$ естественному требованию исчезновения всех возмущений (переход к однородному потоку), необходимо правильно выполнить те граничные условия, которые имеют место для окрестности передней кромки и точки торможения, т. е. на конкретно заданной на линии OBD , соответствующей части поверхности пластинки вверх по течению от застойной точки (фиг. 1).

В этом случае решение для малого δ будет представлять собой асимп-

тотуку общего решения исследуемой задачи. Принятая в [5] упрощенная ее постановка не может быть признана правильной, поскольку она не фиксирует наперед требуемого выше характера разветвления течения в точке O .

Ранее в [7] была предпринята попытка анализа рассматриваемой задачи в полной постановке (1.1)–(1.4). На основании численных результатов удовлетворения краевого условия (1.3) в отдельных точках было высказано предположение, что коэффициенты регулярной части решения $a_n \rightarrow 0$ вместе с $\delta \rightarrow 0$. В настоящей работе сформулированную выше задачу обтекания пластинки удается решить до конца.

2. Решение в области $\eta > 0$ записывается в виде [7]

$$\psi = 2A \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n^{1/2} + a_n) \cos n\delta + \frac{b}{n^{1/2}} \sin n\delta \right] \lambda(n^{1/2}\eta) \sin n(\theta + \delta) \quad (2.1)$$

$$b = -(a_1 + 1) \operatorname{ctg} \delta, \quad \lambda(0) = 1, \quad \lambda(+\infty) = 0$$

где λ – функция Эйри.

Граничные условия (1.2) удовлетворены целиком; при этом естественная 2π -периодичность решения (2.1) по углу θ достигается за счет выполнения условия при $\theta = \pi - \delta$, игнорированного в [4, 5]. Решение обладает требуемой особенностью и правильным характером ветвления в точке O , регулярная его часть имеет следующий порядок коэффициентов [2]: $a_n(\delta) = O(n^{-1/3})$.

Последние определяются из оставшегося краевого условия (1.3). Это требует продолжения решения на звуковую линию $\eta = 0$, где ряд (2.1) расходится. Выполненное в [7] суммирование таких расходящихся рядов позволяет продолжить их аналитически на прямую $\eta = 0$, явно выделив сингулярные члены

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \psi(0, \theta) &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \left[P_{-5/3}(\theta) + \frac{3}{2} b P_{-7/3}(\theta) \right] + \\ &+ (2\pi)^{-5/3} \sum_{n=1}^{\infty} [2\pi b S_{2n}^{(2)}(\theta) - S_{2n-1}^{(5)}(\theta)] + 2T_0(\theta) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{A\lambda'(0)} \psi_{\eta}(0, \theta) &= -\frac{2}{3} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \left[P_{-7/3}(\theta) + \frac{3}{4} P_{-5/3}(\theta) \right] + \\ &+ (2\pi)^{-7/3} \sum_{n=1}^{\infty} [S_{2n-1}^{(7)}(\theta) - 2\pi b S_{2n}^{(4)}(\theta)] + 2T_{\eta}(\theta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$T_{\mu}(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{\mu} a_m \cos m\delta \sin m(\theta + \delta)$$

$$P_q(\theta) = \theta^q - (-1)^q (\theta + 2\delta)^q$$

$$S_m^{(\alpha)} = \sigma_m^{(\alpha)} P_m(\theta), \quad \sigma_m^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(m + \alpha/3) \zeta(m + \alpha/3)}{m! (2\pi)^m}$$

$$\lambda'(0) = -\frac{2\pi}{3^{1/2} \Gamma^2(1/3)}$$

где Γ и ζ – гамма- и дзета-функции.

Тогда интегралы, которые появляются при выполнении условий (1.3),

МОЖНО СВЕСТИ К ИЗВЕСТНЫМ ТИПАМ [8]

$$\int_0^u x^{\mu-1} (1+\beta u)^{-\nu} dx, \quad \int_0^u (x+\beta)^\nu (u-x)^{\mu-1} dx$$

$$\int_u^\infty (x+\beta)^{-\nu} (x-u)^{\mu-1} dx, \quad \int_0^u x^{\nu-1} (u-x)^{\mu-1} \sin \beta x dx$$
(2.4)

выразив их через полные (F) и вырожденные гипергеометрические функции (Φ). Перейдя в гипергеометрических функциях к аргументу $1/(1-z)$, окончательно условия для определения коэффициентов a_n удобно записать следующим образом:

$$T_0(\theta) = \varphi(\theta) \quad \varphi(\theta) = \varphi_1(\varphi) \quad (-\delta \leq \theta \leq 0)$$

$$\varphi(\theta) = \varphi_2(\theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi - \delta)$$
(2.5)

$$\varphi_1(\theta) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \Gamma^2 \left(\frac{4}{3} \right) \left[F_{5/3}^{(0)} \left(\frac{\theta}{\delta} \right) - \frac{3}{4} b \delta F_{5/3}^{(0)} \left(\frac{\theta}{\delta} \right) \right] - \right.$$

$$\left. - \Gamma \left(\frac{5}{3} \right) \left[\left(2 + \frac{\theta}{\delta} \right)^{-5/3} - \frac{3}{2} b \delta \left(2 + \frac{\theta}{\delta} \right)^{-5/3} \right] \right\} \delta^{-5/3} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} (2\pi)^{-5/3} [S_{2n-1}^{(5)}(\theta) - 2\pi b \delta S_{2n}^{(2)}(\theta)] - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2} \sqrt{3} (2\pi)^{-10/3} \Gamma \left(\frac{4}{3} \right) \left(1 + \frac{\theta}{\delta} \right)^{5/3} \left[\sigma_{2n-1}^{(7)} F_n \left(\frac{\theta}{\delta} \right) + \right. \right.$$

$$\left. + 2\pi b \delta \sigma_{2n}^{(4)} F_{n+1/2} \left(\frac{\theta}{\delta} \right) \right] \delta^{2n-5/3} - \frac{9\sqrt{3}}{8\pi i} \Gamma \left(\frac{4}{3} \right) n^{5/3} a_n \times$$

$$\left. \times [\Phi_{+n}^{(0)}(\theta, \delta) - \Phi_{-n}^{(0)}(\theta, \delta)] \cos n\delta \right\}$$
(2.6)

$$\varphi_2(\theta) = -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \Gamma^2 \left(\frac{4}{3} \right) \left[\frac{1}{5} F_{15/3}^{(5)}(\theta, \delta) + \frac{3}{8} b F_{15/3}^{(5)}(\theta, \delta) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{3}{2} \sqrt{3} (2\pi)^{-10/3} \Gamma \left(\frac{4}{3} \right) (\pi - \delta - \theta)^{5/3} \left[\frac{1}{2n-1/3} \sigma_{2n-1}^{(7)} \times \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \times F_n^{(2n-1)}(\theta, \delta) - \frac{\pi b}{n+1/3} \sigma_{2n}^{(4)} F_{n+1/2}^{(2n)}(\theta, \delta) - \frac{1}{2} (2\pi)^{-5/3} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times [S_{2n-1}^{(5)}(\theta) - 2\pi b \delta S_{2n}^{(2)}(\theta)] + \frac{9\sqrt{3}}{8\pi i} \Gamma \left(\frac{4}{3} \right) (-1)^n n^{5/3} a_n \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times [\Phi_{+n}^{(1)}(\theta, \delta) - \Phi_{-n}^{(1)}(\theta, \delta)] \cos n\delta \right\}$$
(2.7)

$$\theta_- = \frac{\theta}{\pi - \delta}, \quad \theta_+ = \frac{\theta + 2\delta}{\pi + \delta}, \quad \Phi_{\pm n}^{(\alpha)}(\theta, \delta) = (\theta + \delta - \alpha\pi)^{\pm n} \times$$

$$\times \Phi \left[1, \frac{5}{3}; \pm in(\theta + \delta - \alpha\pi) \right]$$

$$F_{\beta}^{(0)}(z) = \frac{2}{3\beta} F \left(\frac{1}{3}, \beta, \beta+1; -z \right) + (z+1)^{-5/3} F \left(1, \beta + \frac{2}{3}; \frac{5}{3}; -1-z \right)$$

$$\begin{aligned}
F_n(z) &= \frac{3}{2} F\left(1, 1-2n, \frac{5}{3}; -1-z\right) - \frac{1}{2n-1/3} F\left(1, 1-2n, \frac{4}{3} - 2n; -z\right) \\
F_{pqr}^{(\alpha)}(\theta, \delta) &= (\pi-\delta)^{-\alpha} F\left(\frac{p}{3}, \frac{q}{3}, \frac{r}{3}; \theta_-\right) - \\
&\quad - (-1)^\alpha (\pi+\delta)^{-\alpha} F\left(\frac{p}{3}, \frac{q}{3}, \frac{r}{3}; \theta_+\right) \\
F_n^{(m)}(\theta, \delta) &= (\pi-\delta)^m F\left(1, 1-2n, \frac{4}{3} - 2n; \theta_-\right) - \\
&\quad - (-1)^m (\pi+\delta)^m F\left(1, 1-2n, \frac{4}{3} - 2n; \theta_+\right)
\end{aligned}$$

Естественно, что причина исчезновения в этих условиях членов, сингулярных при $\theta=0$, связана с характером особенности, которая не может распространяться по характеристикам $CE(CD)$.

Продолжив кусочно-аналитическую функцию $\varphi(\theta)$ нечетным образом, представим ее в промежутке $[-\pi-\delta, \pi-\delta]$ рядом Фурье

$$\begin{aligned}
\varphi(\theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} (A_{m1} + A_{m2}) \sin m(\theta + \delta) \\
A_{m1} &= \frac{2}{\pi} \int_{-\delta}^0 \varphi_1(\theta) \sin m(\theta + \delta) d\theta, \quad A_{m2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi-\delta} \varphi_2(\theta) \sin m(\theta + \delta) d\theta
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Тогда по (2.5) получается бесконечная система уравнений

$$a_m' = A_{m1} + A_{m2} \quad (m=1, 2, \dots), \quad a_m' = a_m \cos m\delta \tag{2.9}$$

3. Для ее решения воспользуемся тем, что угол атаки δ мал. В результате этого с точностью до $O(\delta)$ в (2.6) остаются в качестве главных членов представленные фигурной скобкой. Проведем для аргументов θ_{\pm} в (2.7) разложения по степеням δ/π и выделим главные члены в гипергеометрических функциях. Тогда после применения для последних рекуррентного соотношения Гаусса [8] будем окончательно иметь

$$\begin{aligned}
\varphi_2(\theta) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \pi^{-2/3} \left[\frac{3}{5} \pi \Gamma^2(4/3) F_{158}^{(1)}(\theta, 0) + \frac{1}{8 \sqrt[3]{2\pi}} \Gamma(1/3) \times \right. \\
&\times \left. \left(1 - \frac{\theta}{\pi} \right)^{2/3} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{(2n-1)}^{(7)} \frac{\pi^{2n-1}}{2n-1/3} F_n^{(1)}(\theta, 0) - 2^{-2/3} \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2n-1}^{(6)} \theta^{2n-1} \right] a_1' + \\
&+ i \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \Gamma(1/3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{2/3} a_n' \left[\Phi_{+n}^{(1)}(\theta, 0) - \Phi_{-n}^{(1)}(\theta, 0) \right] + O(\delta) \tag{3.1}
\end{aligned}$$

В результате с точностью до $O(\delta)$ (2.9) дает бесконечную систему следующего стандартного вида:

$$a_m' = \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} a_n' + b_m \quad (m=1, 2, \dots) \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{1}{2\pi} \delta^{-2/3} \int_0^1 \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \Gamma^2\left(\frac{4}{3}\right) \left[F_{5/3}^{(0)}(x-1) + \frac{3}{4} F_{7/3}^{(0)}(x-1) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \left[(x+1)^{-2/3} + \frac{3}{2} (x+1)^{-7/3} \right] \right\} \sin m\delta x dx \tag{3.3}
\end{aligned}$$

$$c_{mn} = i \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) (-1)^n n^{2/3} \int_0^1 [\Phi_{+n}^{(1)}(\pi x, 0) - \Phi_{-n}^{(1)}(\pi x, 0)] \sin m\pi x dx \quad (n \geq 2) \quad (3.4)$$

$$c_{m1} = \int_0^1 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{15 \sqrt[3]{\pi^5}} \Gamma(1/3) F_{158}^{(1)}(\pi x, 0) + \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi^3}} \sum_{k=1}^{\infty} \pi^{2k-1} \times \right. \\ \times \left[\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \sigma_{2k-1}^{(7)} (1-x)^{2/3} \frac{F_k^{(1)}(\pi x, 0)}{2k-1/3} - \frac{\pi}{\sqrt[3]{2}} \sigma_{2k-1}^{(6)} x^{2k-1} \right] - \\ \left. - i \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) [\Phi_{+1}^{(1)}(\pi x, 0) - \Phi_{-1}^{(1)}(\pi x, 0)] \right\} \sin m\pi x dx + \\ + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \delta^{-2/3} \int_0^1 \left[\frac{1}{2\pi} \Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right) F_{2/3}^{(0)}(x+1) - \sqrt{3}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) (1+x)^{-2/3} \right] \sin m\delta x dx$$

Покажем, что замена $A_m = m^{1-\alpha} a_m'$ делает систему (3.2) квазирегулярной [9]. Свободные члены и коэффициенты при новых неизвестных в преобразованной системе соответственно примут вид $C_{mn} = c_{mn} (m/n)^{1-\alpha}$, $B_m = b_m m^{1-\alpha}$.

С целью асимптотической оценки (3.4) при $n \rightarrow \infty$ приходим к

$$\int_0^1 y^{2/3} \Phi\left(1, \frac{5}{3}; \pm i n y\right) dy$$

Пользуясь асимптотикой вырожденных функций Φ , появляющихся после интегрирования последнего [8], окончательно получаем, что C_{mn} при $n \rightarrow \infty$ убывает не медленнее $O(n^{-4/3})$.

Оценку (3.3)–(3.4) при больших значениях m проводим с помощью асимптотических выражений интегралов Фурье [10], в результате чего имеем $B_m, C_{mn} \sim m^{-\alpha}$ ($n=1, 2, \dots$).

Таким образом, при $0 < \alpha < 1/3$ найденные выше оценки по n и m позволяют для любого фиксированного δ выполнить условие регулярности системы во всех строках, начиная с $N+1$, поскольку ряд по n из $|C_{mn}|$ сходится для всех m , и его сумма при $m > N$ может быть сделана меньше единицы путем соответствующего выбора N . Удовлетворение требований квазирегулярности допускает нахождение решения рассматриваемой бесконечной системы методом редукции [9].

Пользуясь малостью параметра δ , свободные члены b_m для конечного числа m уравнений (3.2) можно вычислить точно, если заменить в интеграле (3.3) синус его аргументом и применить известные формулы [8], выражающие интегралы вида

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta F(\alpha, \beta, \gamma; zx) dx$$

через гипергеометрические ряды с аргументом, равным -1 , и обобщенные гипергеометрические ряды ${}_3F_2$ с аргументом 1. Значение первых выразим в Γ -функциях с помощью двух известных соотношений [11]. Для того чтобы ими воспользоваться, следует предварительно преобразовать эти гипергеометрические ряды путем повторного применения тождества

$$F(1, \beta, \gamma; z) = \frac{\gamma-1}{\beta-1} \frac{1}{z} [F(1, \beta-1, \gamma-1; z) - 1]$$

в справедливости которого не трудно убедиться. Аналогичным образом можно установить формулу для выражения через гипергеометрическую функцию обобщенного ряда ${}_3F_2(\alpha, \beta, 1; \gamma, 2; z)$ и правило его дифференцирования. Применение этого правила и последующий переход к пределу $z=1$ позволяют воспользоваться известной формулой для гипергеометрической функции в точке 1 [8] и выразить появляющиеся в b_m значения обобщенных рядов через Γ -функции.

В результате будем иметь для свободных членов системы

$$b_m = \frac{9}{2\pi} m \delta^{1/3} \left[\frac{4\sqrt{3}}{5\pi} \Gamma^2\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \right] = 0,0965\delta^{1/3} m \quad (3.5)$$

Почленное интегрирование степенного и гипергеометрических рядов F и Φ в (3.4) сводится к вычислению интегралов типа последнего в (2.4) при $u=1$, так что

главные члены $O(1)$ коэффициентов c_{mn} выразятся в виде рядов по вырожденным гипергеометрическим функциям с аргументом $\pm im\pi$, некоторые из которых представляются элементарно. Последний интеграл в c_{m1} вычисляется аналогично (3.3) и является малой величиной $O(\delta^{1/3})$. Достаточно быстрая сходимость рядов, образующих c_{mn} , позволяет без затруднений проводить численные расчеты.

Их выполнение для $m=1, 2, 3$ привело к следующему:

$$a_1=0,0204\delta^{1/3}; \quad a_2=0,1305\delta^{1/3}; \quad a_3=0,1142\delta^{1/3} \quad (3.6)$$

4. Остается найти масштабный множитель A из удовлетворения условия (1.4). Интегрируя для аппроксимации (1.1) формулу перехода [5] с плоскости годографа на плоскость течения вдоль участков пластинки OA и OB (фиг. 1), соответственно определим

$$x_A(\eta) = \frac{(\gamma+1)^{1/3}}{\rho_* a_*} \int_{\infty}^{\eta} \eta \psi_{\theta} |_{\theta=-\delta} d\eta, \quad x_B(\eta) = \frac{(\gamma+1)^{1/3}}{\rho_* a_*} \int_{\infty}^{\eta} \eta \psi_{\theta} |_{\theta=\pi-\delta} d\eta \quad (4.1)$$

Здесь ρ_* — плотность набегающего звукового потока, $x_A(0)$ и $x_B(0) = -l_1$ выражают расстояние застойной точки O от задней и передней (l_1) кромок обтекаемой пластинки.

Решение (2.1), будучи подставлено в (4.1), приводит к интегралам, которые могут быть взяты, если воспользоваться для функции Эйри зависимостью [11]

$$\lambda(t) = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt[3]{3}\Gamma(1/3)} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right)$$

$$-x_A(0) = \frac{4A(\gamma+1)^{1/3}}{\rho_* a_*} \frac{1}{\sqrt[3]{3}\Gamma(1/3)} \left\{ Q_1^{(c)}(0) - \frac{a_1+1}{\delta} Q_0^{(s)}(0) + \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt[3]{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}} \right\} \quad (4.2)$$

$$Q_{\mu}^{\{c\}}(\eta) = \xi^{2/3} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\mu} K_{2/3}(n\xi) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} (n, \delta); \quad \xi = \frac{2}{3}\eta^{3/2} \quad (4.3)$$

где K_{ν} — функция Макдональда.

В рядах, выражающих x_B , лишь добавляется множитель $\cos n\pi$. При этом достижение верхнего предела интегрирования (4.1) для сингулярной части решения, представленной величинами Q_{μ} , следует понимать в предельном смысле ($\eta \rightarrow 0$), поскольку эти ряды расходятся при $\eta=0$.

Указанные выше пределы были найдены [7, 12] в виде формул суммирования таких рядов, т. е. продолжения их в точку $\eta=0$. Применение последних в итоге дает

$$\begin{aligned} x_A(0) &= \sqrt[3]{3}A \frac{(\gamma+1)^{1/3}}{\rho_* a_*} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left\{ \left(\frac{4}{3} + a_1\right) \delta^{-4/3} + \frac{2}{\Gamma(1/3)} \times \right. \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \left[(2\pi)^{-4/3} \sigma_{2n}^{(4)} \frac{2n - a_1}{2n+1} \delta^{2n} - \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}} \right] - \frac{2}{3\sqrt[3]{(2\pi)^4}} \zeta\left(\frac{4}{3}\right) a_1 \left. \right\} \\ x_B(0) &= \sqrt[3]{3}A \frac{(\gamma+1)^{1/3}}{\rho_* a_*} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left\{ \frac{1}{6} R_{-4/3} + \frac{a_1+1}{2\delta} R_{-1/3} - \frac{2}{\Gamma(1/3)} \times \right. \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{(2\pi)^4}} \sigma_{2n}^{(4)} \left(R_{2n} - \frac{1}{\delta} \frac{a_1+1}{2n+1} R_{2n+1} \right) \right] - \\ &\left. - \frac{2}{3\sqrt[3]{(2\pi)^4}} \zeta\left(\frac{4}{3}\right) a_1 \right\}; \quad R_q = (\pi + \delta)^q + (-1)^q (\pi - \delta)^q \end{aligned}$$

Ограничиваясь главными членами по малому δ , сохраняем в $x_A(0)$ слагаемые с $\delta^{-4/3}$ и

$$\begin{aligned} x_B(0) &= -\sqrt[3]{3}A \frac{(\gamma+1)^{1/3}}{\rho_* a_*} \frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma(4/3)} \left\{ (2\pi)^{-4/3} \left[2^{1/3} \Gamma(4/3) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2n}^{(4)} \pi^{2n} \right] a_1 + \right. \\ &\left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}} \right\} \quad (4.4) \end{aligned}$$

так что в соответствии с принятой в (3.2) точностью по δ уравнение для A по (1.4) принимает вид $x_A(0) = l$.

Относительное расстояние l_1/l точки останова потока от передней кромки пластинки может быть оценено с помощью (4.4). Первый ряд этого выражения суммируется, если подставить в него интегральное представление $\zeta(s)\Gamma(s)$ из теории дзета-функции [11]. Свернув ряд под интегралом, приходим к

$$\int_0^{\infty} x^{1/2} \exp(-x) \operatorname{cth} x dx$$

который выражается по известной формуле [8] через обобщенную дзета-функцию $\zeta(4/3)\Gamma(4/3)$, сводящуюся к обычной функции Римана. В результате будем иметь

$$\frac{l_1}{l} = \frac{1}{2} \left[\frac{\zeta(4/3)}{\pi^{4/3}} \left(1 - \frac{1}{2^{4/3}} \right) a_1 + \frac{1}{\Gamma(4/3)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n^{1/3}} \right] \delta^{4/3}$$

или по (3.6) $l_1/l = 0,008\delta^{5/3}$ что, в частности, для $\delta = 13^\circ$ составляет 0,07%. Из численного решения задачи, проведенного [13] для этого случая конечно-разностным методом на базе точного уравнения Чаплыгина, известно значение 0,16%. Расхождение этих результатов объясняется недостаточностью аппроксимации Трикоми (1.1) вблизи передней кромки пластинки, где углы θ становятся значительными.

5. Отметим вырождение построенного выше решения при $\delta = 0$ в соответствии с тем, что для решения задачи в этом предельном случае нельзя применять метод годографа, поскольку вместе с исчезновением всех возмущений должна исчезать взаимно однозначная связь плоскостей (η, θ) и (x, y) . Действительно, рассмотрим решение (2.1) на звуковой линии AB (фиг. 2). Тогда при $\delta = 0$ ее участок AC вырождается, а вдоль участка CB решение представляется (2.2), если подставить найденный в разд. 4 множитель A . Разлагая функции $(\theta + 2\delta)^\nu$ по степеням $\delta/\theta < 1$ и учитывая $a_n = a_n^{(0)} \delta^{1/3}$ по (3.6), будем иметь в качестве главных членов следующее:

$$\begin{aligned} \psi(0, \theta) = & \frac{\rho_* a_* l}{[3(\gamma+1)]^{1/2} \Gamma(5/3)} \left\{ a_1^{(0)} \left[-\frac{1}{2} \Gamma(5/3) \left(\frac{\delta}{\theta} \right)^{5/3} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\delta}{2\pi} \right)^{5/3} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2n-1}^{(5)} \theta^{2n-1} \right] + \delta^{5/3} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(0)} \cos n\delta \sin n\theta \right\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Таким образом, при $\delta = 0$ последнее обращается в нуль на всем интервале CB , т. е. тождественно по θ , обеспечивая тем самым вырождение решения вдоль всей звуковой линии AB , а значит, во всей краевой области, ибо любая из линий тока $\psi = \text{const}$ пересекает звуковую линию $\eta = 0$.

Поведение найденного решения вблизи особой точки C описывается следующими главными по $\theta/\delta \ll 1$ членами:

$$\begin{aligned} \psi(0, \theta) = & \frac{\rho_* a_* l \delta^{-1/3}}{4[3(\gamma+1)]^{1/2}} \left\{ \left(1 - \frac{3}{4} a_1 \right) \left(\frac{\theta}{\delta} \right)^{-5/3} - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \left(1 + \frac{a_1}{4} \right) \left(\frac{\theta}{\delta} \right)^{-2/3} + 2^{1/3} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

которые с точностью до $\delta^{1/3}$ целиком совпадают с результатами приближенных подходов [7, 14].

В то же время решение [4, 5] соответственно дает

$$\psi(0, \theta) = \frac{\rho_* a_* l \delta^{-1/3}}{4 \sqrt{\pi} (\gamma+1)^{1/2}} \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(5/3)} \left\{ \left(\frac{\theta}{\delta} \right)^{-5/3} - \frac{19}{12} \left(\frac{\theta}{\delta} \right)^{-2/3} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^3 + \dots \right\} \quad (5.3)$$

отличаясь по указанной выше принципиальной причине уже в сингулярной части от построенного асимптотически по δ и с удовлетворением всех

граничных условий задачи. Различие выписанных в (5.2) и (5.3) членов составляет 6, 12, 42%.

Звуковые линии $BC(AC)$ (фиг. 1) находятся при помощи интегрирования формул перехода с плоскости годографа [5] вдоль $\eta=0$

$$x_0 = -[(\gamma+1)^{1/2}/\rho_* a_*] \psi_\eta, \quad y = (1/\rho_* a_*) \psi \quad (5.4)$$

Вблизи передней кромки координата y звуковой линии BC выражается непосредственно (5.1). В подобной форме можно представить и координату x , если воспользоваться произведенным выше суммированием ряда из (4.4). Таким образом, участок линии звука, соответствующий величинам углов $\theta=O(1)$, занимает область потока, размер которой характеризуется масштабом $l_1/l=O(\delta^{2/3})$.

Распределение скоростей $x_A(\eta)$ на поверхности пластинки находится из (4.1) в той же форме, что и (4.2). Причем главную часть этого распределения, выражаемую с точностью до $\delta^{1/2}$ совокупностью рядов

$Q_i^{(c)}(\eta) - (1/\delta)Q_0^{(s)}(\eta)$, удается просуммировать в замкнутом виде.

Для этой цели применяем интегральное преобразование Меллина точно таким же приемом, который был развит в [7, 12]

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) \zeta(s) ds; \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx \quad (5.5)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta t} K_\nu(\xi t) t^{s-1} dt =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} (2\xi)^\nu \Gamma(s+\nu) \Gamma(s-\nu)}{(\xi+\beta)^{s+\nu} \Gamma(s+1/2)} F\left(s+\nu, \nu+\frac{1}{2}, s+\frac{1}{2}; \frac{\beta-\xi}{\beta+\xi}\right) \quad (5.6)$$

$$\text{Res} > |\text{Re} \nu|, \quad \text{Re}(\xi + \beta) > 0$$

Каждый из рядов, получаемых после замены тригонометрических функций в (4.3) экспонентами, можно представить контурным интегралом типа (5.5) с правой частью (5.6) в качестве функции $F(s)$. В нашем случае $\beta = \pm i\delta$ и ξ , согласно обозначениям (4.3), гарантирует законность применения (5.6) для $\eta > 0$. Введенные контурные интегралы вычисляются по теории вычетов, если замкнуть контур полуокружностью бесконечно большого радиуса слева от него, чтобы обеспечить сходимость интеграла. Все полюсы подынтегральной функции (порождаемые Γ -функцией) оказываются слева от мнимой оси, за исключением полюса дзета-функции (в точке $s=1$). Именно он для $\xi \sim \delta$ дает вычет, главный по малому δ , поскольку все остальные содержат его положительные степени и должны быть опущены вместе с $O(\delta^{1/2})$. В результате рассматриваемый главный член распределения скоростей примет вид

$$\begin{aligned} \frac{x_A}{l} &= \frac{4}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{\xi}{\delta}\right)^{1/2} \left\{ \frac{10}{27} F\left(\frac{8}{3}, \frac{7}{6}, \frac{5}{2}; q_0\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{\xi i}{\delta}\right) F\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}; q_0\right) \right\} \\ q_0 &= \frac{1-i\xi/\delta}{1+i\xi/\delta} \end{aligned}$$

Если с помощью соотношений для гипергеометрических функций перейти к аргументу $1-r_0^2=1-4q_0/(1+q_0)^2=-(\xi/\delta)^2$ и затем воспользоваться

ся преобразованием Куммера, то можно все гипергеометрические ряды свести к алгебраическим функциям и представить формулу распределения скоростей на пластинке в окончательном виде

$$\frac{x_A}{l} = \frac{\sqrt[3]{2}}{8r_0} \left[(r_0+1)^{3/2} \left(3 - \frac{2}{r_0} + \frac{3}{r_0^2} \right) - (r_0-1)^{3/2} \left(3 + \frac{2}{r_0} + \frac{3}{r_0^2} \right) \right] + O(\delta^{3/2})$$

где последующие члены выражаются через коэффициенты a_n . Первый член совпадает с распределением, найденным в [14] из приближения автомодельными решениями (1.1) без удовлетворения краевых условий задачи на части границы OBD и AE , которые, как было видно выше, служат именно для определения коэффициентов a_n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. 443 с.
2. Баранцев Р. Г. Лекции по трансзвуковой газодинамике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1965. 216 с.
3. Франкль Ф. И. Два газодинамических приложения краевой задачи Лаврентьева - Бицадзе. - Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. и естеств. н., 1951, № 11, с. 3-7.
4. Guderley G. The flow over a flat plat with a small angle of attack at Mach number 1. - J. Aeronaut. Sci., 1954, v. 21, № 4, p. 261-274.
5. Гудерлей К. Г. Теория околзвучковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 421 с.
6. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
7. Асланов С. К. Движение со скоростью звука профиля, имеющего плоскую нижнюю сторону. - Тр. Куйбыш. авиац. ин-та, 1961, вып. 12, с. 259-273.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
9. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Гостехиздат, 1952. 695 с.
10. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962. 127 с.
11. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
12. Асланов С. К. Сопротивление клиновидного профиля, обтекаемого потоком звуковой скорости. - ПММ, 1956, т. 20, № 6, с. 756-761.
13. Vincenti W. G., Wagoner C. B., Fisher N. H. Jr. The flow over a flat plate at angle of attack at free-stream Mach number 1. - Actes 9, Congrès Intern. Mec. Appl. T. 2, Bruxelles, 1957, p. 5-14.
14. Асланов С. К. Приближенное решение задачи звукового обтекания плоской поверхности профиля. - Изв. вузов. Авиац. техн., 1982, № 2, с. 8-12.

Одесса

Поступила в редакцию
8.IV.1986