

УДК 532.5.013.4:537

## **КРИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВОДЯНОЙ ПЛЕНКИ НА ПОВЕРХНОСТИ НЕПОДВИЖНОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ТАЮЩЕЙ ГРАДИНЫ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

**ГРИГОРЬЕВ А. И., ДОРОШЕНКО Д. Н.**

В теории грозового электричества весьма актуальна задача выяснения механизма интенсивного микро- и макроразделения зарядов в грозовом облаке, обеспечивающего регенерацию облачного диполя после разряда линейной молнии за время  $\sim 1-10$  с [1]. В обсуждаемых в научной литературе моделях грозы [1] важная роль в объяснении этого явления отводится гидрометеорам — крупным каплям и тающим градинам, большая скорость падения которых может обеспечить макроразделение электрических зарядов в облаке за регистрируемые в наблюдениях времена. Существенную роль играют градины и в процессах микроразделения зарядов в грозовом облаке. Коронный разряд с тающей градины, зажигающийся на нелинейной стадии развития неустойчивости капиллярных волн в жидкой пленке на ее поверхности, сопровождается эмиссией большого количества высокодисперсных заряженных капелек и зарядением самой градины [1-3].

Изучение условий развития неустойчивости жидкой пленки на поверхности тающей градины и зажигания коронного разряда может способствовать теоретическому обоснованию фиксируемых при зондовых измерениях в грозовых облаках критических напряженностей электрического поля начала разряда линейной молнии, которые оказываются существенно ниже предсказываемых на основе экспериментальных и теоретических работ как по длинным искрам, так и по исследованию неустойчивости заряженных капель и капель во внешних электрических полях [1, 4-6].

Теоретические работы по устойчивости жидкой пленки на поверхности ледяного ядра в условиях грозового облака отсутствуют. При анализе устойчивости жидкой пленки на поверхности неподвижного твердого сферического ядра в гравитационном поле в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости было получено [7], что наличие ядра не влияет на критические условия появления неустойчивости капиллярных волн, а сказывается лишь на их спектре. Эти результаты применимы к процессам в грозовых облаках лишь со значительными оговорками, так как в [7] не учитывается ни существующее в грозовом облаке внешнее электрическое поле, ни наличие на твердом ядре или жидком слое электрического заряда.

В настоящей работе изучается влияние электрического заряда на неподвижной градине  $Q$  и постоянного однородного внешнего электрического поля  $E$  на критические условия проявления неустойчивости капиллярных волн в жидком слое. В этом случае в отличие от [7] критические условия появления неустойчивости капиллярных волн в жидкой пленке зависят как от величины напряженности поля и заряда, так и от величины отношения радиуса  $R_0$  твердого ядра к  $R$  — радиусу всей градины:  $v=R_0/R$ . Следует также отметить, что, согласно [2], для обводненных градин  $R \approx 1$  мм аэродинамическое взаимодействие с окружающим воздухом при падении градины не сказывается существенным образом на рельефе поверхности жидкого слоя. Следовательно, приведенные ниже расчеты применимы в нулевом приближении для качественного анализа процессов развития неустойчивости капиллярных волн и на поверхности движущихся мелких обводненных градин в грозовом облаке.

1. Будем решать в сферической системе координат с началом в центре ядра в рамках модели невязкой, нетеплопроводной, несжимаемой идеально проводящей жидкости задачу об устойчивости в однородном внешнем электрическом поле капиллярных волн в заряженном зарядом  $Q$  слое жидкости толщины  $h=R-R_0$  на поверхности твердого сферического ядра в поле сил тяжести. Все рассмотрение проведем в нулевом приближении по отклонению во внешнем электрическом поле формы капли от сферической, считая его малым. Это предположение ограничивает рассмотрение

для пленок произвольной толщины случаев слабых полей, а для полей произвольной величины — приближением  $h \ll R$ . Примем также, что  $h > 10^{-5}$  см, и влиянием флуктуационных сил [8] на критические условия появления неустойчивости будем пренебрегать. Внешнюю среду примем непроводящей, с диэлектрической проницаемостью, равной единице, несжимаемой, невязкой, нетеплопроводной.

Пусть в жидкой пленке и окружающей среде существует волновое движение бесконечно малой амплитуды с потенциалами скоростей  $\psi_j(r, \theta, \varphi, t)$  ( $j=1$  — внутри пленки;  $j=2$  — во внешней среде), приводящее к искажению пленки  $r(\theta, \varphi, t) = R + \xi(\theta, \varphi, t)$   $|\xi| \ll R$ . Потенциалы  $\psi_j$ , а также потенциал электростатического поля заряда  $Q$  и индуцированного заряда вне капли  $\Phi$  являются гармоническими функциями, удовлетворяющими следующим граничным условиям [9]:

$$\Delta\psi_j=0; \quad j=1; 2; \quad \Delta\Phi=0; \quad \Phi \rightarrow 0; \quad \psi_2 \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \quad (1.1)$$

$$r=R_0: \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial r} = 0 \quad (1.2)$$

$$r = R + \xi: \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial n_1} = -\frac{\partial\psi_2}{\partial n_2}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} \approx \frac{\partial\psi_1}{\partial n_1} = -\frac{\partial\psi_2}{\partial n_2} \quad (1.3)$$

$$\Delta P = -\rho_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial t} - (\rho_1 - \rho_2)gz + F(Q, E, \theta, \varphi, t) = -\frac{\alpha}{R^2} (2-L^+) \xi \quad (1.4)$$

$$c\Phi = Q$$

где  $L^+$  — оператор Лежандра — взятая с обратным знаком угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах;  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения жидкости на границе раздела с окружающей средой;  $g$  — ускорение поля тяжести ( $g \parallel E$ );  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — плотности жидкости и окружающей среды;  $z$  — вертикальная координата, положительные значения которой измеряются от центра капли вдоль  $-g$ ;  $F(Q, E, \theta, \varphi, t)$  — электрическое давление на поверхность раздела, происходящее от наличия внешнего электрического поля  $E$  и заряда  $Q$  на жидком слое;  $c = c(R + \xi)$  — емкость капли, зависящая от ее формы. Так как  $|\xi| \ll R$ , то все производные в (1.2)–(1.4) отнесем к невозмущенной поверхности  $r=R$ , как это принято в теории волн бесконечно малой амплитуды [9].

2. В выбранной системе координат  $z = (R + \xi) \cos \theta$  (угол  $\theta$  отсчитываем от  $-g$ ). Тогда, принимая, что  $\psi_j \sim \exp(-i\omega t)$ , и дифференцируя (1.4) один раз по  $t$  при постоянных  $\theta$  и  $\varphi$ , получим с учетом (1.3)

$$(\rho_1\psi_1 - \rho_2\psi_2)\omega^2 - (\rho_1 - \rho_2)g \cos \theta \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\alpha}{R^2} (2-L^+) \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

Выражение для частной производной по времени от давления электростатического поля на поверхность жидкого слоя в линейном по  $\xi/R$  приближении запишется (подобно тому, как это сделано в [10]) в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{8\pi} E_+^2 \right]_{r=R+\xi} \approx \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\xi}{8\pi} \frac{\partial E_+^2}{\partial r} + \frac{1}{4\pi} E_+ \delta E \right]_{r=R} \quad (2.2)$$

где  $E_+$  — полная напряженность электростатического поля у поверхности жидкого слоя. Представляя  $\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi$ ;  $E_0 = -\nabla\Phi_0$ ;  $\delta E = -\nabla\delta\Phi$ , получим из (1.1)

$$\delta\Phi \approx \xi \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \approx -\xi E_0 \quad (2.3)$$

где  $\Phi_0$  и  $E_0$  — полные потенциал и напряженность электростатического поля у невозмущенной (сферической) поверхности жидкого слоя. Используя (1.3), (2.3) и известные [8] выражения для напряженности про-

водящей, заряженной зарядом  $Q$  сферы в однородном электрическом поле  $E$ , преобразуем (2.2) к виду

$$r=R: \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{E_0^2}{4\pi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial t} \approx \frac{E_0^2}{4\pi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{1}{4\pi} \left[ 3E \cos \theta + \frac{Q}{R^2} \right]^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \quad (2.4)$$

Потенциалы скоростей будем искать в виде разложения по сферическим функциям [9]

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \theta, \varphi) &\sim \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_l^m r^l + D_l^m r^{-(l+1)}) Y_l^m \\ \psi_2(r, \theta, \varphi) &\sim \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_l^m r^{-(l+1)} Y_l^m \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $Y_l^m$  — нормированные сферические функции. Здесь учтено, что мода с  $l=0$  соответствует радиальным колебаниям, невозможным в несжимаемой жидкости, а мода с  $l=1$  — движению градины как целого [9], не принимаемому во внимание в настоящем рассмотрении. Из (1.2)–(1.3) несложно найти соотношения, связывающие коэффициенты разложения (2.5)

$$D_l^m = A_l^m \frac{l}{l+1} R_0^{2l+1}, \quad B_l^m = -A_l^m \frac{l}{l+1} R^{2l+1} \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{R} \right)^{2l+1} \right]; \quad l \geq 2 \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.5), а результат в (2.4) и (2.1), приходим к соотношению

$$\sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_l^m Y_l^m (\Omega^2 \beta_l + l s_l (W^2 + W_*^2 \cos^2 \theta) - E_l - 2 \cos \theta (\eta + W W_* s_l)) = 0 \quad (2.7)$$

$$C_l^m = A_l^m R^l (1 - \nu_l); \quad \nu_l = \left( \frac{R_0}{R} \right)^{2l+1}, \quad E_l = l(l-1)(l+2);$$

$$\Omega^2 = \omega^2 \rho_1 R^3 \frac{1}{\alpha}$$

$$\eta = (\rho_1 - \rho_2) g R^2 \frac{1}{\alpha}$$

$$\beta_l = \frac{1+l+l\nu_l}{(1+l)(1-\nu_l)} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{l}{l+1}; \quad s_l = \frac{l-1+\nu_l(l+2)}{1-\nu_l}$$

$$W_*^2 = \frac{9RE^2}{4\pi\alpha}; \quad W^2 = \frac{Q^2}{4\pi\alpha R^3}$$

Умножая (2.7) на  $Y_n^*$  и интегрируя по углам с учетом рекуррентных соотношений для  $Y_l^m \cos \theta$  и  $Y_l^m \cos^2 \theta$ , получим систему алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов

$$\begin{aligned} C_{l-2}^m q_l^m W_*^2 - 2(\eta + W W_* s_{l-1}) \mu_l^m C_{l-1}^m + C_l^m (\Omega^2 \beta_l - E_l + W^2 l s_l + W_*^2 p_l^m) - \\ - 2(\eta + W W_* s_{l+1}) \lambda_l^m C_{l+1}^m + W_*^2 k_l^m C_{l+2}^m = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$p_l^m = s_l l \frac{2l(l+1) - (2m^2+1)}{(2l+1)^2 - 4}$$

$$q_l^m = (l-2) s_{l-2} \sqrt{\frac{(l^2-m^2)[(l-1)^2-m^2]}{(4l^2-1)[4(l-1)^2-1]}}$$

$$k_l^m = (l+2) s_{l+2} \sqrt{\frac{[(l+1)^2 - m^2][(l+2)^2 - m^2]}{[4(l+1)^2 - 1][4(l+2)^2 - 1]}}$$

$$\mu_l^m = (l-1) \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}}, \quad \lambda_l^m = (l+1) \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1}}$$

3. Требуя обращения в нуль определителя системы (2.8), получим дисперсионное уравнение относительно  $\Omega^2$ , определяющее спектр капиллярных волн в жидком слое при изменении параметров  $W, W_*, \eta, \nu$ . Приравняв нулю свободный член дисперсионного уравнения, найдем критические условия появления неустойчивости в виде  $f(W, W_*, \eta, \nu) = 0$ .

Систему (2.8) можно преобразовать, вводя новые искомые переменные, отличающиеся от  $C_l^m$  умножением на  $l$ , т. е.:  $lC_l^m$ . Тогда соответствующая система алгебраических уравнений в матричной форме может быть записана в виде

$$MX = \Omega^2 JX \quad (3.1)$$

где  $M$  — симметричная пятидиагональная вещественная матрица (эрмитова матрица) коэффициентов при  $lC_l^m$ ,  $X$  — столбцовая матрица искомых  $lC_l^m$ ,  $J$  — диагональная вещественная матрица, элементами которой являются коэффициенты  $\beta_l/l$ . Принимая, что в общем случае решения (3.1) могут быть комплексными, возьмем от обеих частей (3.1) комплексное сопряжение и, транспонируя их, получим

$$\chi M = \bar{\Omega}^2 \chi J \quad (3.2)$$

где  $\chi$  — транспонированная и комплексно-сопряженная к  $X$  строчная матрица. (При записи (3.2) учтена вещественность и симметричность матриц  $M$  и  $J$ .) При умножении (3.1) слева на  $\chi$  и (3.2) справа на  $X$  левые части полученных соотношений совпадут, а значит, совпадут и правые:

$$\Omega^2 \chi J X = \bar{\Omega}^2 \chi J X.$$

$$\chi J X = \sum_{l=2} |C_l^m|^2 l \beta_l > 0$$

В силу последнего соотношения несложно увидеть, что  $\Omega^2$  могут быть только вещественными:  $\Omega^2 = \bar{\Omega}^2$ , т. е. неустойчивость капиллярных волн в заряженной капле во внешнем электрическом поле порождается транскритической (асимметричной) бифуркацией и осуществляется именно путем перехода  $\Omega^2$  через ноль, что и отмечалось в [12] для частных случаев, рассмотренных в [5, 6].

Обсуждаемый переход  $\Omega^2$  через ноль — виртуальный, и реальные движения системы с  $\Omega \sim 0$  не рассматриваются, так как ищутся просто критические значения параметров, приводящие к такому переходу. А это позволяет в настоящем рассмотрении не учитывать влияния вязкости жидкости.

Система (2.8) бесконечная и дисперсионное уравнение также будет бесконечного порядка. Поэтому критические условия появления неустойчивости капиллярных волн будем искать методом последовательных приближений, рассматривая два, три, четыре и т. д. уравнений системы (2.8). Рассмотрение ограничим основной ( $l=2$ ) осесимметричной ( $m=0$ ) модой, так как именно она возбуждается в первую очередь [7, 10, 11].

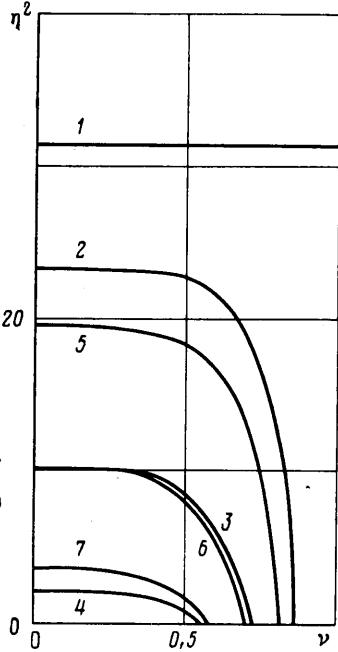
На фиг. 1 представлена зависимость  $\eta^2 = \eta^2(\nu)$  при  $w=0$  и значениях  $w_*^2 = 1; 3; 5$  (кривые 2–4). Кривыми 5–7 представлена зависимость  $\eta = \eta(\nu)$  при  $w_*^2 = 0$  и значениях  $w^2 = 1; 2; 3$  соответственно, а кривой 1 —

эта же зависимость при отсутствии внешнего поля и заряда на градине  $w^2 = w_*^2 = 0$ .

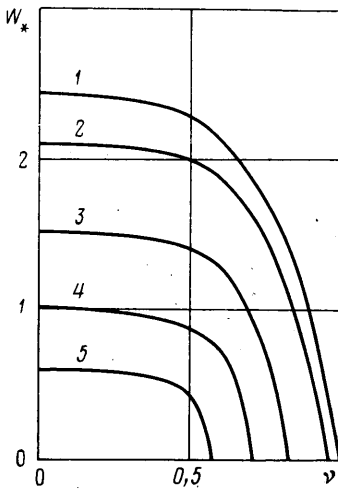
Несложно видеть, что с увеличением заряда на градине и величины внешнего электрического поля критическое значение параметра  $\eta$  быстро уменьшается. Интересна и найденная закономерность уменьшения критических значений параметра  $\eta$  с уменьшением толщины пленки жидкости, имеющая место только при наличии внешнего электрического поля или электрического заряда на градине (в соответствии с данными расчетов [7]) и тем более отчетливо выраженная, чем больше величина поля  $E$  или заряд градины  $Q$ .

Параметр  $\eta$  имеет смысл квадрата отношения радиуса градины  $R$  к капиллярной постоянной воды [9], и для градин достаточно малого размера ( $\approx 1$  мм) влиянием параметра  $\eta$  (влиянием гравитационного поля) на устойчивость жидкой пленки на ледяном ядре можно пренебрегать. В этом случае критические условия ее неустойчивости естественно искать в виде  $f(W, W_*, \nu) = 0$ . На фиг. 2 представлена зависимость  $W_* = W_*(\nu)$  при значениях параметра  $W^2 = 0; 0,2; 1; 2; 3$  (кривые 1–5). В достаточно тонких заряженных водяных пленках на поверхности градин возможно развитие неустойчивости капиллярных волн и зажигание на градине коронного разряда (см. [10, 11]) при величине параметра  $W_*^2$ , на порядок меньшей ее значения для сплошной капли воды. А это означает, что уже при средней напряженности электрического поля в грозовом облаке  $\sim 10^3$  В/см (обычно фиксируемой зондовыми измерениями [1, 4]) будут иметь место интенсивные процессы микроразделения зарядов, что позволит объяснить высокие скорости восстановления облачных диполей после разрядов линейных молний [1].

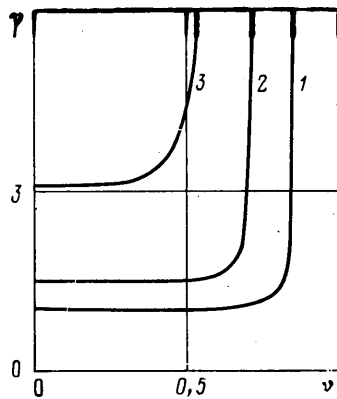
Развитие мощной электронной лавины при коронном разряде с группы близко расположенных градин может привести к формированию стримера и разряду молнии



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

[1, 13] при напряженностях электрического поля, существенно меньших получаемых в экспериментах с длинными искрами ( $\sim 2,3 \cdot 10^4$  В/см [13]). Это позволяет объяснить тот факт, что молния инициируется в грозовых облаках при напряженностях электрического поля, меньших  $10^4$  В/см [1, 4].

Представляет интерес отыскание критических условий появления неустойчивости жидкой пленки на поверхности тающей градины для случая, когда электрическое поле ориентировано перпендикулярно полю силы тяжести:  $E \perp g$ . На фиг. 3 представлена зависимость  $\gamma = \gamma(v)$  отношения значений параметра  $\eta^2$  для этого случая к значениям  $\eta^2$  для случая  $E \parallel g$  при  $W=0$ ;  $W_*^2=1, 3, 5$  (кривые 1–3). Различия в критических условиях появления неустойчивости для случаев  $E \parallel g$  и  $E \perp g$  усиливаются с увеличением  $W_*^2$  и  $v$ , что качественно согласуется с данными экспериментов [2].

В заключение следует еще раз отметить, что в силу использованного приближения сферической невозмущенной поверхности жидкого слоя на фиг. 1–3 участки кривых с  $W_*^2 > 1$  и  $v \leq 0,4$  являются лишь качественными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мучник В. М. Физика грозы. Л.: Гидрометеоздат, 1974. 351 с.
2. Дячук В. А., Мучник В. М., Рудько Ю. С. Иницирование грозовых разрядов в облаках. — В сб.: Атмосферное электричество. Л.: Гидрометеоздат, 1984, с. 115–118.
3. Катга А. К., Ахире Д. В. Electrical atomization of water dripping from melting ice pieces and its possible role in thunderstorms. — J. Clim. and Appl. Meteorol., 1984, v. 23, № 5, p. 845–847.
4. Имянитов И. М. Электричество облаков. Современные проблемы и методы их решения. — В сб.: Атмосферное электричество. Л.: Гидрометеоздат, 1984, с. 94–99.
5. Rayleigh R. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity. — Phil. Mag., 1882, v. 14, p. 184–186.
6. Taylor G. Disintegration of water drops in an electric field. — Proc. Roy. Soc., London, 1964, v. A280, № 1382, p. 383–397.
7. Григорьев А. И. Влияние твердой подложки на устойчивость сферических слоев жидкости. — В сб.: Исследования по теории элементарных частиц и твердого тела. Ярославль, 1983, с. 120–130.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957. 532 с.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.—Л.: Гостехиздат, 1944. 624 с.
10. Григорьев А. И. О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли. — Журн. техн. физики, 1985, т. 55, № 7, с. 1272–1278.
11. Григорьев А. И., Синкевич О. А. К механизму развития неустойчивости капли жидкости в электрическом поле. — Изв. АН СССР. МЖТ, 1985, № 6, с. 10–15.
12. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивость и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.
13. Бейтуганов М. Н. Коронный разряд с аэрозолей в электрическом поле. — В сб.: Атмосферное электричество. Л.: Гидрометеоздат, 1984, с. 106–109.

Ярославль

Поступила в редакцию  
23.VII.1985