

УДК 532.59

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКОЙ ВОЛНЫ,
РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В КАНАЛЕ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ
ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ**

ГОЛИНЬКО В. И.

Исследование распространения волн и их взаимодействия с вертикальной стенкой имеет большое значение при изучении их воздействия на гидротехнические сооружения. Величина силового воздействия волны на вертикальную стенку определяется прежде всего максимальной высотой волны у стенки. Кроме этого, характер воздействия волны на стенку зависит от того, образуется при подходе волны к стенке бор или не образуется. Ввиду важного практического значения задача взаимодействия волны с вертикальной стенкой неоднократно изучалась аналитическими методами [1-4], с помощью численного интегрирования соответствующих уравнений [5-8], а также экспериментально с использованием гидроволновых лотков [9, 10].

В настоящей работе изучается отражение длинной волны от вертикальной стенки при условии, что волна распространяется в канале или реке с параболическим поперечным сечением. Такие сечения имеют место, согласно [11], в речных руслах, сформированных в несвязных грунтах. Получены формулы, описывающие эволюцию высоты волны у вертикальной стенки при условии, что показатель степени у параболы принимает значения $k=2/(2n-1)$. Описаны условия, при выполнении которых у вертикальной стенки образуется бор.

1. Пусть «смоченный» периметр поперечного сечения канала имеет вид $y=a_0|z|^k$. Распространение волны в канале описывается системой дифференциальных уравнений [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial k} + \frac{g}{B(F)} \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} + F \frac{\partial u}{\partial k} + u \frac{\partial F}{\partial k} = 0 \quad (1.1)$$

где $x \geq 0$ — расстояние от вертикальной стенки вдоль оси канала, t — время, u — скорость, g — ускорение силы тяжести, $F=F(h)$ — площадь поперечного сечения канала, занимаемая водой, h — высота параболического сегмента, $B(F)$ — ширина канала.

Следуя [12], преобразуем систему (1.1) к виду

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s) \frac{\partial r}{\partial k} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r) \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

$$s = u - \frac{2(k+1)}{k} c, \quad r = u + \frac{2(k+1)}{k} c$$

$$c = \sqrt{\frac{k}{k+1} gh}, \quad \alpha = \frac{3k+2}{4(k+1)}, \quad \beta = \frac{k+2}{4(k+1)}$$

где s, r — инварианты Римана, c — скорость распространения возмущений.

Будем рассматривать простую волну, которая распространяется по направлению к стенке. Такая волна, как известно, описывается решением

$$u + \frac{2(k+1)}{k} c = r_0, \quad x = (\alpha s + \beta r_0) t + G(c) \quad (1.3)$$

где функция $G(c)$ задает распределение скоростей при $t=0$.

Если начальное возмущение скоростей отлично от невозмущенной скорости

$$c_0 = \sqrt{\frac{k}{k+1} g h_0}$$

только на отрезке $[a, b]$, то решение (1.3) будет справедливым до тех пор, пока волна не дойдет до стенки, что произойдет в момент времени $t_0 = a/c_0$. После этого возникнет отраженная волна, которая может быть описана общим решением, зависящим от двух произвольных функций. Падающая и отраженная волны сопрягаются вдоль линии L , которая задается уравнением $dx/dt = (\alpha r_0 + \beta s)$, где $s(x, t)$ определяется по (1.3).

Для того чтобы изучить взаимодействие волны с вертикальной стенкой, нужно найти общее решение в области, ограниченной линиями $x=0$ и L , где оба инварианта Римана являются переменными. Для этого меняем ролями независимые и зависимые переменные, т.е. полагаем $t=t(r, s)$ и $x=x(r, s)$. Если якобиан преобразования $D(t, x)/D(r, s) \neq 0$, что соблюдается при отсутствии бора, то система (1.2) сводится к линейной системе

$$\frac{\partial x}{\partial r} - (\alpha s + \beta r) \frac{\partial t}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial s} - (\alpha r + \beta s) \frac{\partial t}{\partial s} = 0 \quad (1.4)$$

Исключая из системы (1.4) функцию $x(r, s)$, получим уравнение Дарбу

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r \partial s} + \frac{\gamma}{r-s} \left(\frac{\partial t}{\partial r} - \frac{\partial t}{\partial s} \right) = 0 \quad (1.5)$$

где $\gamma = \alpha / (\beta - \alpha)$.

Если $k = 2/(2n-1)$, то $\gamma = -(n+1)$ и общее решение уравнения (1.5) имеет вид [13]

$$t(r, s) = \frac{\partial^{2n}}{\partial r^n \partial s^n} \left[\frac{f(r) + q(s)}{r-s} \right] \quad (1.6)$$

где $f(r)$ и $q(s)$ — произвольные функции.

Используя систему (1.4), находим

$$x(r, s) = (\alpha s + \beta r) t(r, s) - \beta \frac{\partial^{2n-1}}{\partial s^n \partial r^{n-1}} \left[\frac{f(r) + q(s)}{r-s} \right] + C \quad (1.7)$$

где произвольную постоянную C можно положить равной нулю.

Неизвестные функции $f(r)$ и $q(s)$ найдем, используя описанные ниже два условия. Первое условие заключается в том, что на стенке $u(0, t) = 0$, следовательно

$$r(0, t) = -s(0, t) = (2n+1)c(0, t) \quad (1.8)$$

Полагая в уравнении (1.7) $x(r, s) = 0$ и учитывая (1.8), находим

$$f((2n+1)c) = q(-(2n+1)c) \quad (1.9)$$

Второе условие состоит в том, что функция $x(r, s)$ должна быть непрерывной на линии сопряжения L , где $r=r_0 = (2n+1)c_0$.

Тогда, учитывая (1.3) и (1.7), получим

$$-\beta \frac{\partial^{2n-1}}{\partial s^n \partial r^{n-1}} \left[\frac{f(r) + q(s)}{r-s} \right] \Big|_{r=r_0} = G \left(\frac{r_0 - s}{2(2n+1)} \right) \quad (1.10)$$

Интегрируя уравнение (1.10) n раз по s , находим

$$\begin{aligned} q(s) = & -f(r_0) + f'(r_0)(r_0 - s) - \dots + (-1)^n \frac{f^{(n-1)}(r_0)}{(n-1)!} (r_0 - s)^{n-1} + \\ & + \frac{[2(2n+1)]^{n+1}}{2n(n-1)!} G_n \left(\frac{r_0 - s}{2(2n+1)} \right) (r_0 - s)^n + P_{n-1}(r_0 - s) (r_0 - s)^n \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $P_{n-1}(r_0-s)$ — многочлен степени $n-1$ с произвольными коэффициентами, а функцию $G_n(c)$ получаем в результате n -кратного интегрирования функции $G(c)$.

Учитывая (1.9), находим, что

$$f(r) = q(-r) \quad (1.12)$$

Используя формулы (1.11) и (1.12), можно выписать общее решение, выбирая надлежащим образом произвольные постоянные.

2. Поскольку наибольший интерес представляет эволюция волны у вертикальной стенки, выпишем соответствующие решения, ограничиваясь случаями $n=1$ и 2. При $n=1$, подставляя (1.11), (1.12) в формулу (1.6) и учитывая (1.8), получим

$$t(c) = \frac{1}{2c^2} (c_0+c) G\left(\frac{c_0+c}{2}\right) - \frac{c_0}{c^3} \left[G_1\left(\frac{c_0+c}{2}\right) - G_1(c_0) \right] \quad (2.1)$$

При $n=2$ найдем

$$\begin{aligned} t(c) = & \frac{1}{4c} \left(\frac{c_0}{c} + 1 \right)^2 G\left(\frac{c_0+c}{2}\right) - \frac{1}{2c^2} \left[3\left(\frac{c_0}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{c_0}{c}\right) - 1 \right] G_1\left(\frac{c_0+c}{2}\right) + \\ & + \frac{1}{2c^2} \left(\frac{c_0}{c}\right) \left[3\left(\frac{c_0}{c}\right)^2 + 1 \right] G_1(c_0) + \\ & + \frac{1}{c^3} \left[3\left(\frac{c_0}{c}\right)^2 - 1 \right] \left[G_2\left(\frac{c_0+c}{2}\right) - G_2(c_0) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Формулы (2.1) и (2.2) описывают эволюцию высоты воды у вертикальной стенки.

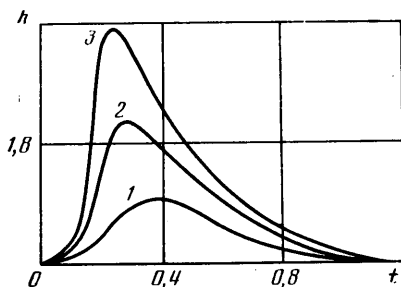
Рассмотрим для определенности волну с начальным условием

$$c(x, 0) = \begin{cases} c_0 + \frac{c_1}{2} [1 - \cos \omega(x-a)], & x \in [a, b] \\ c_0, & x \notin [a, b] \end{cases} \quad (2.3)$$

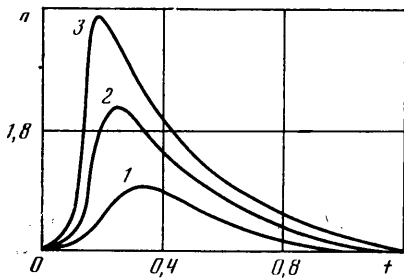
где $\omega = 2\pi/\lambda$, $\lambda = b-a$.

Численные расчеты по формулам (2.1) и (2.2) при начальном условии (2.3) были выполнены в безразмерных величинах. В качестве линейных масштабов по высоте и длине канала приняты значения h_0 и λ соответственно; за масштаб времени принято отношение λ/c_0 ; масштаб скорости взят равным величине c_0 . На фиг. 1 и 2 приведены зависимости от времени высоты воды $h=c^2$ у вертикальной стенки при $a=0$ для значений $n=1$ и 2 соответственно. Линии 1, 2 и 3 соответствуют значениям $c_1=0,1; 0,2; 0,3$. Видно, что с ростом n при одном и том же значении c_1 волна приближается к стенке более крутой и продолжительность ее воздействия на стенку возрастает.

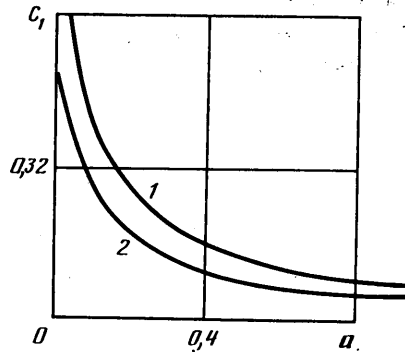
Из уравнения $dt/dc = \infty$ находим, что максимальная высота волны у стенки достигается при $c(0, t) = 1 + 2c_1$. Учитывая, что $H = h - 1$, находим связь между



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

максимальной высотой волны у стенки и начальной высотой волны

$$H_m = 4(1 + H - \sqrt{1 + H})$$

что согласуется с результатами работ [1, 2].

Из уравнения $dt/dc = 0$ находим такие значения для параметров a и c_1 , когда бор образуется у вертикальной стенки. На фиг. 3 приведены кривые 1, 2 для $n=1$ и 2 соответственно. Заметим, что каждая кривая разбивает первый квадрант плоскости (a, c_1) на две части, причем точкам из одной части соответствует гладкое течение, а точкам из другой — течение жидкости при наличии бора.

Автор благодарит Е. Н. Пелиновского, обратившего внимание на данную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. Отражение длинной волны конечной амплитуды, распространяющейся в канале. — Зап. Гос. гидрол. ин-та, 1933, т. 9, с. 27–66.
2. Мирчина Н. Р., Пелиновский Е. Н. Возрастание амплитуды длинной волны вблизи вертикальной стенки. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1984, т. 20, № 3, с. 330–331.
3. Алешков Ю. З. Полная модель процесса распространения длинных волн и их взаимодействие с вертикальной стенкой. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 3, с. 173–176.
4. Wyatt-Smith J. G. B. An integral equation for unsteady surface waves and a comment on the Boussinesq equation. — J. Fluid Mech., 1971, v. 49, № 4, p. 625–633.
5. Мишурев А. В., Приказчиков Н. А., Селедкин А. А., Сладкевич М. С. Исследование воздействия длинных волн на ограждающие сооружения и берега. — В кн.: Методы исследований и расчетов волновых воздействий на гидротехнические сооружения и берега. Матер. конф. и совещ. по гидротехн. Л., 1982, с. 190–191.
6. Железняк М. И. К численному расчету встречных взаимодействий поверхностных волн. — В кн.: Гидромеханика. Вып. 39. Киев: Наук. думка, 1979, с. 44–48.
7. Fenton J. D., Rienecker M. M. A Fourier method for solving nonlinear water — wave problems: application to solitary — wave interactions. — J. Fluid Mech., 1982, v. 118, p. 411–443.
8. Chan R. K.-C., Street R. L. A computer study of finite-amplitude water waves. — J. Comput. Phys., 1970, v. 6, № 1, p. 68–94.
9. Загрядская Н. Н., Иванова С. В., Нуднер Л. С., Шошин А. Н. Действие длинных волн на вертикальную преграду. — Изв. ВНИИ гидротехн., 1980, т. 138, с. 102–107.
10. Maxworthy T. Experiments on collisions between solitary waves. — J. Fluid Mech., 1976, v. 76, № 1, p. 177–185.
11. Железняков Г. Б. Пропускная способность русел каналов и рек. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 311 с.
12. Станюкович К. П. Неуставившиеся движения сплошной среды. М.: Гостехиздат, 1955. 804 с.
13. Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1968. 112 с.