МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1986

УДК 532.5.013.4:534.1

О ВОЗНИКНОВЕНИИ СТАЦИОНАРНОГО РЕЛЬЕФА НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В ВИБРАЦИОННОМ ПОЛЕ

ЛЮБИМОВ Д. В., ЧЕРЕПАНОВ А. А.

Вибрации сосуда существенно влияют на поведение поверхности раздела находящихся в нем жидкостей. Так, вертикальные вибрации могут привести как к параметрическому возбуждению волн (рябь Фарадея), так и к подавлению неустойчивости Рэлея – Тейлора [1–2]. В настоящее время влияние вертикальных вибраций на поведение поверхности жидкости изучено достаточно подробно (см., например, обзор [3]). Менее изучен вопрос о поведении поверхности раздела жидкостей при горизонтальных вибрациях. В экспериментальных работах [4, 5] обнаружено интересное явление: при достаточно сильных горизонтальных вибрациях сосуда, содержащего жидкость со свободной поверхностью, жидкость собирается вблизи одной из вертикальных стенок сосуда, причем свободная поверхность является практически плоской и неподвижной относительно сосуда, а угол ее наклона к горизонту зависит от скорости вибраций. Если же в сосуде находится система несмешивающихся жидкостей с соизмеримыми, но различными плотностями, то горизонтальные вибрации приводят к образованию неподвижного волнового рельефа на поверхности раздела. В [6] на основе усредненных уравнений движения жидкости в вибрационном поле было дано объяснение поведения жидкости со свободной границей. Настоящая работа посвящена анализу поведения поверхности раздела жидкостей со сравнимыми плотностями в высокочастотном вибрационном поле.

1. Пусть две несмешивающиеся несжимаемые жидкости заполняют сосуд, совершающий вибрации по закону

$$\mathbf{r}=a\mathbf{k}\sin\omega t+\mathbf{r}_0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}$ – координата произвольной точки сосуда, $\mathbf{r}_0$ – ее среднее значение, ω – частота вибраций, a – их амплитуда, $\mathbf{k}$ – единичный вектор вдоль оси вибраций.

В системе отсчета, связанной с сосудом, уравнения движения жидкостей имеют вид

$$\frac{\partial\mathbf{v}_\beta}{\partial t}+(\mathbf{v}_\beta\nabla)\mathbf{v}_\beta=-\frac{1}{\rho_\beta}\nabla p_\beta+\nu_\beta\Delta\mathbf{v}_\beta-g\boldsymbol{\gamma}+a\omega^2\mathbf{k}\sin\omega t,\qquad \nabla\mathbf{v}_\beta=0,\qquad \beta=1,2 \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор, направленный вертикально вверх, индекс β нумерует жидкости, остальные обозначения общепринятые.

На твердых стенках сосуда выполняются условия прилипания, а на границе раздела жидкостей $F(\mathbf{r},t)=0$ – условия баланса напряжений, непрерывности скорости и кинематическое условие

$$-[\sigma_{ij}]n_j+[p]n_i=\alpha(\nabla\mathbf{n})n_i \tag{1.3}$$

$$[\mathbf{v}]=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla F=0,\qquad \mathbf{n}=\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \tag{1.4}$$

Здесь σ_{ij} – тензор вязких напряжений, α – коэффициент поверхностного натяжения, $\mathbf{n}$ – вектор нормали к поверхности, $[f]=f_1-f_2$.

Если частота вибраций достаточно велика, так что $\omega \gg \nu/L^2$, где L — характерный размер гидродинамических структур, то все процессы в жидкости можно разделить на быстрые и медленные. Эффективное расщепление задачи на быструю пульсационную и усредненную части возможно, если имеются основания отбросить нелинейные члены в уравнениях пульсационной компоненты движения. Пульсационная компонента скорости жидкости по порядку величины равна скорости самого сосуда в лабораторной системе отсчета $v=a\omega$, поэтому нелинейные члены можно отбросить, если $a^2\omega^2/L \ll a\omega^2$, что накладывает ограничения на амплитуду вибраций $a \ll L$. В дальнейшем будем считать, что условия $\omega \gg \nu/L^2$ и $a \ll L$ выполнены, так что амплитуду вибраций a будем полагать малой, амплитуду скорости вибраций $b=a\omega$ конечной, а величину $b\omega$ большой.

Перейдем теперь к выводу усредненных уравнений движения и граничных условий. При высокочастотных вибрациях во всех переменных величинах можно выделить пульсационную, быстро меняющуюся компоненту и медленную часть, характерные времена изменения которой велики по сравнению с ω^{-1}. Таким образом, возникает иерархия времен, что делает естественным при усреднении уравнений и граничных условий применение метода многих масштабов [7]. В соответствии с основной идеей этого метода введем последовательность времен

$$t_{-1}=\omega t, \quad t_0=t, \quad t_1=\omega^{-1}t, \dots \tag{1.5}$$

и будем считать, что все переменные в (1.2)—(1.4) зависят как от быстрого времени t_{-1}, так и от медленных времен t_0, $t_1\dots$ Тогда производную по времени от любой величины $f(t)$, а также искомые поля скоростей, давлений и функцию F, определяющую границу раздела, представим в виде рядов

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\omega\frac{\partial f}{\partial t_{-1}}+\frac{\partial f}{\partial t_0}+\omega^{-1}\frac{\partial f}{\partial t_1}+\dots, \qquad \mathbf{v}_\beta=\mathbf{v}_\beta^{(0)}+\omega^{-1}\mathbf{v}_\beta^{(1)}+\dots$$
$$p_\beta=\omega p_\beta^{(-1)}+p_\beta^{(0)}+\omega^{-1}p_\beta^{(1)}+\dots, \qquad F=F_0+\omega^{-1}F_1+\dots \tag{1.6}$$

Уравнения (1.2) дают в главных порядках по ω^{-1}

$$\omega\frac{\partial \mathbf{v}_\beta^{(0)}}{\partial t_{-1}}=-\omega\frac{\nabla p_\beta}{\rho_\beta}+b\omega\mathbf{k}\sin t_{-1}, \qquad \nabla\mathbf{v}_\beta^{(0)}=0 \tag{1.7}$$

откуда

$$\mathbf{v}_\beta^{(0)}=b\mathbf{V}_\beta\cos t_{-1}+\mathbf{u}_\beta, \qquad p_\beta^{(-1)}=bP_\beta\sin t_{-1} \tag{1.8}$$

$$\rho_\beta(\mathbf{V}_\beta+\mathbf{k})=\nabla P_\beta, \qquad \nabla\mathbf{V}_\beta=0, \qquad \nabla\mathbf{u}_\beta=0 \tag{1.9}$$

где поля $\mathbf{V}_\beta$, $\mathbf{u}_\beta$, P_β не зависят от быстрого времени t_{-1}.

Уравнения (1.7), определяющие по существу амплитуды пульсационных скоростей $\mathbf{V}_\beta$, не содержат вязкости и, следовательно, вторых производных от скорости по координатам. Поэтому их решение, вообще говоря, не удовлетворяет условиям прилипания на твердой стенке, так что для $\mathbf{V}_\beta$ на стенках сосуда можно требовать лишь условия непротекания $V_{\beta n}|_S=0$, касательная же компонента пульсационной скорости на стенке может быть отличной от нуля. Замена условия прилипания на условие непротекания правомерна, если толщина вязкого скин-слоя вблизи стенок мала по сравнению с размерами сосуда. Именно в предположении $\omega \gg \nu/L^2$ проводится усреднение уравнений.

Из граничного условия (1.4) следует, что главная часть F не зависит от быстрого времени. Подставляя найденные поля (1.8) в уравнения (1.2) и усредняя их по периоду вибраций, получим уравнения для средних скоростей $\mathbf{u}_\beta$ с условиями прилипания на твердой стенке

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\beta}{\partial t}+(\mathbf{u}_\beta\nabla)\mathbf{u}_\beta=-\nabla\left(\frac{p_\beta}{\rho_\beta}+b^2V_\beta^2\right)+\nu_\beta\Delta\mathbf{u}_\beta-g\boldsymbol{\gamma},\qquad \mathbf{u}_\beta|_s=0 \tag{1.10}$$

Граничные условия (1.3)—(1.4) на поверхности раздела дают после усреднения с учетом (1.8)

$$-[\sigma_{ij}]n_j+[p]n_i+\frac{1}{2}b^2[\rho V_nW_n]n_i=\alpha(\nabla\mathbf{n})n_i \tag{1.11}$$

$$[\rho W_\tau]=0,\qquad [W_n]=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial t}+\mathbf{u}\nabla F=0,\qquad \mathbf{W}_\beta=\mathbf{V}_\beta+\mathbf{k} \tag{1.12}$$

В выражениях (1.10)—(1.12) опущен индекс ноль у t_0, среднего давления $p_\beta^{(0)}$ и функции F_0, индекс n означает нормальную, а τ — касательную к поверхности раздела компоненту векторов. Тензор σ_{ij} в (1.11) определен на поле средних скоростей $\mathbf{u}_\beta$.

Уравнения (1.9)—(1.10) с граничными условиями непротекания, прилипания и (1.11)—(1.12) полностью определяют поля амплитуд пульсационных скоростей $\mathbf{V}_\beta$, $\mathbf{u}_\beta$, давлений p_β и положение усредненной границы раздела жидкостей.

Рассмотрим условия «равновесия» жидкостей в вибрирующем сосуде, понимая под равновесным такое состояние, в котором отсутствует усредненное движение ($\mathbf{u}_\beta=0$), а поверхность раздела стационарна (т. е. не зависит от медленного времени t_0). В этом случае уравнения и граничные условия для пульсационных скоростей можно записать в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{W}_\beta=0,\qquad \nabla\mathbf{W}_\beta=0,\qquad W_{\beta n}|_s=k_n \tag{1.13}$$

На границе раздела сред $F(\mathbf{r})=0$ выполняются соотношения (1.12), а условие (1.11) принимает вид

$$[p]+\frac{1}{2}b^2[\rho V_nW_n]=\alpha(\nabla\mathbf{n}) \tag{1.14}$$

Равновесные давления определяются из уравнений (1.10), в которых средние скорости $\mathbf{u}_\beta$ следует положить равными нулю.

Отметим, что для пульсационных скоростей на границе раздела выполняется только условие баланса нормальных напряжений и равенства нормальных компонент скорости. Касательные компоненты пульсационных скоростей различны, отсутствует также условие баланса касательных напряжений. Таким образом, выписанные условия корректны только тогда, когда толщина вязкого скин-слоя вблизи поверхности раздела мала по сравнению с характерными размерами поверхностных структур.

2. Применим полученные уравнения и граничные условия к задаче о возникновении волнистого рельефа на поверхности раздела сред в горизонтально колеблющемся сосуде. Такой рельеф наблюдался экспериментально [4, 5].

Пусть жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1>\rho_2$) заполняют горизонтальный слой толщины $2h$. Направим ось z декартовой системы координат вертикально вверх. Для простоты считаем, что жидкости занимают равные объемы. Начало координат выберем таким образом, что в отсутствие вибраций тяжелая жидкость занимает область $-h<z<0$, а легкая $0<z<h$. Горизонтальные размеры сосуда полагаются большими (по сравнению с h), так что эффектами, связанными с наличием вертикальных стенок, можно пренебречь и считать сосуд неограниченным в горизонтальных направлениях.

Рассмотрим поведение жидкостей при наличии горизонтальных вибраций с частотой ω и амплитудой a. Направим ось x вдоль оси вибраций, так что $\mathbf{k}$ в (1.1) — единичный вектор вдоль оси x.

Сформулируем задачу об определении «равновесной» границы раздела жидкостей $z=\zeta(x, y)$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{W}_\beta=0, \quad \nabla\mathbf{W}_\beta=0 \tag{2.1}$$

$$W_{1z}=0 \quad (z=-h), \quad W_{2z}=0 \quad (z=h)$$

$$W_{1n}=W_{2n}, \quad \rho_1 W_{1\tau}=\rho_2 W_{2\tau} \tag{2.2}$$

$$\frac{b^2}{4}[W_{1n}^2(\rho_1-\rho_2)-(\rho_1 W_{1\tau}^2-\rho_2 W_{2\tau}^2)]-(\rho_1-\rho_2)g\zeta+\alpha(\nabla\mathbf{n})=\mathrm{const} \tag{2.3}$$

Условие (2.3) получено из (1.14) после подстановки в (1.14) давлений, определенных по (1.10) с $u_\beta=0$. Поскольку жидкости несжимаемы, следует потребовать еще выполнения условия нормировки объема.

Нетрудно убедиться, что задача (2.1)—(2.3) допускает равновесное решение с плоской границей, удовлетворяющее условию замкнутости пульсационного потока

$$\zeta=0, \quad W_{1x}=\frac{2\rho_2}{\rho_1+\rho_2}, \quad W_{2x}=\frac{2\rho_1}{\rho_1+\rho_2} \tag{2.4}$$

$$W_{1y}=W_{2y}=W_{2z}=W_{1z}=0$$

$$\int_{-h}^{\zeta} V_{1x}\,dz+\int_{\zeta}^{h} V_{2x}\,dz=0$$

Рассмотрим вопрос о бифуркациях решения (2.4). Поскольку вибрации направлены по оси x, они не влияют на возмущения, поляризованные по оси y, и поэтому достаточно рассмотреть плоские возмущения, зависящие только от x и z. Поскольку векторы $\mathbf{W}_\beta$ соленоидальны, в плоской задаче можно ввести функции тока Ψ, Φ для возмущений, которые, согласно (2.1), являются гармоническими функциями

$$\begin{gathered} W_{1x}=\frac{2\rho_2}{\rho_1+\rho_2}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad W_{1z}=-\frac{\partial\Psi}{\partial x} \\ W_{2x}=\frac{2\rho_1}{\rho_1+\rho_2}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad W_{2z}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \Delta\Psi=0, \quad \Delta\Phi=0 \end{gathered} \tag{2.5}$$

Задачу удобно решать в безразмерных переменных. Выберем в качестве единицы длины комбинацию $[\alpha/(\rho_1-\rho_2)g]^{1/2}$. В таких же единицах будем измерять Ψ и Φ. При таком выборе единиц уравнения (2.5) записываются по-прежнему, а граничные условия в терминах Ψ и Φ принимают вид

$$\Psi=0 \quad (z=-H), \quad \Phi=0 \quad (z=H) \tag{2.6}$$

$$z=\zeta(x):$$

$$\Psi-\Phi=2\frac{\rho-1}{\rho+1}\zeta, \quad \rho(\Psi_z-\Psi_x\zeta_x)=\Phi_z-\Phi_x\zeta_x$$

$$B\left[\frac{2\rho}{\rho+1}\Psi_z+\frac{2}{\rho+1}\Phi_z+\Psi_z\Phi_z+\Psi_x\Phi_x\right]-\zeta+\frac{\zeta_{xx}}{(1+\zeta_x^2)^{3/2}}=\mathrm{const} \tag{2.7}$$

$$H=h\left[\frac{(\rho_1-\rho_2)g}{\alpha}\right]^{1/2}, \quad \rho=\frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad B=\frac{b^2}{4}\left(\frac{\rho_1-\rho_2}{\alpha g}\right)^{1/2}$$

Здесь H — безразмерная средняя толщина слоев жидкости, B — безразмерный параметр, характеризующий вибрации, индекс у Ψ, Φ, ζ означает дифференцирование по соответствующей переменной.

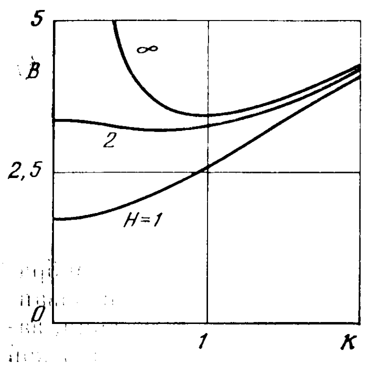
Для анализа бифуркаций плоской поверхности раздела жидкостей линеаризуем задачу (2.5)—(2.7) вблизи равновесного решения (2.4) и, рассматривая периодические по x возмущения (Ψ, Φ, $\zeta \sim \cos kx$), получим бифуркационную кривую в координатах B, k или размерных b, k

$$B=\frac{(\rho+1)^3}{8\rho(\rho-1)}(k+k^{-1})\,\mathrm{th}\,kH \tag{2.8}$$

$$b^2=\frac{(\rho_1+\rho_2)^3}{2\rho_1\rho_2(\rho_1-\rho_2)^2}[\alpha k+(\rho_1-\rho_2)gk^{-1}]\,\mathrm{th}\,kh \tag{2.9}$$

Если амплитуда скорости вибраций превышает критическое значение (2.9), то плоская поверхность раздела жидкостей становится неустойчивой и возникает волновой рельеф.

Как видно из (2.9), при $\rho_2>\rho_1$ (тяжелая жидкость вверху) всегда найдутся возмущения (с достаточно большой длиной волны), ведущие к потере устойчивости. Таким образом, в этом случае плоская поверхность раздела абсолютно неустойчива, т. е. горизонтальные вибрации не препятствуют развитию неустойчивости Рэлея — Тейлора в отличие от вертикальных, которые при определенных условиях подавляют ее развитие [2].



Из (2.9) следует также, что волновой рельеф (при $\rho_1>\rho_2$) возможен только на поверхности жидкостей со сравнимыми плотностями, но не для свободной поверхности, так как при $\rho_2\to0$ критическое значение b^2 становится бесконечно большим. Это обстоятельство отмечено и в экспериментальных работах [4, 5].

Нейтральные кривые для различных значений H приведены на фигуре. Рельеф с конечной длиной волны возможен не для любых толщин жидкостей. Действительно, для тонких слоев ($kH\ll1$) нейтральная кривая (2.8) принимает вид

$$B=\frac{(\rho+1)^3H}{8\rho(\rho-1)}(k^2+1)$$

откуда следует, что в этом случае наиболее опасны возмущения с $k=0$. Анализ (2.8) показывает, что рельеф с конечной длиной волны возникает лишь в достаточно толстых слоях при $H>\sqrt{3}$, т. е. $h>[3\alpha/(\rho_1-\rho_2)g]^{1/2}$.

В дальнейшем будем рассматривать слои с $kH\gg1$. Критическая амплитуда (2.8) определяется в этом случае из выражения

$$B=\frac{(\rho+1)^3}{8\rho(\rho-1)}(k+k^{-1})$$

имеющего минимум при $k=1$, причем $B_{\min}={}^1/_4(\rho+1)^3/\rho(\rho-1)$. Таким образом, при достаточно толстых слоях жидкостей в поле горизонтальных вибраций с амплитудой скорости, превышающей критическое значение

$$b^2_{\min}=\frac{(\rho_1+\rho_2)^3}{2\rho_1\rho_2(\rho_1-\rho_2)}[\alpha(\rho_1-\rho_2)g]^{1/2}$$

на поверхности раздела жидкостей возникает волновой рельеф с длиной волны

$$\lambda=2\pi\left[\frac{\alpha}{(\rho_1-\rho_2)g}\right]^{1/2}$$

Прежде чем перейти к нелинейному анализу задачи (2.5)—(2.7), отметим одно любопытное обстоятельство. Задача (2.1)—(2.3), а следовательно, и полученная из нее задача (2.5)—(2.7) с точностью до обозначений эквивалентна задаче о возникновении стационарного рельефа на поверхности жидкого диэлектрика (магнетика) в вертикальном постоянном электрическом (магнитном) поле. Аналогия между задачами неполная. В рассматриваемой здесь задаче о появлении волнового рельефа в поле вибраций есть выделенное направление (ось вибраций). В электрической же задаче все горизонтальные направления равноправны. Однако если решать задачу о неустойчивости поверхности диэлектрика в электрическом поле в плоской постановке, то замена g на $(\rho_1-\rho_2)g/\rho_1$, $^1/_2b^2\mathbf{W}_1$ на $\mathbf{E}\times\mathbf{k}/\sqrt{4\pi}$ и ρ на ε ($\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля, ε – диэлектрическая проницаемость жидкости) переводит разбираемую здесь задачу в решенную ранее [7] задачу об устойчивости плоской поверхности жидкого диэлектрика в вертикальном электрическом поле.

Нелинейный анализ (2.5)–(2.7), проведенный стандартным методом разложения по амплитуде возмущений, дает для амплитуды волны A

$$A^2=-\frac{64\rho(\rho^2-1)}{11\rho^2-42\rho+11}(B-B_{\min}) \qquad (2.10)$$

откуда следует, что при $\rho<3{,}535$ волна возбуждается мягким, а при $\rho>3{,}535$ – жестким образом. (Напомним, что волновой рельеф возможен лишь при $\rho>1$.) Такое же значение ($\varepsilon=3{,}535$) для границы смены режимов возбуждения рельефа получено в [8], при этом формула (2.10) указанной выше заменой переводится в выражение для амплитуды волны, полученное в той же работе.

Вибрационно-электрическая аналогия не полная. При анализе устойчивости поверхности диэлектрика в электрическом поле все горизонтальные направления равноправны, поэтому кроме плоского рельефа возможен рельеф пространственный. Как показано в [9, 10], плоский рельеф (по крайней мере при $(\varepsilon-1)/(\varepsilon+1)\ll1$) на поверхности диэлектрика неустойчив и реализуется рельеф либо с гексагональной, либо квадратной структурой. В рассматриваемой же здесь задаче есть выделенное направление – ось вибраций и поэтому только плоское решение обладает необходимой симметрией. В экспериментах [4, 5] наблюдалась именно плоская структура.

Таким образом, развитая в настоящей работе теория качественно описывает эксперименты по возникновению стационарного волнового рельефа на поверхности раздела жидкостей при горизонтальных вибрациях. Количественного сравнения с экспериментом провести не удается, поскольку работы [4, 5] не содержат необходимых для такого сравнения данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brand R. P., Nyborg W. L.* Parametrically excited surface waves.– J. Acoust. Soc. Amer., 1965, v. 37, № 3, p. 509–515.
2. *Wolf G. H.* Dynamic stabilization of the interchange instability of a liquid – gas interface.– Phys. Rev. Lett., 1970, v. 24, № 9, p. 444–446.
3. *Неволин В. Г.* Параметрическое возбуждение поверхностных волн.– Инж.-физ. журн., 1984, т. 47, № 6, с. 1028–1042.
4. *Wolf G. H.* The dynamic stabilization of the Raileigh – Taylor instability and the corresponding dynamic equilibrium.– Z. Physik, 1969, B. 227, № 3, S. 291–300.
5. *Безденежных Н. К., Брискман В. А., Любимов Д. В., Черепанов А. А., Шаров М. Т.* Управление устойчивостью поверхности раздела жидкостей с помощью вибраций, электрических и магнитных полей.– В кн.: 3-й Всесоюз. семинар по гидромеханике и тепломассообмену в невесомости. Тез. докл. Черноголовка, 1984, с. 18–20.
6. *Любимов Д. В., Лобов Н. И., Черепанов А. А.* О равновесной границе раздела жидкостей в высокочастотном вибрационном поле.– В кн.: 3-й Всесоюз. семинар по гидромеханике и тепломассообмену в невесомости. Тез. докл. Черноголовка, 1984, с. 100.
7. *Найфе А. Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
8. *Зайцев В. М., Шлиомис М. И.* Характер неустойчивости поверхности раздела двух жидкостей в постоянном поле.– Докл. АН СССР, 1969, т. 188, № 6, с. 1261–1262.
9. *Gailitis A.* Formation of the hexagonal pattern on the surface of a ferromagnetic fluid in an applied magnetic field.– J. Fluid Mech., 1977, v. 82, № 3, p. 401–413.
10. *Кузнецов Е. А., Спектор М. Д.* О существовании гексагонального рельефа на поверхности жидкого диэлектрика во внешнем электрическом поле.– ЖЭТФ, 1976, т. 71, вып. 1, с. 262–272.

Пермь

Поступила в редакцию 27.I.1986