

УДК 532.591

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

ЗАВОЛЬСКИЙ Н. А.

При исследовании полей линейных внутренних гравитационных волн, вызванных локализованными источниками в произвольно стратифицированной жидкости, широко используются дисперсионные соотношения и собственные функции основной краевой задачи (см., например, [1–5]). Вертикальное распределение частоты Брейта – Вайсяля $N(z)$ и глубина жидкости H полностью определяют дисперсионные зависимости частоты ω свободной гармонической волны от пространственного волнового числа k : $\omega = \omega_n(k)$ и вертикальные собственные моды $W_n(k, z)$.

Наиболее мощные дуги волн (волн Эйри) могут возникать в окрестностях локальных максимумов групповой скорости [1, 2]. Длинные внутренние волны имеют максимальную групповую скорость и асимптотика полей линейных внутренних гравитационных волн на фронтах каждой моды выражается через функцию Эйри и ее квадрат в случае движущегося и неподвижного источников соответственно [2]. Особый интерес в связи с этим представляют случаи немонотонной зависимости групповой скорости от волнового числа, так как дуги волн Эйри могут возникать тогда и в более коротковолновой части спектра. Такой эффект возможен при наличии у распределения частоты Брейта – Вайсяля двух разделенных локальных максимумов (двух несвязанных или слабо связанных волноводов) [6]. Семейство дисперсионных кривых суммарного волновода получается наложением друг на друга семейств дисперсионных кривых каждого из волноводов в отдельности с перезамыканием их в точках пересечения по принципу максимума, согласно которому дисперсионная кривая моды с номером n не может проходить ниже дисперсионной кривой моды с номером $n+1$. В окрестностях точек перезамыкания возникают экстремумы групповой скорости, число которых растет с номером моды.

Ниже выяснено, что немонотонность групповой скорости наблюдается и для одноэкстремальных вертикальных распределений $N(z)$, если существует по крайней мере один участок волновода с частотой Брейта – Вайсяля, отличной от максимальной и от нуля и медленно меняющейся на длине волны соответствующих ей собственных вертикальных стоячих колебаний.

Для наиболее распространенного в океане распределения $N(z)$, когда имеется верхний однородный слой и слой сезонного и главного термоклинов, определены области параметров, при которых групповая скорость моды с номером n немонотонна.

1. В дальнейшем предполагаем, что жидкость идеальна, несжимаема, стратифицирована, с вертикальным распределением частоты Брейта – Вайсяля $N(z)$, глубина равна H . Рассмотрение ведется в рамках линейной теории и приближения Буссинеска.

Основная краевая задача для амплитуды $W(\mu, \nu, z, \omega)$ вертикальной компоненты скорости свободных гармонических внутренних волн имеет вид [1]

$$W'' + (N^2(z)c^{-2} - k^2)W = 0 \quad (1.1)$$

$$W|_{z=0} = W|_{z=H} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $k = (\mu^2 + \nu^2)^{1/2}$ – модуль пространственного волнового числа, μ, ν – его составляющие по осям x, y соответственно, ω – частота волны, $c = \omega/k$ – модуль фазовой скорости, штрих означает дифференцирование по вертикальной координате z (ось z направлена вниз).

Считая c внешним параметром, можно искать $k^2 = k^2(c)$ как собственные значения задачи Штурма – Лиувилля (1.1), (1.2), где k^2 играет роль

спектрального параметра. При любом фиксированном значении фазовой скорости c спектр задачи дискретный, лежит на вещественной оси левее точки $k_*^2 = N_m^2 c^{-2}$ ($N_m = \max_z N(z)$) и имеет точку сгущения на $-\infty$. Это

следует из принципа максимума, который формулируется, например, для первого (максимального) собственного значения

$$k_1^2(c) = \max_{u \in K} \left\{ -\frac{(u', u')}{(u, u)} + \frac{(N^2 u, u)}{c^2 (u, u)} \right\} \quad (1.3)$$

где K — класс дважды непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0, H]$, обращающихся в нуль на его концах, $(., .)$ — скалярное произведение. Максимум в выражении (1.3) достигается на первой собственной функции $W_1(k, z)$ задачи (1.1), (1.2) в силу тождества, справедливо для любой функции $u \in K$

$$k_1^2(c) = -\frac{(u', u')}{(u, u)} + \frac{(N^2 u, u)}{c^2 (u, u)} + \frac{((u/W_1)' W_1, (u/W_1)' W_1)}{(u, u)} \quad (1.4)$$

Принцип максимума (1.3) следует непосредственно из (1.4) и справедлив для любого собственного значения с номером n , где в качестве класса K берется его подкласс, состоящий из функций, ортогональных первым $n-1$ собственным функциям задачи (1.1), (1.2). Из аналогично-го (1.4) тождества

$$\frac{\pi^2}{H^2} = \frac{(u', u')}{(u, u)} - \frac{((u/u_0)' u_0, (u/u_0)' u_0)}{(u, u)}$$

которое выполнено для любой $u \in K$ и $u_0 = \sin(\pi z/H)$, нетрудно получить оценку для собственных функций основной краевой задачи

$$(W_n', W_n') / (W_n, W_n) \geq \pi^2 / H^2 \quad (1.5)$$

Опуская в дальнейшем номер моды, можно записать, используя (1.3)

$$f(k) = \left[1 + \frac{(W', W')}{(W, W) k^2} \right]^{-1} \quad (1.6)$$

где $f(k) = \omega^2(W, W) (N^2 W, W)^{-1}$ — отношение квадрата частоты волны к усредненному по собственной функции квадрату частоты Брента — Вайсяля.

Аналогично [1] получим представление для групповой скорости

$$d\omega/dk = c(1-f) \quad (1.7)$$

оценка снизу которой в силу (1.5), (1.6) имеет вид

$$d\omega/dk \geq c^3 \pi^2 N_m^{-2} H^{-2} \quad (1.8)$$

Дифференцируя по k (1.7), нетрудно вывести необходимое и достаточное условие экстремума групповой скорости, которое с использованием (1.6) запишется в виде

$$k d[\ln(\omega^2/f)]/dk \geq 3(1-f) \quad (1.9)$$

Для распределений $N(z)$ с одним термоклином монотонность групповой скорости следует из представления

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \omega}{dk^2} &= kc^3 (W, W) [-3c^2 (W', W') + \\ &+ 4k^2 (W, W) (F, F) (N^2 W, W)^{-1}] (N^2 W, W)^{-2} \quad (1.10) \\ F(z) &= W^{-1} \int_0^z [N^2 - (N^2 W, W) (W, W)^{-1}] W^2 dz \end{aligned}$$

Положительное слагаемое в квадратных скобках правой части (1.10) в этом случае экспоненциально мало и $d^2\omega/dk^2 \ll 0$ при любых $k \geq 0$.

Доказательство возможности выполнения неравенства (1.9) или, что то же, неотрицательности правой части (1.10) для произвольной $N(z)$ затруднительно, поэтому обратимся к модельной ситуации.

2. Рассмотрим наиболее распространенное в океане распределение $N(z)$, когда имеется верхний однородный слой толщины l и слой сезонного и главного термоклинов с характерными значениями частот Брента — Вайсяля N_m, N_0 и толщинами h_m, h_0 соответственно ($H=l+h_m+h_0, N_m > N_0$).

Немонотонность групповой скорости можно легко объяснить с помощью принципа максимума (1.3). При выполнении условия малости интегрального вклада участка сезонного термоклина

$$N_m^2 h_m \ll N_0^2 h_0 \quad (2.1)$$

дисперсионная кривая $\omega = \omega_1(k)$ первой моды близка к дисперсионной кривой $\omega = \Omega_0(k)$ первой моды главного термоклина и огибает ее сверху для $\omega < N_0$, практически не замечая сезонного термоклина. В области $\omega > N_0$ по мере увеличения частоты она приближается сверху к дисперсионной кривой $\omega = \Omega_m(k)$ первой моды сезонного термоклина. Групповая скорость, таким образом, имеет тенденцию перехода от меньших значений к большим в окрестности уровня частоты $\omega = N_0$, так как при сформулированном выше условии (2.1) пересечение дисперсионных кривых первых мод сезонного и главного термоклинов всегда возможно под достаточно большим углом.

В подтверждение этих качественных рассуждений можно получить в приближении (2.1) методом возмущений разложение обеих частей неравенства (1.9) по степеням $\varepsilon = h_m/h_0 \ll 1$. Дисперсионная кривая первой моды $\omega = \omega_1(k)$, огибая сверху пересекающиеся в точке $k = k_0$ кривые $\omega = \Omega_0(k)$ и $\omega = \Omega_m(k)$ и проходя при $\omega < N_0$ в непосредственной близости от дисперсионной кривой первой моды главного термоклина, пересекает уровень частоты $\omega = N_0$ в малой окрестности $k = k_0$. Верхний однородный слой вносит в разложения в силу (1.10) экспоненциально малые добавки, поэтому для упрощения можно положить $l = 0$. Путем несложных вычислений получаем

$$k_0 = \pi N_0 (N_m^2 - N_0^2)^{-1/2} h_0^{-1} \varepsilon^{-1} + O(\varepsilon) h_0^{-1} \quad (2.2)$$

и с учетом (2.2)

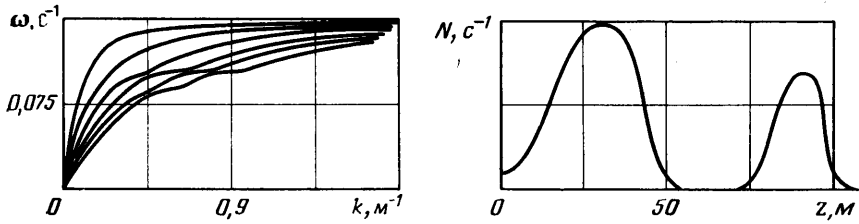
$$1 - f|_{k=k_0} = (N_m^2 - N_0^2) N_0^{-2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dk} [\ln(\omega^2/f)]|_{k=k_0} = (N_m^2 - N_0^2) N_0^{-2} h_0 \varepsilon + O(\varepsilon^2) h_0 \quad (2.4)$$

Непосредственной подстановкой разложений (2.2)–(2.4) в неравенство (1.9) проверяется его справедливость в окрестности $k = k_0$. При $\omega > N_0$ происходит отсечка главного термоклина и, так как его ширина в силу (2.1) для $\omega < N_0$ порядка длины волны вертикальных собственных колебаний первой моды, резко увеличивается волновое число вертикальных колебаний. Собственные моды сосредоточиваются в области сезонного термоклина и дальнейшее поведение дисперсионных кривых целиком определяется его свойствами. Процесс перестройки тем заметнее, чем выше номер моды, т. е. чем критичнее для нее отсечка главного термоклина. Это подтверждают вычисления, из которых следует, что левая часть неравенства (1.9) пропорциональна номеру моды n

$$kd[\ln(\omega^2/f)]/dk = \pi n (N_m^2 - N_0^2)^{1/2} N_0^{-1} + O(\varepsilon)$$

Прямые численные расчеты задачи (1.1), (1.2) хорошо согласуются с полученной формулой и разложениями (2.2)–(2.4). Таким образом, об-

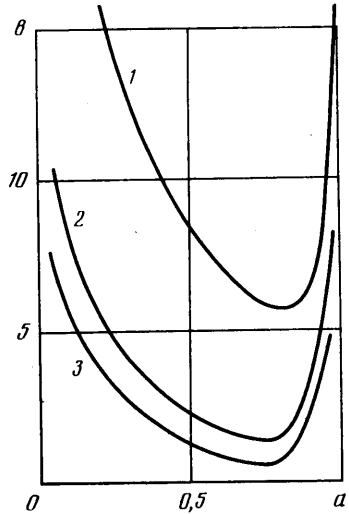


Фиг. 1

щее количество максимумов групповой скорости любой моды ограничено и в данном случае не больше двух, тогда как для несвязанных волноводов оно растет с номером моды. Эта особенность наглядно иллюстрируется результатами численных расчетов, приведенными на фиг. 1, на которой показано поведение дисперсионных кривых $\omega = \omega_n(k)$ и вертикальное распределение частоты Брента – Вайсяля $N(z)$ в случае двух несвязанных волноводов и где отчетливо видны перезамыкания дисперсионных кривых.

Отметим некоторые различия задач о движущемся с постоянной скоростью V и неподвижном источниках [2]. Предположим, что скорость источника больше самой максимальной из групповых скоростей – скорости длинных волн первой моды. Используя связи $k = (\mu^2 + \nu^2)^{1/2}$, $\mu = \omega/V$, продифференцируем μ по ν дважды

$$\frac{d^2\mu}{d\nu^2} = \left[\nu^2 k V^2 \frac{d^2\omega}{dk^2} + \left(\mu V - k \frac{d\omega}{dk} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \frac{d\omega}{dk} \right] \left(kV - \mu \frac{d\omega}{dk} \right)^{-3} \quad (2.5)$$



Фиг. 2

Из формулы (2.5) в силу (1.8) следует, что дуги волн Эйри в задаче о движущемся источнике генерируются для второго максимума групповой скорости в более коротковолновой части спектра, чем в случае неподвижного источника.

3. Введем переменные $a = N_0/N_m$, $b = h_0/h_m$. В полуполосе $0 \leq a \leq 1$, $b \geq 0$ плоскости (a, b) решения определялись посредством численных расчетов границы областей, в которых мода с номером n имеет немонотонную групповую скорость. Результаты этих расчетов могут быть полезны как при построении полей линейных внутренних гравитационных волн, вызванных локализованными источниками в сложно стратифицированной жидкости, так и для некоторых алгоритмов решения основной краевой задачи (1.1), (1.2), использующих кусочно-постоянную аппроксимацию $N(z)$. При грубой аппроксимации частоты Брента – Вайсяля можно получить лишние экстремумы групповой скорости, поэтому необходимо следить за интегральными соотношениями между навязанными аппроксимацией слоями.

При расчетах использовался метод линейной аппроксимации $N^2(z)$ между точками, в которых она задана. Решение задачи (1.1), (1.2) на каждом линейном участке выражается через функции Эйри, что позволяет эффективно вычислять различные скалярные произведения типа приведенных в разд. 1, а также их производные по k любого порядка. Метод устойчив к ошибкам округления и обладает большим быстродействием. Толщина верхнего однородного слоя принималась равной 20 м. На фиг. 2 приведены нейтральные на наличие вторых максимумов групповой скорости кривые $b = \varphi_n(a)$ для первых трех мод. Точке на такой кривой соответствует ситуация, когда локальный минимум и следующий за ним по возрастанию k локальный максимум групповой скорости сливаются, образуя точку перегиба (т. е. точку, где $d^2\omega/dk^2 = 0$, $d^3\omega/dk^3 = 0$). В области параметров выше кривой всегда есть второй максимум групповой скорости, а ниже она монотонна. Границы полуполосы при-

надлежат к области монотонности групповых скоростей. Ветви нейтральных кривых при $a \rightarrow 0$ и $a \rightarrow 1$ асимптотически приближаются к вертикальным границам полуполосы и уходят в $+\infty$. С увеличением номера моды наблюдается сгущение нейтральных кривых и приближение их к границам полуполосы. Минимумы на зависимостях $b = \varphi_n(a)$ находятся в точках $a_1 = 0,82$, $b_1 = 5,73$; $a_2 = 0,77$, $b_2 = 1,36$; $a_3 = 0,64$, $b_3 = 0,57$ и т. д.

В заключение автор выражает благодарность В. Р. Когану, В. А. Боровикову и В. А. Гордцову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоздат, 1981. 302 с.
2. *Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М. Я.* Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1984, т. 20, № 6, с. 526–532.
3. *Стурова И. В.* Внутренние волны, генерируемые локальными возмущениями в линейно-стратифицированной жидкости конечной глубины. — ПМТФ, 1978, № 3, с. 61–69.
4. *Стурова И. В., Сузарев В. А.* Генерация внутренних гравитационных волн в термоядерной среде. — Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1980, № 8, вып. 2, с. 136–142.
5. *Завольский Н. А., Зайцев А. А.* К вопросу о развитии внутренних волн, генерируемых сосредоточенным импульсным источником в безграничной равномерно стратифицированной жидкости. — ПМТФ, 1984, № 6, с. 58–64.
6. *Гончаров В. В.* О некоторых особенностях внутренних волн в океане. — В кн.: Цунами и внутренние волны. Севастополь, 1976, с. 87–96.

Горький

Поступила в редакцию
9.1.1986