МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1987

УДК 532.591

О НЕКОТОРЫХ ЭФФЕКТАХ ДИФФУЗИИ СОЛИТОНОВ ВНУТРЕННИХ ВОЛН НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

МАРЧЕНКО А. В.

Асимптотическое описание слабонелинейных волн, распространяющихся на неоднородном фоне, существенно различается в зависимости от соотношения между характерной длиной волны и характерным размером неоднородности. Если характерный размер неоднородности в некоторой точке траектории элемента волнового фронта равен характерной длине волны, то волны в окрестности этой точки испытывают сильное рассеяние. Так как дисперсионные и нелинейные члены деформируют решение в течение достаточно длительного промежутка времени, нелинейные и дисперсионные эффекты, будучи слабыми, не успевают накопиться за характерное время диффузии на неоднородности фона. После изучения процесса диффузии волны, который можно описать в линейном приближении с пренебрежением дисперсии среды, необходимо разрешить проблему дальнейшей эволюции прошедших и отраженных волн.

В статье рассматривается распространение нелинейных внутренних волн на границе раздела двух тяжелых жидкостей в случаях, когда соответствующие нелинейные уравнения могут быть решены по схеме обратной задачи рассеяния. Эта схема применяется к конкретным начальным данным, вытекающим из постановки задачи.

В первой части статьи выводится уравнение Кортевега – де Вриза для внутренних волн в случае, если глубины двух слоев жидкости сравнимы по величине. Это уравнение является частным случаем уравнения КдВ полученного в статье [1] для длинных волн в непрерывно стратифицированной жидкости. Во второй части статьи исследуется рассеяние внутренней волны неоднородностями фона и асимптотическое поведение отраженной и преломленной волн. Эффект рассеяния исследуется в линейной постановке, что дает начальные данные в задаче Коши для уравнения КдВ. Задача Коши для уравнения КдВ с такими начальными данными была исследована в [2] применительно к поверхностным волнам в тяжелой жидкости. Автор использует результаты этой работы для изучения асимптотического поведения внутренних волн в двухслойной жидкости.

1. Рассмотрим потенциальные движения двухслойной тяжелой жидкости, находящейся под твердым покрытием, которое моделирует лед. Такие движения описываются системой уравнений Лапласа с граничными условиями на дне (непротекание), под твердым покрытием (непротекание) и на границе раздела двух жидкостей (условие равенства давлений в жидкости на границе их раздела и кинетическое условие, которое заключается в том, что частицы жидкости, находящиеся на границе раздела в начальный момент времени, остаются лежать на ней в процессе движения)

$$\begin{gathered}
\mu\Phi_{ixx}+\Phi_{izz}=0 \\
i=1,\quad 1+\varepsilon\eta-\delta<z<1,\qquad i=2,\quad 0<z<1+\varepsilon\eta-\delta \\
\Phi_{iz}=0,\quad i=1,\quad z=1,\quad i=2,\quad z=0 \\
\eta_t+\varepsilon\eta_x\Phi_{ix}=\frac{1}{\mu}\Phi_{iz},\qquad z=1+\varepsilon\eta-\delta \\
\varkappa\left(\Phi_{1t}+\frac{g}{g'}\eta+{}^1/_2\varepsilon\left(\Phi_{1x}^2+\frac{1}{\mu}\Phi_{1z}^2\right)\right)=\Phi_{2t}+\frac{g}{g'}\eta+{}^1/_2\varepsilon\left(\Phi_{2x}^2+\frac{1}{\mu}\Phi_{2z}^2\right) \\
z=1+\varepsilon\eta-\delta
\end{gathered}\tag{1.1}$$

$$x=\lambda x', \quad t=\frac{\lambda}{\sqrt{g'H}}t', \quad z=Hz', \quad \eta=a\eta'$$

$$\Phi=\frac{g'a\lambda}{\sqrt{g'H}}\Phi_i', \quad i=1,2$$

$$\varkappa=\frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad \delta=\frac{H_1}{H}; \quad g'=g(1-\varkappa); \quad H=H_1+H_2$$

$$\varepsilon=\frac{a}{H_1} \quad \mu=\left(\frac{H_1}{\lambda}\right)^2$$

где x — горизонтальная координата, z — вертикальная координата, t — время, η — отклонение поверхности раздела от положения равновесия, Φ_i — потенциал i-слоя, H_i — глубина i-слоя, ρ_i — плотность i-слоя.

Предположим, что $\varepsilon \ll 1$, $\mu \ll 1$. В уравнениях индекс штрих опущен. Отметим, что при выборе характерной величины потенциалов существенно использовалась сравнимость толщины верхнего и нижнего слоев жидкости по величине. Будем искать решение системы (1.1) в виде

$$\Phi_i=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z+i-2)^{2k}}{(2k)!}\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}f_i\mu^k$$

Выражения для Φ_i тождественно удовлетворяют уравнениям Лапласа и граничным условиям на дне и под твердым покрытием.

Нулевое приближение (1.1) по ε, μ дает следующую систему уравнений:

$$\eta_t=-(1-\delta)f_{2xx}=\delta f_{1xx}; \quad \varkappa f_{1t}-f_{2t}=\eta \tag{1.2}$$

Решением (1.2) является любая функция $\eta(x, t)$ вида

$$\eta=\eta(x-vt); \quad v=\pm\sqrt{\frac{\delta(1-\delta)}{\varkappa(1+\delta)+\delta}}$$

Различные знаки скорости соответствуют волнам, бегущим вправо и влево. Введем обозначения: $f_{1x}=w_1$, $f_{2x}=w_2$.

Из (1.2) следуют соотношения:

$$w_i=\alpha_i\eta+O(\varepsilon, \mu); \quad \partial_t=-v\partial_x+O(\varepsilon, \mu)$$

$$\alpha_1=-\frac{v}{\delta}; \quad \alpha_2=\frac{v}{1-\delta}$$

В следующем приближении по ε, μ из (1.1) получим

$$\eta_t+[(\varepsilon\eta+i-1-\delta)w_i]_x-{}^1/_6\mu(i-1-\delta)^3w_{ixxx}=0$$

$$\varkappa\left(w_{1t}-\frac{1}{2}\mu\delta^2w_{1xxt}+\frac{g}{g'}\eta_x+\varepsilon w_1w_{1x}\right)=$$

$$=w_{2t}-\frac{1}{2}\mu(1-\delta)^2w_{2xxt}+\frac{g}{g'}\eta_x+\varepsilon w_2w_{2x}. \tag{1.3}$$

Решение этой системы уравнений будем искать в виде

$$w_i=\alpha_i\eta+\varepsilon a_i\eta^2+\mu b_i\eta_{xx}+O(\varepsilon^2, \mu^2, \varepsilon\mu) \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.3), получим, что для того, чтобы система (1.3) была совместна, необходимо, чтобы a_1, b_1, a_2, b_2 удовлетворяли следующей системе линейных алгебраических уравнений, а $\eta(x, t)$ удовлетворяло уравнению КдВ:

$$\alpha_2+(1-\delta)a_2=\alpha_1-\delta a_1=\frac{-2\rho_1va_1+2\rho_2va_2+\rho_1\alpha_1^2-\rho_2\alpha_2^2}{2(\rho_1\alpha_1+\rho_2\alpha_2)}$$

$$(1-\delta)b_2-\alpha_2\frac{(1-\delta)^3}{6}=\frac{\delta^3}{6}\alpha_1-\delta b_1=$$

$$=\frac{(-2\rho_1 v b_1+2\rho_2 v b_2+\rho_1\delta^2\alpha_1 v-\rho_2(1-\delta)^2\alpha_2 v}{\rho_1\alpha_1-\rho_2\alpha_2}$$

$$\eta_t+v\eta_x+\varepsilon N\eta\eta_x+\mu K\eta_{xxx}=0 \tag{1.5}$$

$$N=\frac{v(\delta^2-\varkappa(1-\delta)^2)}{2\delta(1-\delta)(\varkappa+\delta(1-\varkappa))};\quad K=\frac{v(1-\delta)\delta(1+\delta(\varkappa-1))}{6(\varkappa+\delta(1-\varkappa))}$$

Отсюда следует, что $\operatorname{sign}K=\operatorname{sign}v$; $\operatorname{sign}N=\operatorname{sign}vf$, где $f=\delta^2-\varkappa(1-\delta)^2$. Если $f\approx\varepsilon$, то ясно, что линейные эффекты будут слабыми и их в данном приближении можно не учитывать. В этом случае волновой пакет под влиянием дисперсии будет с течением времени расширяться и его амплитуда будет уменьшаться пропорционально $1/\sqrt{t}$ (см. [3]). Если $\varkappa\approx1$, то $f=0$ при $\delta={}^1/_2$. При переходе через $\delta=1/2$ N будет менять знак. Будем искать решение уравнения (1.5) в виде $\eta=\eta(x-ct)$, $\eta\to0$, $|x-ct|\to\infty$. Тогда для η получим

$$\eta=\frac{3(c-v)}{\varepsilon N}\operatorname{ch}^{-2}\frac{\sqrt{c-v}}{2\sqrt{2}\,\mu K}(x-ct),\qquad KN>0$$

Отсюда следует, что при $KN>0$ уравнение (1.5) содержит решения в виде выпуклых солитонов, а при $KN<0$ – в виде вогнутых солитонов. После замены координат уравнение (1.5) приведется к виду

$$x'=ax-ct;\quad \eta=b\eta',\quad b=\frac{6}{\varepsilon N}\sqrt[3]{K\mu};\quad a=\frac{1}{\sqrt[3]{K\mu}}=\frac{c}{v}$$

$$\eta_t{}'+6\eta'\eta_{x'}{}'+\eta'_{x'x'x'}=0 \tag{1.6}$$

2. Рассмотрим в линейной постановке задачу о прохождении внутренней волны через резкий скачок параметров задачи (плотностей и глубин слоев) при $x=0$. Условия на скачке запишутся следующим образом:

$$[\delta w_1]_{x=0}=0,\qquad [(1-\delta)w_2]_{x=0}=0,\qquad [(\rho_1-\rho_2)\eta]_{x=0}=0$$

Резкое изменение параметров задачи может происходить за счет перемены глубины жидкости или толщины льда и за счет изменения солености слоев жидкости.

Представляя падающую на скачок, отраженную от скачка и прошедшую через скачок волны соответственно в виде

$$\eta=\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)\exp i\omega\left(t+\frac{x}{v}\right)d\omega,\qquad \eta_R=\int_{-\infty}^{\infty}Rf(\omega)\exp i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)d\omega$$

$$\eta_T=\int_{-\infty}^{\infty}Tf(\omega)\exp i\omega\left(t+\frac{x}{v'}\right)d\omega$$

получим

$$T=2\left(\frac{v'}{v}+\frac{\rho_2'}{\rho_2}\frac{\varkappa'-1}{\varkappa-1}\right)^{-1}$$

$$R=\frac{v\rho_2'(\varkappa'-1)-v'\rho_2(\varkappa-1)}{v\rho_2'(\varkappa'-1)+v'\rho_2(\varkappa-1)} \tag{2.1}$$

Отсюда видно, что $T>0$ всегда, а R может менять знак. Пусть $\rho_2=\rho_2'$ (все параметры за скачком будут обозначаться буквами со штрихом), тогда $R<0$, если выполняется следующее условие:

$$\frac{\delta(1-\delta)(\varkappa'(1-\delta')+\delta')}{\delta'(1-\delta')(\varkappa(1-\delta)+\delta)}<1 \tag{2.2}$$

Из (2.1) следует, что если $\varkappa=\varkappa'\approx 1$, то $R<0$ при $\delta'\in(\delta,\ 1-\delta)$. Если $\delta=\delta'$, то при $\varkappa'<\varkappa$ $R<0$, а при $\varkappa'>\varkappa$ $R>0$.

Безразмерное время, за которое будет происходить рассеяние волны на скачке, равно $T_0\approx 1/v$, время, за которое при распространении волны проявляются нелинейность и дисперсия, равно $T_h\approx 1/\varepsilon$. Отсюда видно, что $T_0T_n^{-1}\approx O(\varepsilon)$, т. е. можно считать, что при рассеянии волны на скачке параметров задачи нелинейность и дисперсия не оказывают существенного влияния. Эволюция отраженного и прошедшего возмущений будет описываться уравнением (1.6) с начальными условиями соответственно

$$\eta_R(x,0)={}^1/_2R\alpha_1\,\mathrm{ch}^{-2}({}^1/_2\sqrt{\alpha_1}x)$$

$$\eta_T(x,0)=\frac{1}{2}T\alpha_1\sqrt[3]{\frac{K}{K'}}\frac{N'}{N}\mathrm{ch}^{-2}\frac{\sqrt{\alpha_1}}{2}\sqrt[3]{\frac{K}{K'}}x$$

Количество солитонов N в отраженной и прошедшей волнах равно (см. [2])

$$N_R=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+8R}\right];\qquad N_T=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+8T\frac{N'K'}{NK}}\right]$$

Солитонов не будет при $R<0$ в отраженной, а при $N'<0$ в прошедшей волнах. Из (2.2) следует, что если $H_2=H_2'$; $\varkappa=\varkappa'$, $H_1\leqslant H_2$, то при $H_1'\geqslant H_2^2/H_1$ солитоны образуются с течением времени из отраженного возмущения, амплитуда же прошедшей волны будет затухать со временем пропорционально $1/\sqrt{t}$. При $H_1'\in(H_2,\ H_2^2/H_1)$ и отраженное и прошедшее возмущения будут затухать со временем пропорционально $1/\sqrt{t}$. При $H_1'\in(H_1,\ H_2)$ солитоны образуются в прошедшем возмущении, отраженное возмущение затухает пропорционально $1/\sqrt{t}$. При $H_1'\leqslant H_1$ солитоны будут присутствовать как в отраженной, так и в прошедшей волне. Аналогичные случаи отражения волны можно выделить при $H_1'=H_1$, $\varkappa=\varkappa'$, $H_1\geqslant H_2$.

Отметим, что если $H_1=H_1'$, $H_2=H_2'$, $\rho_1'<\rho_1$, то в отраженной волне солитонов не будет, а если $\rho_1'>\rho_1$, то солитоны образуются и в отраженной и в прошедшей волнах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пелиновский Е. Н., Раевский М. А., Шаврацкий С. Х.* Уравнение Кортевега – де Вриза для нестационарных внутренних волн в неоднородном океане.– Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1977, т. 13, № 3, с. 325–328.
2. *Динариев О. Ю., Сибгатуллин Н. Р.* О некоторых эффектах диффузии солитонов над неровным дном.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 5, с. 94–102.
3. *Бхатнагар П. Л.* Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир, 1983. 136 с.

Москва

Поступила в редакцию 3.IV.1986