**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1987**

УДК 532.592

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН ВАН КАМПЕНА — КЕЙЗА

САЗОНОВ И. А.

Рассчитан отклик жидкости со сдвиговым течением, имеющим слабо искривленный профиль, на воздействие внешней вертикальной силы ударного типа, гармонической по горизонтальной координате и сосредоточенной в узком слое. Рассмотрены случаи идеальной и вязкой жидкости.

В [1] найдены малые свободные гармонические колебания невязкой несжимаемой жидкости с линейным профилем сдвигового течения. В безграничной жидкости эти колебания описываются следующими формулами:

$$u=\exp(-|k(z-z_0)|+ikx-ikV(z_0)t)$$
$$v=-i\,\mathrm{sign}(k(z-z_0))u$$
$$p=(i/k)(1+|k(z-z_0)|)V'u \tag{1}$$
$$\Omega=\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}=-2ik\delta(z-z_0)\exp(ikx-ikV(z_0)t)$$

Здесь $V(z)$ — профиль основного течения, u и v — вертикальная и горизонтальная компоненты малых возмущений скорости, p и Ω — давление и завихренность в этих возмущениях, k — горизонтальное волновое число. В [2] подобные колебания названы волнами Ван Кампена — Кейза (Ван Кампен получил аналогичные решения, описывающие колебания плазмы [3]). В [1] показано также, что в жидкости с линейным профилем течения могут существовать свободные гармонические колебания только вида (1). Заметим, что колебания (1) получаются после воздействия на жидкость вертикальной силы

$$f_z=(2/k)\exp(ikx)\delta(z-z_0)\delta(t) \tag{2}$$

Ниже будут получены решения, аналогичные (1), но справедливые в жидкости со слабо искривленным профилем течения, как предел эволюционной задачи с начальным воздействием (2). Затем подобная задача будет решена для вязкой жидкости. В обоих случаях жидкость будем считать безграничной.

Отклик невязкой несжимаемой безграничной жидкости на воздействие (2) описывается линеаризованным уравнением гидродинамики

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+ikV\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k^2\right)u-ik\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}u=-2k\delta(z-z_0)\delta(t) \tag{3}$$

с условиями $u\to0$ при $z\to\pm\infty$; $u\equiv0$ при $t<0$. Множитель $\exp(ikx)$ в обеих частях уравнения опущен.

Перейдем к системе координат, движущейся вместе со слоем $z=z_0$: $x_c=x-V(z_0)t$, $z_c=z$, и к безразмерным переменным $\zeta=k(z-z_0)$, $\tau=V'(z_0)t$ (штрихом обозначено дифференцирование профиля скорости по z). Тогда уравнение (3) примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+i\beta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}-1\right)u-i\beta''u=-2\delta(\zeta)\delta(\tau) \tag{4}$$

$$\eta(\zeta)=k[V(z(\zeta))-V(z_0)]/V'(z_0), \qquad \beta''=\frac{\partial^2\beta}{\partial\zeta^2}$$

Пусть выполняется условие слабой кривизны профиля скорости $|V''/kV'|\ll 1$. Разложим функции β и β'' в ряд Тейлора и оставим в них первые члены разложения. Тогда из (4) получим приближенное уравнение, справедливое в области $|\zeta|\ll|\alpha|^{-1}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+i\zeta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}-1\right)u-i\alpha u=-2\delta(\zeta)\delta(\tau)$$

$$\alpha=\frac{V''(z_0)}{kV'(z_0)} \tag{5}$$

Выполним преобразование Фурье по вертикальной координате ζ. В результате из (5) получим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\varkappa}\right)(\varkappa^2+1)u_*+i\alpha u_*=2\delta(\tau), \qquad u_*(\varkappa)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(\zeta)e^{-i\varkappa\zeta}d\zeta$$

Его решение удобно искать в виде

$$u_*(\varkappa,\tau)=\frac{2}{\varkappa^2+1}\frac{g(\varkappa)}{g(\varkappa+\tau)}\theta(\tau) \tag{6}$$

где $g(\varkappa)$ — функция одной переменной, для которой получается линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$g'-i\alpha(1+\varkappa^2)^{-1}g=0$$

Подставляя решение этого уравнения в (6), а затем производя обратное преобразование Фурье, получим интегральное представление для поля скоростей

$$u(\zeta,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\varkappa-i}{\varkappa+i}\frac{\varkappa+i+\tau}{\varkappa-i+\tau}\right]^{\alpha/2}\frac{\exp(i\varkappa\zeta)d\varkappa}{1+\varkappa^2}$$

Для того чтобы проанализировать это выражение, удобно сначала вычислить завихренность поля

$$\Omega=i\left(\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}-1\right)u=-\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\varkappa-i}{\varkappa+i}\frac{\varkappa+i+\tau}{\varkappa-i+\tau}\right]^{\alpha/2}\exp(i\varkappa\zeta)d\varkappa \tag{7}$$

Разложим подынтегральную функцию в (7) в ряд по α ($x^\alpha=1+\alpha\ln x+{}^1/_2\alpha^2\ln^2x+\ldots$) и учтем только члены нулевого и первого порядка малости. Выполняя после этого почленное интегрирование, получим

$$\Omega=-2i\delta(\zeta)+i\alpha\zeta^{-1}\exp(-|\zeta|)(1-\exp(-i\zeta\tau)) \tag{8}$$

Применим к (8) оператор, обратный $i(\partial^2/\partial\zeta^2-1)$ и удовлетворяющий условию убывания при $\zeta\to\pm\infty$

$$u(\zeta,\tau)=-\frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-|\zeta-\xi|)\Omega(\xi,\tau)d\xi \tag{9}$$

Выполняя интегрирование, получим выражение для поля скоростей

$$u(\zeta,\tau)=\exp(-|\zeta|)(1+{}^1/_2\alpha j\{\ln(1-{}^1/_2 ij\tau)+[\mathrm{Ei}(-i\zeta\tau)-$$
$$-\ln(i\zeta\tau)-\mathbf{C}]+\exp(2|\zeta|)(\mathrm{Ei}(-|2\zeta|)-\mathrm{Ei}(-|2\zeta|-i\zeta\tau))\}) \tag{10}$$

где $j = \operatorname{sign}\zeta$, $\mathrm{Ei}(x)$ — интегральная экспонента, **C** — постоянная Эйлера. Ветви функций, стоящих в квадратных скобках, следует выбирать таким образом, чтобы выражение в квадратных скобках было однозначной функцией, представимой рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i\zeta\tau)^n}{n\cdot n!}.$$

Ветви остальных неоднозначных функций — так, чтобы при $\tau=0$ они давали вещественные значения.

В области $|\zeta|\gg\max(1,\tau^{-1})$ решения уравнения (4) можно найти методом плавных возмущений, «сшивая» их с асимптотиками (10), справедливыми в области $\max(1,\tau^{-1})\ll|\zeta|\ll|\alpha|^{-1}$. Расчет дает

$$u(\zeta,\tau)=\exp\left(-|\zeta|-\frac{i}{2}\int_j^{\zeta}\frac{\beta''}{\beta}d\zeta\right)\left(1-\frac{\alpha j\mathbf{C}}{2}-\frac{\alpha i\pi}{2}\right)\left(1+\frac{4}{\tau^2}\right)^{\alpha j/4} \tag{11}$$

В исходной системе координат отклик жидкости на воздействие (2) можно записать следующим образом:

$$u(x,z,t)=F[k(z-z_0),\,tV'(z_0)]\exp(ikx-ikV(z_0)t)$$

где $F(\zeta,\tau)$ выражается формулой (10) при $|\zeta|\ll|\alpha|^{-1}$ и формулой (11) при $|\zeta|\gg\max(1,\tau^{-1})$. При $t\to\infty$ это решение стремится к гармонической волне, движущейся со скоростью слоя $z=z_0$

$$u(x,z,t)=F[k(z-z_0),+\infty]\exp(ikx-ikV(z_0)t)$$

$$\begin{gathered}F(\zeta,+\infty)=e^{-|\zeta|}[1-{}^1\!/_2\alpha j(\ln|2\zeta|+e^{2|\zeta|}\,\mathrm{Ei}(-|2\zeta|)-C)-{}^1\!/_2\alpha i\pi],\\ |\zeta|\ll|\alpha|^{-1}\\ F(\zeta,+\infty)=\exp\left(-|\zeta|-\frac{i}{2}\int_j^{\zeta}\frac{\beta''}{\beta}d\zeta\right)\left[1-\frac{\alpha}{2}(jC-i\pi)\right],\qquad |\zeta|\gg1\end{gathered} \tag{12}$$

$$F(\zeta,+\infty)=\lim_{\tau\to+\infty}F(\zeta,\tau)$$

Поле (12) является решением однородного уравнения Рэлея $[\omega-kV(z)](u''-k^2u)-kV''u=0$ при $\omega=kV(z_0)$. С другой стороны, поле (12) удовлетворяет принципу причинности, поскольку является пределом задачи с начальным воздействием. Возмущение (12) можно считать волной Ван Кампена — Кейза в жидкости со слабо искривленным профилем течения. Так же как и в жидкости с линейным профилем, при любом фиксированном k имеется континуум таких решений, поскольку все они могут быть параметризованы координатой их критического слоя $z=z_0$, пробегающей непрерывный набор значений.

Наличие малой кривизны профиля течения слабо меняет поле скоростей (12) в сравнении с (1) в количественном отношении (появляется малая добавка порядка α), но меняет характер особенности поля в критическом слое: вместо скачка производной $\partial u/\partial z$ появляется логарифмическая особенность типа $\alpha(z-z_0)\ln|z-z_0|$.

В жидкости с искривленным профилем течения воздействие (2) возбуждает не одну волну (12), а целый набор таких волн с критическими слоями в разных точках. Благодаря градиенту течения все эти волны распространяются с разными скоростями и интерферируют между собой. Поэтому вклад волн с критическими слоями в точках $z\neq z_0$ в общую картину поля скоростей с течением времени становится незаметным всюду, кроме непрерывно сужающегося как t^{-2} слоя. В этом слое, определяемым неравенством $|z-z_0|\leqslant(tV'(z_0))^{-2}k^{-3}$, остается существенным вклад волн с критическими слоями в точках $z\neq z_0$. Их влияние приводит к тому, что в любой конечный момент времени суммарное поле скоростей в этом слое не будет иметь логарифмической особенности, которую имеет каждая волна по отдельности. Поле завихренности в отличие от поля скоростей при $t\to\infty$ не стремится к стационарному пределу (см. (8)). Для поля завихренности вклад волн с критическими слоями в точках $z\neq z_0$ существен всегда при всех z.

Теперь учтем вязкость. Добавим в уравнение (5) диссипативные члены, тогда оно примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+i\zeta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}-1\right)u-i\alpha u-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}-1\right)^2u=-2\delta(\zeta)\delta(\tau),\qquad R=\frac{V'(z_0)}{\nu k^2} \tag{13}$$

где R — число Рейнольдса. Интегральное представление для решений уравнения (13) опять найдем методом преобразования Фурье по вертикальной координате

$$u(\zeta,\tau)=\exp\left(-\frac{{}^1/_{12}\tau^3+\tau}{R}\right)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\varkappa-i}{\varkappa+i}\,\frac{\varkappa+i+\tau}{\varkappa-i+\tau}\right]^{\alpha/2}\times$$

$$\times\exp\left[i\varkappa\zeta-\frac{\tau\varkappa}{R}(\tau-\varkappa)\right]\frac{d\varkappa}{1+\varkappa^2} \tag{14}$$

Рассмотрим сначала случай линейного профиля скорости течения ($\alpha=0$). Вычислим поле завихренности

$$\Omega=i\sqrt{\frac{R}{\pi\tau}}\exp\left[-\frac{R\zeta^2}{4\tau}-\frac{i\zeta\tau}{2}-\frac{\tau^3}{12R}-\frac{\tau}{R}\right] \tag{15}$$

Из этой формулы видно, что под действием вязкости завихренность, первоначально сосредоточенная в слое $z=z_0$, расплывается по закону диффузии с добавлением осциллирующего множителя $\exp\left(-{}^1/_2 i\zeta\tau\right)$, обусловленного градиентом течения. Со временем амплитуда возмущения (15) затухает по закону $\exp\left[-(\tau^3/12+\tau)/R\right]$ или в размерных переменных $\exp\left\{-t^3\nu[kV'(z_0)]^2/12-t\nu k^2\right\}$. Характерное время существования возмущения при $R\gg1$ оценивается величиной $t_\nu=\nu^{-1/3}[kV'(z_0)]^{-2/3}$, что совпадает с оценкой, полученной в [2] с помощью качественных рассуждений.

Применяя к (15) интегральную операцию (9), получим выражение для поля скоростей

$$u(\zeta,\tau)=\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\tau^3}{12R}-\frac{i\tau^2}{R}-\zeta\right)\operatorname{erfc}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{\tau}}\zeta+\left(1-\frac{i\tau}{2}\right)\sqrt{\frac{\tau}{R}}\right]+$$

$$+\frac{1}{}\exp\left(-\frac{\tau^3}{}+\frac{i\tau^2}{}+\zeta\right)\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{}\sqrt{\frac{R}{}}\zeta+\left(1+\frac{i\tau}{}\right)\sqrt{\frac{\tau}{}}\right] \tag{16}$$

где $\operatorname{erfc}(x)$ — дополнительная функция ошибок. Анализ выражения (16) показывает, что при выполнении неравенств $\tau\ll R^{-1/3}$, $|\zeta|\gg(\tau/R)^{1/2}$, которые в размерных переменных принимают вид

$$t\ll t_\nu,\qquad |z-z_0|\gg z_\nu=(t\nu)^{1/2} \tag{17}$$

где z_ν — толщина вязкого слоя, вязкость слабо влияет на форму возмущения (соответствующие поправки имеют относительный порядок τ^2/R), но приводит к затуханию возмущения как целого пропорционально $\exp\left(-{}^1/_3\tau^3/R\right)$.

Если профиль основного течения имеет кривизну, то к решениям (15) и (16) добавятся члены порядка α. Обозначим их через Ω_1 и u_1. Добавочную завихренность Ω_1 запишем в виде

$$\Omega_1 = i\alpha \exp\left[-(\tau^3/3+\tau)/R\right] Y(\zeta+i\tau^2/R,\ \tau/R,\ \tau)$$

$$Y(\eta,\gamma,\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln\left[\frac{\varkappa+i}{\varkappa-i}\,\frac{\varkappa+i+\vartheta}{\varkappa-i+\vartheta}\right]\exp(-\gamma\varkappa^2+i\varkappa\eta)\,d\varkappa \qquad (18)$$

Учитывая, что $Y(\eta,\ \gamma,\ 0)=0$, представим $Y(\eta,\ \gamma,\ \tau)$ в виде интеграла

$$Y(\eta,\gamma,\tau) = \int\limits_0^\tau Z(\eta,\gamma,\vartheta)\,d\vartheta, \qquad Z(\eta,\gamma,\vartheta) = \frac{\partial Y}{\partial\vartheta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\varkappa+i+\vartheta} - \frac{1}{\varkappa-i+\vartheta}\right]\exp(-\gamma\varkappa^2+i\varkappa\eta)\,d\varkappa \qquad (19)$$

Выполняя почленное интегрирование и используя результаты [4], получим выражение для Z в явном виде

$$Z(\eta,\ \gamma,\ \vartheta) = -{}^1/_2 i \exp\left[\gamma(1-i\vartheta)^2+(1-i\vartheta)\eta\right]\times$$
$$\times \operatorname{erfc}\left[{}^1/_2\eta\gamma^{-1/2}+\gamma^{1/2}(i\vartheta+1)\right] - {}^1/_2 i \exp\left[\gamma(1+i\vartheta)^2-(1+i\vartheta)\eta\right]\times$$
$$\times \operatorname{erfc}\left[-{}^1/_2\eta\gamma^{-1/2}+\gamma^{1/2}(i\vartheta-1)\right] \qquad (20)$$

Формулы (18), (19), (20) дают интегральное представление для добавочной завихренности Ω_1. Для того чтобы найти поправку к полю скорости u_1, вызванную наличием кривизны, необходимо подействовать на Ω_1 интегральным оператором (9). Анализ интегрального представления для u_1 показывает, что если выполняются неравенства (17), то и при наличии кривизны профиля скорости вязкость слабо влияет на форму возмущения (соответствующие поправки также имеют относительный порядок τ^2/R), но приводит к затуханию возмущения как целого пропорционально $\exp(-{}^1/_3\tau^3/R)$.

В заключение отметим, что если $\nu\to 0$, а t ограничено сверху, то формулы, описывающие возмущения в вязкой жидкости, переходят в соответствующие формулы, полученные для идеальной жидкости.

Автор благодарит Г. И. Баренблатта, М. А. Миронова и С. А. Рыбака за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Case K. M.* Stability of inviscid plan conette flow.— Phys. Fluids, 1960, v. 3, № 2. p. 143—148.
2. *Тимофеев А. В.* Колебания неоднородных течений плазмы и жидкости.— Успехи физ. наук, 1970, т. 102, № 2, с. 185—210.
3. *Van Kampen N. G.* On the theory of stationary waves in plasmas.— Physica, 1955, v. 21, № 12, p. 949—963 (Рус. перев.: Ван Кампен. К теории стационарных волн в плазме.— В сб.: Колебания сверхвысоких частиц в плазме. М.: Изд-во иностр. лит., 1961, с. 37—56).
4. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Москва

Поступила в редакцию 20.III.1986