

УДК 532.59:537.84

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛЬФВЕНОВСКИХ ВОЛН ПО ТАНГЕНЦИАЛЬНОМУ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМУ РАЗРЫВУ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

РУДЕРМАН М. С.

Рассматривается распространение поверхностных волн по тангенциальному магнитогидродинамическому разрыву в частном случае, когда скорости жидкости по обе стороны от разрыва равны нулю. В [1] показано, что по поверхности, отделяющей полубесконечную область без поля от области с однородным магнитным полем, могут распространяться волны, названные поверхностными альфвеновскими. Линейная теория поверхностных альфвеновских волн в сжимаемой среде рассмотрена в [2]. В [3] исследовано затухание поверхностных альфвеновских волн за счет вязкости и теплопроводности. Распространение нелинейных поверхностных альфвеновских волн малой амплитуды в несжимаемой жидкости в отсутствие диссипативных процессов описывается интегродифференциальным уравнением, полученным в [4]. С помощью численного решения этого уравнения показано, что возмущение, имеющее в начальный момент вид синусоидальной волны, опрокидывается. Определено время опрокидывания.

В настоящей работе уравнение, выведенное в [4], обобщено на случай вязкой жидкости. Показано, что полученное уравнение не имеет стационарных решений. Численно исследовано распространение периодических возмущений.

1. Основные уравнения. Рассматривается вязкая несжимаемая жидкость с бесконечной проводимостью, описываемая уравнениями магнитной гидродинамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{v} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}); \quad \nabla \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость, $\mathbf{B}$ — магнитная индукция, p — давление, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость.

Введем декартову систему координат с осью z , перпендикулярной к невозмущенной поверхности тангенциального разрыва. В дальнейшем предполагаем, что все переменные зависят только от x и z и $v_y = 0$, $B_y = \text{const}$.

В невозмущенном состоянии $\mathbf{v} = 0$, $B_z = 0$. При $z = 0$ плотность ρ , кинематическая вязкость ν , а также невозмущенное магнитное поле $\mathbf{B}_0$ и давление p_0 терпят разрыв, причем полагаем $V_{A+}^2 \cos^2 \alpha_+ \neq V_{A-}^2 \cos^2 \alpha_-$, где $V_A = B_0 / \sqrt{4\pi\rho}$, α — угол между $\mathbf{B}_0$ и осью x , а индексы плюс и минус относятся к областям $z > 0$ и $z < 0$ соответственно. Во всех равенствах, которые верны в обеих областях, индексы плюс и минус опускаются.

На невозмущенной поверхности разрыва, задаваемой уравнением $z = \eta(t, x)$, должны выполняться кинематическое граничное условие, условия прилипания, отсутствия нормальной компоненты магнитного поля и непрерывности напряжений, которые могут быть записаны в виде

($\mu = \rho v$)

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad [u] = 0; \quad B_z = \frac{\partial \eta}{\partial x} B_x$$

$$\left[p + \frac{B^2}{8\pi} + \frac{2\mu}{l^2} l(\nabla) \mathbf{v} \right] = 0, \quad [\mu \{ l(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{n} (l \nabla) \mathbf{v} \}] = 0 \quad (1.2)$$

$$\mathbf{l} = \left(1; 0; \frac{\partial \eta}{\partial x} \right); \quad \mathbf{n} = \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x}; 0; 1 \right)$$

Здесь u и w — x - и z -компоненты скорости. Кроме того, возмущения должны затухать при $|z| \rightarrow \infty$.

С помощью введения векторных потенциалов для скорости и магнитного поля уравнения (1.1) записываются в виде

$$\Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{l}_v (\nabla \psi \times \nabla \Delta \psi) = \mathbf{V}_A \nabla \Delta \chi + \mathbf{l}_v (\nabla \chi \times \nabla \Delta \chi) + v \Delta^2 \psi \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \mathbf{V}_A \nabla \psi + \mathbf{l}_v (\nabla \chi \times \nabla \psi); \quad \mathbf{V}_A = \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

$$\mathbf{v} = -\nabla \times (\psi \mathbf{l}_v); \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 - \sqrt{4\pi\rho} \nabla \times (\chi \mathbf{l}_v)$$

причем аддитивная функция времени во втором уравнении (1.3) включена в χ ($\mathbf{l}_v$ — единичный вектор оси y).

Дифференцируя предпоследнее граничное условие (1.2) по x и исключая ∇p с помощью первого уравнения (1.1), перепишем граничные условия (1.2) следующим образом:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + l \nabla \psi = 0; \quad \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \right] = 0; \quad l \nabla \chi + \frac{\partial \eta}{\partial x} V_A \cos \alpha = 0$$

$$\left[\rho \left\{ \mathbf{n} \nabla \left(v \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial t} + V_A \cos \alpha \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) + l \left(\nabla \psi \Delta \psi - \frac{1}{2} \nabla (\nabla \psi)^2 - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - \nabla \chi \Delta \chi + \frac{1}{2} \nabla (\nabla \chi)^2 + 2v \nabla (l^{-2} \mathbf{n} (l \nabla) \nabla \psi) \right\} \right] = 0 \quad (1.4)$$

$$[\mu \{ \mathbf{n} (\mathbf{n} \nabla) - l (l \nabla) \} \nabla \psi] = 0$$

Производные ψ и χ должны стремиться к нулю при $|z| \rightarrow \infty$. Кроме того, в дальнейшем предполагаем, что ψ , χ и η либо периодические функции x , либо стремятся к конечным значениям при $x \rightarrow \pm \infty$.

2. Линейное приближение. Будем искать решение линеаризованных уравнений (1.3) с граничными условиями (1.4) в виде $f = f_a(z) \exp(ikx - i\omega t)$. В результате имеем систему уравнений и граничных условий при $z=0$

$$i\omega (\psi_a'' - k^2 \psi_a) + ik V_A \cos \alpha (\chi_a'' - k^2 \chi_a) + v (\psi_a^{IV} - 2k^2 \psi_a'' + k^4 \psi_a) = 0$$

$$\omega \chi_a = -V_A k \cos \alpha \psi_a$$

$$\omega \eta_a = k \psi_a; \quad [\psi_a'] = 0; \quad \chi_a + \eta_a V_A \cos \alpha = 0 \quad (2.1)$$

$$[\rho \{ v (\psi_a''' - 3k^2 \psi_a') + i (\omega \psi_a' + k V_A \cos \alpha \chi_a') \}] = 0$$

$$[\mu (\psi_a'' + k^2 \psi_a)] = 0$$

где штрих означает дифференцирование по z .

С учетом условий затухания возмущений при $z \rightarrow \pm \infty$ решение уравнений (2.1) запишется в виде

$$\psi_a = Q_1 l^{-\kappa_+ |k| z} + Q_2 l^{-\kappa_- |k| z}$$

$$\chi_a = -\frac{k}{\omega} V_A \cos \alpha \psi_a; \quad \kappa_+ = 1; \quad \kappa_- = -1 \quad (2.2)$$

$$q = \left\{ 1 - \frac{i}{v\omega} \left(\frac{\omega^2}{k^2} - V_A^2 \cos^2 \alpha \right) \right\}^{1/2}; \quad \operatorname{Re} q > 0; \quad q \neq 1$$

Подставляя (2.2) в граничные условия (2.1), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений для определения $Q_{1\pm}$, $Q_{2\pm}$. Условие существования нетривиального решения этой системы дает дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} &(\mu_+ q_+ + \mu_-) \{ \mu_+ (q_+^2 + 1) + \mu_- (q_-^2 + 2q_- - 1) \} + \\ &+ (\mu_- q_- + \mu_+) \{ \mu_- (q_-^2 + 1) + \mu_+ (q_+^2 + 2q_+ - 1) \} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Введем длину диссипации $\lambda = (\mu_+ + \mu_-)/c(\rho_+ + \rho_-)$. При $k\lambda \sim 1$ члены, описывающие вязкость, в первом уравнении (2.1) одного порядка с остальными членами. В [4, 2] показано, что в отсутствие диссипации ($k\lambda \rightarrow 0$) по поверхности тангенциального разрыва могут распространяться волны, имеющие дисперсионное уравнение

$$\omega = ck, \quad c^2 = \frac{\rho_+ V_{A+}^2 \cos^2 \alpha_+ + \rho_- V_{A-}^2 \cos^2 \alpha_-}{\rho_+ + \rho_-} \quad (2.4)$$

В длинноволновом приближении ($k\lambda \ll 1$), отыскивая решения, близкие к (2.4), получим

$$\begin{aligned} \omega &= ck - i\beta |k|^{1/2} - \gamma k |k|^{1/2} + O(k^2 \lambda^2) \\ \beta &= \sqrt{|S|} (\sqrt{\mu_+} + \sqrt{\mu_-}); \quad \gamma = \sqrt{|S|} (\sqrt{\mu_+} - \sqrt{\mu_-}) \operatorname{sgn} S \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$S = \frac{2\mu_+ \mu_-}{W(\rho_+ + \rho_-)(\mu_+ + \mu_-)^2}; \quad W = \frac{c(\rho_+ + \rho_-)^2}{\rho_+ \rho_- (V_{A+}^2 \cos^2 \alpha_+ - V_{A-}^2 \cos^2 \alpha_-)}$$

При выводе (2.5) предполагалось, что $\rho_+ \sim \rho_-$, $\mu_+ \sim \mu_-$, $V_{A+}^2 \cos^2 \alpha_+ - V_{A-}^2 \cos^2 \alpha_- \sim c^2$.

Формулы (2.2) и (2.5) показывают, что на больших расстояниях от разрыва характерным масштабом изменения всех величин является $|k|^{-1}$, но вблизи разрыва образуется пограничный слой толщины порядка $(\lambda/|k|)^{1/2}$. Однако $Q_2 \sim \sqrt{|k|} \lambda Q_1$, поэтому $\psi_a' \sim k \psi_a$ не только вне, но и внутри пограничного слоя.

3. Вывод уравнения для нелинейных волн малой амплитуды. Рассматриваются волны амплитуды $\varepsilon \ll 1$. За амплитуду волны можно принять отношение максимального смещения поверхности разрыва к длине волны L : $\eta_m/L \sim \varepsilon$.

Отношение второго члена к первому в (2.5) порядка $\sqrt{\lambda/L}$. Для того чтобы диссипативные эффекты конкурировали с нелинейными, необходимо, чтобы это отношение было одного порядка с параметром нелинейности, поэтому полагаем $\sqrt{\lambda/L} = \varepsilon^2$.

Введем зависимые безразмерные переменные $\eta' = \eta/L$, $\psi' = \psi/cL$, $\chi' = \chi/cL$. Штрихи в дальнейшем опускаем. Удобно перейти в движущуюся систему координат, вводя $\xi = (x - ct)/L$. Переходя к переменной $\zeta = (z - \eta)/L$, перепишем уравнение поверхности разрыва в виде $\zeta = 0$. Нелинейные и диссипативные эффекты оказывают существенное влияние на форму волны, когда последняя проходит расстояние порядка $\varepsilon^{-1}L$, т. е. за время порядка $\varepsilon^{-1}L/c$. Поэтому вводится новая переменная $\tau = \varepsilon ct/L$.

Согласно результатам линейной теории, вблизи разрыва образуется пограничный слой толщины порядка $\sqrt{\lambda L} = \varepsilon L$. Поэтому удобно разделить плоскость ξ, ζ на две области: внешнюю, определяемую условием $|\zeta| \geq \varepsilon \sigma_0$, и внутреннюю, определяемую условием $|\zeta| \leq \varepsilon \sigma_0$, где $1 \ll \sigma_0 \ll \varepsilon^{-1}$, и во внутренней области ввести новую переменную $\sigma = \varepsilon^{-1} \zeta$. После этого решение находится во внешней и внутренней областях отдельно и при $\sigma = \sigma_0$ сращивается.

Решение во внешней области. В новых переменных уравнения (1.3) переписутся в виде

$$\Delta_e(\varepsilon D_\tau \psi - D_\xi \psi) + l_v(\nabla_e \psi \times \nabla_e \Delta_e \psi) = \frac{1}{c} V_A \nabla_e \Delta_e \chi + l_v(\nabla_e \chi \times \nabla_e \Delta_e \chi) + \varepsilon^2 R \Delta_e^2 \psi$$

$$\varepsilon D_\tau \chi - D_\xi \chi = \frac{1}{c} V_A \nabla_l \psi + l_v(\nabla_l \chi \times \nabla_l \psi) \quad (3.1)$$

$$D_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad D_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\nabla_l = \left(D_\xi; 0; \frac{\partial}{\partial \xi} \right); \quad \Delta_l = \nabla_l^2; \quad R = \frac{v}{c\lambda} \sim 1$$

Решение (3.1) ищем в виде $f = \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \varepsilon^3 f^{(3)} + \dots$

Введем разложение в интеграл Фурье для функций, стремящихся к нулю на бесконечности и в ряды Фурье для периодических функций (L — период)

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\xi} dk; \quad f_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi$$

$$f(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{2\pi i k \xi / L}; \quad f_k = \frac{1}{L} \int_0^L f(\xi) e^{-2\pi i k \xi / L} d\xi$$

Отметим, что ψ , χ и η могут стремиться к постоянным ненулевым значениям при $\xi \rightarrow \pm\infty$, поэтому преобразование Фурье от них может не существовать. Однако всегда существует преобразование Фурье от их производных.

Уравнения, получаемые из (3.1) в первом приближении по ε , совпадают с соответствующими уравнениями, полученными в [4]. Их решение, затухающее при $k\xi \rightarrow \infty$, записывается в виде

$$\left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \xi} \right)_k = A_k^{(1)} e^{-\kappa|k|\xi}; \quad \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \xi} = -\frac{V_A \cos \alpha}{c} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \xi} \quad (3.2)$$

Собирая члены порядка ε^2 в (3.1) и учитывая (3.2), получим

$$\frac{\partial^3 \psi^{(2)}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 \psi^{(2)}}{\partial \xi \partial \xi^2} - \frac{V_A \cos \alpha}{c} \left(\frac{\partial^3 \chi^{(2)}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial^3 \chi^{(2)}}{\partial \xi \partial \xi^2} \right) =$$

$$= \frac{c^2 - V_A^2 \cos^2 \alpha}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial \xi \partial \xi} \right) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial \xi} = -\frac{V_A \cos \alpha}{c} \left(\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \tau} \right)$$

По сравнению с соответствующей системой в [4] (3.3) содержит дополнительные члены, появляющиеся за счет замены переменной $\xi = (z - \eta)/L$.

Исключая с помощью второго уравнения $\chi^{(2)}$ из первого уравнения (3.3), учитывая (3.2) и переходя к фурье-образам, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \xi} \right)_k - k^2 \left(\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \xi} \right)_k =$$

$$= -ik\kappa \int_{-\infty}^{\infty} (|k'| + k \operatorname{sgn} k') A_{k'} \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right)_{k-k'} e^{-\kappa|k'|\xi} dk' \quad (3.4)$$

Решение (3.4), убывающее при $\kappa\xi \rightarrow \infty$, запишется в виде

$$\left(\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \xi} \right)_k = A_k^{(2)} e^{-\kappa|k|\xi} + ik\kappa \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn} k'}{k-k'} A_k^{(1)} \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right)_{k-k'} e^{-\kappa|k'|\xi} dk' \quad (3.5)$$

Решение во внутренней области. В новых переменных во внутренней области уравнения (1.3) и граничные условия (1.4), выполненные при $\sigma=0$, переписутся в следующей форме:

$$\begin{aligned} \Delta_i(\varepsilon D_\tau \psi - D_\xi \psi) + \varepsilon^{-2} \mathbf{l}_v (\nabla_i \psi \times \nabla_i \Delta_i \psi) = \\ = \frac{V_A \cos \alpha}{c} D_\xi \Delta_i \chi + \varepsilon^{-2} \mathbf{l}_v (\nabla_i \chi \times \nabla_i \Delta_i \chi) + R \Delta_i^2 \psi \\ \varepsilon D_\tau \chi - D_\xi \chi = \frac{V_A \cos \alpha}{c} D_\xi \psi + \varepsilon^{-2} \mathbf{l}_v (\nabla_i \chi \times \nabla_i \psi) \\ D_\tau^i = \frac{\partial}{\partial \tau} - \varepsilon^{-1} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \sigma}; \quad D_\xi^i = \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon^{-1} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \sigma}; \quad \nabla_i = \left(\varepsilon D_\xi^i; 0; \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \\ \Delta_i = \nabla_i^2 \\ \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial \tau} - \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0; \quad \left[\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right] = 0; \quad \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{V_A \cos \alpha}{c} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0 \\ \left[\rho \left\{ \mathbf{n} \nabla_i \left(R \Delta_i \psi - \varepsilon D_\tau \psi + D_\xi \psi + \frac{1}{c} V_A \cos \alpha D_\xi \chi \right) + \varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \Delta_i \psi - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla_i \psi)^2 - \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \Delta_i \chi + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla_i \chi)^2 + 2\varepsilon^2 R \frac{\partial}{\partial \xi} (l^{-2} \mathbf{n} (\mathbf{l} \nabla_i) \nabla_i \psi) \right\} \right] = 0 \\ \left[\rho R \left\{ \mathbf{n} (\mathbf{n} \nabla_i) - \varepsilon \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} \nabla_i \psi \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Решение системы уравнений и граничных условий (3.6) также ищется в виде ряда по ε . Однако дополнительно предполагается, что $\psi^{(1)}$, $\chi^{(1)}$ не зависят от σ . Это предположение вытекает из требования, чтобы x - и z -компоненты возмущений скорости и магнитного поля были одного порядка, и согласуется с результатами линейной теории.

Первое уравнение (3.6) в первом приближении по ε удовлетворяется тождественно. Собирая члены порядка ε во втором уравнении (3.6) и первом граничном условии с учетом сделанного выше предположения, получим

$$-\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{V_A \cos \alpha}{c} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \quad (3.7)$$

Остальные граничные условия (3.6) в первом приближении по ε удовлетворяются либо автоматически, либо в силу (3.7).

Собирая члены порядка ε^2 в (3.6), получим с учетом (3.7) уравнения и граничные условия при $\sigma=0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \psi^{(2)}}{\partial \xi \partial \sigma^2} + \frac{V_A \cos \alpha}{c} \frac{\partial^3 \chi^{(2)}}{\partial \xi \partial \sigma^2} + R \frac{\partial^4 \psi^{(2)}}{\partial \sigma^4} = 0, \\ \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial \xi} = -\frac{V_A \cos \alpha}{c} \left(\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \tau} \right) \\ \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \xi} = 0; \quad \left[\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \sigma} \right] = 0; \quad \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{V_A \cos \alpha}{c} \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial \xi} = 0 \\ \left[\rho \left\{ \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial \xi \partial \sigma} + \frac{V_A \cos \alpha}{c} \frac{\partial^2 \chi^{(2)}}{\partial \xi \partial \sigma} + R \frac{\partial^3 \psi^{(2)}}{\partial \sigma^3} \right\} \right] = 0; \quad \left[\rho R \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial \sigma^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Необходимо еще поставить граничные условия при $|\sigma| \rightarrow \infty$. Для этого уточним выбор величины σ_0 , определяющей толщину пограничного слоя. Обратимся к линейной теории. В формуле (2.2) для ψ_a второе слагаемое появляется из-за наличия вязкости. Именно оно в длинноволновом приближении описывает пограничный слой. Поэтому естественно определить σ_0 из условия, что при $\sigma = \sigma_0$ второе слагаемое пренебрежимо мало по сравнению с первым. Точнее, необходимо, чтобы отношение второго члена к первому было меньше либо порядка ε^m , где m — число членов, удерживаемых в разложении по ε . Ясно, что этому условию и условию $\varepsilon \sigma_0 \ll 1$ легко удовлетворить, полагая $\sigma_0 = -\ln \varepsilon^{m_1}$, где m_1 достаточно велико. При этом необходимо потребовать, чтобы $\psi^{(2)}$, $\psi^{(3)}$ и т. д. не содержали членов, экспоненциально растущих при $\kappa \sigma \rightarrow \infty$, так как такие члены при $\sigma = \sigma_0$ могут стать порядка $\varepsilon^{-1} \psi^{(2)}$, $\varepsilon^{-1} \psi^{(3)}$ и т. д. соответственно и разложение по ε станет неравномерным внутри пограничного слоя.

Переходя к преобразованию Фурье, запишем решение (3.8), не содержащее экспоненциально растущих членов, в виде

$$\left(\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \xi} \right)_k = i \kappa C_k^{(2)} \left(\sigma - 2 \frac{1 - e^{-\kappa \sigma}}{s_+ - s_-} \right) - \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial \xi} \right)_k \quad (3.9)$$

$$s = \{1 + i \kappa \operatorname{sgn}(kW)\} \sqrt{\frac{(\rho_+ + \rho_-) |k|}{2 c \rho R |W|}}, \quad C_{k+}^{(2)} = C_{k-}^{(2)}$$

Собирая члены порядка ε^3 в (3.6), получим систему уравнений и граничных условий при $\sigma = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \psi^{(3)}}{\partial \xi \partial \sigma^2} + \frac{V_A \cos \alpha}{c} \frac{\partial^3 \chi^{(3)}}{\partial \xi \partial \sigma^2} + R \frac{\partial^4 \psi^{(3)}}{\partial \sigma^4} &= \frac{\partial^3 \psi^{(2)}}{\partial \tau \partial \sigma^2} + \kappa \frac{\rho_+ + \rho_-}{c \rho W} \left(\frac{\partial^3 \eta^{(1)}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right) \\ \frac{\partial \chi^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{V_A \cos \alpha}{c} \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial \xi} &= \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial \tau} \\ \Phi &= - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial \xi \partial \sigma} + \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial \sigma^2} \left(\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \tau} \right) \\ \left[\frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial \sigma} \right] &= 0; \quad \left[\rho R \left(\frac{\partial^2 \psi^{(3)}}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2 \eta^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \right] = 0 \\ \left[\rho \left\{ \frac{\partial^2 \psi^{(3)}}{\partial \xi \partial \sigma} + \frac{V_A \cos \alpha}{c} \frac{\partial^2 \chi^{(3)}}{\partial \xi \partial \sigma} + R \frac{\partial^3 \psi^{(3)}}{\partial \sigma^3} - \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial \tau \partial \sigma} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \kappa \frac{\rho_+ + \rho_-}{c \rho W} \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \eta^{(1)}}{\partial \xi^2} - \Phi \right) \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

С помощью преобразования Фурье решение (3.10) записывается в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial \sigma} \right)_k &= \kappa C_k^{(3)} + i \frac{\rho W (c^2 + V_A^2 \cos^2 \alpha)}{k c (\rho_+ + \rho_-)} \frac{\partial C_k^{(2)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right)^2 \right\}_k + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} C_{k'}^{(2)} C_{k-k'}^{(2)} dk' - i k \sigma \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right)_k + (P_1 + \sigma P_2) e^{-\kappa \sigma} + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \{ (P_3 + \sigma P_4) e^{-\kappa s' \sigma} + P_5 e^{-\kappa (s' + s'') \sigma} \} dk'; \quad C_{k+}^{(3)} = C_{k-}^{(3)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Величины s' и s'' получаются из s заменой k на k' и $k-k'$ соответственно. Функции P_1 и P_2 зависят от k и τ , а P_3 , P_4 и P_5 — от k , k' и τ . Их явный вид не выписывается, так как это не требуется для дальнейшего.

Сращивание решений. Сращивая решения на границе $\sigma = \kappa \sigma_0$ ($\xi = \kappa \varepsilon \sigma_0$), естественно разложить все величины во внешней области в ряды

Тейлора по степеням ξ . Тогда условия срачивания принимают вид

$$\left(\frac{\partial \psi_e^{(1)}}{\partial \xi} \right)_k \Big|_{\xi=0} = \left(\frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial \xi} \right)_k \Big|_{\sigma=\kappa\sigma_0} ; \quad \left(\frac{\partial \psi_e^{(1)}}{\partial \xi} \right)_k \Big|_{\xi=0} = \left(\frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial \sigma} \right)_k \Big|_{\sigma=\kappa\sigma_0} \quad (3.12)$$

$$\left(\frac{\partial \psi_e^{(2)}}{\partial \xi} \right)_k \Big|_{\xi=0} + \kappa\sigma_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi_e^{(1)}}{\partial \xi} \right)_k \Big|_{\xi=0} = \left(\frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial \xi} \right)_k \Big|_{\sigma=\kappa\sigma_0}$$

$$\left(\frac{\partial \psi_e^{(2)}}{\partial \xi} \right)_k \Big|_{\xi=0} + \kappa\sigma_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi_e^{(1)}}{\partial \xi} \right)_k \Big|_{\xi=0} = \left(\frac{\partial \psi_i^{(3)}}{\partial \sigma} \right)_k \Big|_{\sigma=\kappa\sigma_0}$$

С помощью (3.2), (3.5), (3.7), (3.9) и (3.11) равенства (3.12) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} A_k^{(1)} &= \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right)_k ; \quad A_k^{(1)} = -iC_k^{(2)} \operatorname{sgn} k \\ A_{k\pm}^{(2)} &= \left(\frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \tau} \right)_k \mp ik \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn} k'}{k-k'} A_{k'}^{(1)} \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right)_{k=k'} dk' \mp \frac{2ikC_k^{(2)}}{s_+ - s_-} \\ A_{k\pm}^{(2)} &= -iC_k^{(3)} \operatorname{sgn} k \pm \frac{\rho_{\pm} W(c^2 + V_{A\pm}^2 \cos^2 \alpha_{\pm})}{|k|c(\rho_+ + \rho_-)} \frac{\partial C_k^{(2)}}{\partial \tau} \mp \\ &\mp \frac{i}{2} \operatorname{sgn} k \left\{ \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right)_k^2 \right\} \mp i \operatorname{sgn} k \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k'}{k-k'} A_{k'}^{(1)} \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right)_{k=k'} dk' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} C_{k'}^{(2)} C_{k-k'}^{(2)} dk' \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

При выводе (3.13) использовалось то обстоятельство, что, как уже отмечалось, члены, содержащие экспоненты, могут быть сделаны сколь угодно высокого порядка по ε с помощью надлежащего выбора σ_0 и потому могут быть отброшены. Отметим, что члены, пропорциональные σ_0 , сокращаются и, таким образом, (3.13) не содержит σ_0 .

Выражая с помощью первых трех равенств (3.13) $A_k^{(1)}$, $A_{k\pm}^{(2)}$ и $C_k^{(2)}$ через $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$ и подставляя полученные выражения в четвертое равенство (3.13), получим два уравнения (соответствующие верхнему и нижнему знакам) с одной произвольной функцией $C_k^{(3)}(\tau)$. Исключая $C_k^{(3)}(\tau)$, окончательно получим уравнение

$$\begin{aligned} cW \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \tau} \right)_k + i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{k' \operatorname{sgn} k - k \operatorname{sgn} k'}{k-k'} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} k \{1 - \operatorname{sgn} k' \operatorname{sgn}(k-k')\} \right) \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right)_{k'} \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right)_{k=k'} dk' + \\ + \frac{2|k|}{s_+ - s_-} \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right)_k = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Обратное преобразование Фурье (3.14) дает

$$cW \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ H \left(\eta^{(1)} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \eta^{(1)} H \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right) \right\} - \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} H \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \frac{W}{V\lambda} (\beta - \gamma H) M \left(\frac{\partial^2 \eta^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) = 0 \quad (3.15)$$

$$H(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi') d\xi'}{\xi' - \xi}, \quad M(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi') d\xi'}{V2\pi |\xi - \xi'|}$$

При выводе (3.15) использовались формулы

$$(H(f))_k = i \operatorname{sgn} k f_k; \quad H(fg) = H(H(f)H(g)) + fH(g) + gH(f) \quad (3.16)$$

Возвращаясь к исходным переменным и полагая $\eta = \varepsilon L \eta^{(1)}$, окончательно получим

$$W \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ H \left(\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \eta H \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right\} - \frac{\partial \eta}{\partial x} H \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - W(\beta - \gamma H) M \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3.17)$$

Группа членов, содержащих оператор Гильберта H , описывает влияние нелинейности, а последний член, содержащий оператор M , — диссипацию вследствие наличия вязкости. В отсутствие вязкости ($\beta = \gamma = 0$) уравнение (3.17) совпадает с полученным в [4] уравнением (2.23) с учетом того, что в [4] оператор Гильберта определен с обратным знаком по сравнению с (3.15) и перед последним членом в уравнении (2.23) работы [4] стоит неверный знак.

Нетрудно проверить, что в линейном приближении (3.17) дает закон дисперсии (2.5). Отметим, что уравнение (3.17) инвариантно относительно сдвига: вместе с η его решением будет и $\eta + \text{const}$.

4. Диссипация энергии возмущений. Получим интегральное соотношение, описывающее диссипацию энергии периодических возмущений, либо возмущений, стремящихся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. Для этого применим преобразование Гильберта к уравнению (3.17). Полученное уравнение умножим на $\partial \eta / \partial x$ и сложим с уравнением (3.17), предварительно продифференцированным по x и умноженным на $H(\eta)$. Результат сложения проинтегрируем по x от 0 до L в случае периодических возмущений (L — период) или от $-\infty$ до $+\infty$ в случае возмущений, затухающих на бесконечности. С помощью (3.16) и равенств

$$H^2 = -1; \quad \int fH(g) dx = - \int gH(f) dx \quad (4.1)$$

(интеграл берется в пределах от 0 до L или от $-\infty$ до $+\infty$) можно показать, что при этом вклад нелинейных членов равен нулю. Используя очевидное равенство

$$\int fM(g) dx = \int gM(f) dx \quad (4.2)$$

а также доказываемое с помощью перехода к преобразованию Фурье утверждение, что операторы $\partial / \partial x$, H и M попарно коммутируют, находим, что вклад от члена, пропорционального γ , также равен нулю. В результате окончательно получим

$$\frac{dI}{dt} = -2\beta \int H \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) M \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) dx; \quad I = \int \frac{\partial \eta}{\partial x} H(\eta) dx \quad (4.3)$$

С помощью равенства Парсеваля имеем

$$I = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |k| |\eta_k|^2 dk > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} H \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) M \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{3/2} |\eta_k|^2 dk > 0$$

(в случае периодических функций интегралы в парных частях равенств следует заменить рядами).

Можно показать, что I является (с точностью до умножения на константу) энергией возмущений в первом приближении по ϵ .

5. Отсутствие стационарных решений. Рассмотрим решения (3.17), зависящие от $\theta = x - Vt$. Уравнение (3.17) переписывается в виде

$$W(V-c)\eta' + \{H(\eta\eta') - \eta H(\eta')\}' - \eta' H(\eta') - W(\beta - \gamma H)M(\eta'') = 0 \quad (5.1)$$

где штрих означает производную по θ . Уравнение (5.1) не может иметь периодических решений, а также решений, стремящихся к нулю при $|\theta| \rightarrow \infty$, так как энергия таких решений должна была бы сохраняться, что противоречит (4.3).

Допустим, что существуют решения (5.1), стремящиеся к различным постоянным значениям на бесконечности, т. е. такие, что

$$\eta(+\infty) - \eta(-\infty) = \delta \neq 0.$$

С помощью преобразования Фурье нетрудно доказать формулу

$$HM^2 \frac{d}{d\theta} = -1 \quad (5.2)$$

Применяя к (5.1) оператор $(\gamma + \beta H)M d/d\theta$ и используя (4.1), (5.2) и отмеченные выше коммутативные свойства операторов H , M и $d/d\theta$, получим

$$(\beta^2 + \gamma^2)\eta' = \frac{d}{d\theta}(\gamma + \beta H)M\{W(V-c)\eta' + (H(\eta\eta') - \eta H(\eta'))' - \eta' H(\eta')\}$$

Интегрируя последнее равенство по θ от $-\infty$ до $+\infty$, получим $\delta = 0$, что приводит к противоречию.

Таким образом, (5.1) не имеет ни периодических решений, ни решений, стремящихся к постоянным значениям на бесконечности.

6. Численное исследование эволюции периодических возмущений. Рассмотрим эволюцию возмущения, задаваемого при $t=0$ формулой

$$\eta = \eta_0 \sin 2\pi x/L \quad (6.1)$$

Вводя новые безразмерные переменные

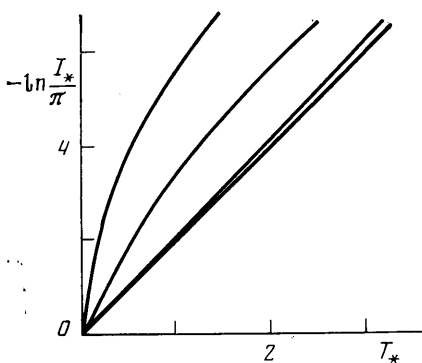
$$T = \frac{4\pi^2\eta_0}{|W|L^2}t; \quad X = \frac{2\pi}{L}(x - ct); \quad h = \frac{\text{sgn } W}{\eta_0}\eta; \quad \beta^* = \beta \frac{|W|}{\eta_0} \left(\frac{L}{2\pi}\right); \quad \gamma^* = \frac{\gamma}{\beta}$$

разлагая h в ряд Фурье

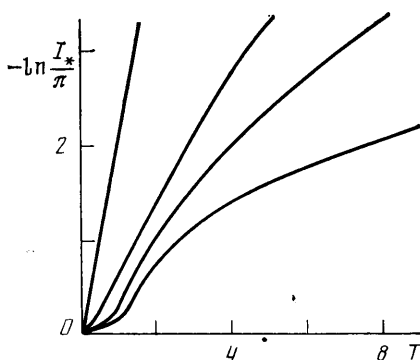
$$h = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(T) \cos nX + b_n(T) \sin nX)$$

и используя формулы $H(e^{inX}) = i \text{sgn } n e^{inX}$, $M(e^{inX}) = |n|^{-1/2} e^{inX}$, сведем (3.17) к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

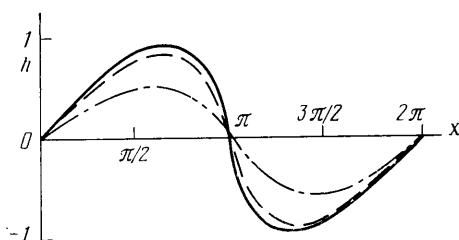
$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dT} &= n \sum_{m=1}^{\infty} m (b_m a_{n+m} - a_m b_{n+m}) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} m (n-m) (a_m b_{n-m} + b_m a_{n-m}) - \\ &\quad - \beta^* n^{1/2} (a_n - \gamma^* b_n) \\ \frac{db_n}{dT} &= n \sum_{m=1}^{\infty} m (a_m a_{n+m} + b_m b_{n+m}) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} m (n-m) (a_m a_{n-m} - b_m b_{n-m}) - \\ &\quad - \beta^* n^{1/2} (b_n + \gamma^* a_n) \end{aligned} \quad (6.2)$$



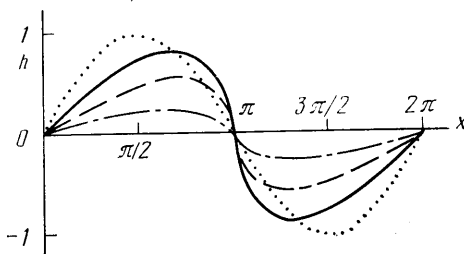
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Интегрируя (3.17) по периоду, нетрудно показать, что среднее значение η сохраняется. Поскольку это среднее значение равно нулю при $t=0$, ряд Фурье для h не содержит аддитивной функции T .

При $\gamma_*=0$ возможны нечетные решения с $a_n=0$ ($n=1, 2, \dots$). В этом случае уравнение для b_n отличается от уравнения, полученного в [4] только линейным членом, учитывающим диссипацию.

С помощью обрезания бесконечная система (6.2) сводилась к конечной, которая решалась численно.

Для исследования влияния нелинейности на скорость затухания волны перейдем от безразмерного времени T к $T_*=\beta_*T$. Тогда в (6.2) исчезает коэффициент β_* перед членами, описывающими диссипацию, и появляется β_*^{-1} перед нелинейными членами. Уменьшение β_* соответствует увеличению нелинейности. На фиг. 1 представлена зависимость $\ln(I_*/\pi)$ от T_* ($I_*= \eta_0^{-2}I$, π — значение I_* при $T=0$). Кривые 1–4 соответствуют $\beta_*= \infty$ (линейная теория); 1; 0,2; 0,05. Как видим, с увеличением нелинейности затухание усиливается, что объясняется ускорением генерации быстро затухающих высших гармоник.

На фиг. 2 представлена зависимость $\ln(I_*/\pi)$ от T , показывающая изменение скорости затухания с изменением β_* при фиксированной нелинейности. Кривые 1–4 соответствуют $\beta_*=1; 0,2; 0,05; 0,02$. На кривых 3 и 4 имеются параллельные участки (приблизительно от $T=0,8$ до $T=1,8$), соответствующие одинаковой скорости затухания. Ситуация аналогична затуханию звуковых волн при больших числах Рейнольдса, когда скорость затухания не зависит от величины вязкости.

При отсутствии диссипации волна опрокидывается при $T \approx 0,55$ [4]. На фиг. 3 представлена зависимость h от x при $T=0,6$ (т. е. чуть позже времени опрокидывания) для различных значений β_* . Штриховая, штрихпунктирная и сплошная кривые соответствуют $\beta_*=1; 0,2; 0,02$. Крутизна профиля растет с уменьшением β_* .

На фиг. 4 показана эволюция возмущения при $\beta_*=0,05$. Точечная, сплошная, штриховая и штрихпунктирная кривые соответствуют $T=0$; 0,8; 2; 6. Все зависимости, представленные на фиг. 1–4, получены при $\gamma_*=0$. Отличие γ_* от нуля практически не влияет на скорость затухания волны и лишь немного искажает ее форму.

Результаты численных расчетов показывают, что учет вязкости препятствует опрокидыванию волны, наблюдаемому в бездиссипативном случае.

Автор благодарит Л. С. Федорову за помощь при проведении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Parker E. N.* The nature of the sunspot phenomenon. II. Internal overstable modes.— *Solar Phys.*, 1974, v. 37, № 1, p. 127–144.
2. *Roberts B.* Wave propagation in a magnetically structured atmosphere. I. Surface waves at a magnetic interface.— *Solar Phys.*, 1981, v. 69, № 1, p. 27–38.
3. *Gordon B. E., Hollweg J. V.* Collisional damping of surface waves in the solar corona.— *Astrophys. J.*, 1983, v. 266, № 1, p. 373–382.
4. *Рудерман М. С.* Распространение нелинейных альфвеновских поверхностных волн по тангенциальному магнитогиродинамическому разрыву в несжимаемой жидкости.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1985, № 1, с. 98–105.

Москва

Поступила в редакцию
27.XII.1985