

УДК 532.546:612.13

## О ТЕЧЕНИИ КРОВИ В КАПИЛЛЯРНОЙ СЕТИ МЫШЦЫ

РЕГИРЕР С. А., УТУШКИНА Н. С., ШАДРИНА Н. Х.

Сеть капилляров в скелетной мышце представляет собой систему сосудов, ориентированных примерно параллельно мышечным волокнам и имеющих поперечные соединения [1]. Кровь поступает в капилляры из прекапиллярных артериол, ориентированных поперек волокон, и сбрасывается в посткапиллярные вены, также проходящие поперечно. По ходу мышечных волокон единичные сосудистые комплексы, включающие прекапиллярную артериолу, посткапиллярную венулу (сосуды 1-го порядка) и соединяющие их капилляры, повторяются. Последовательно расположенные комплексы имеют общие сосуды 2-го порядка: питающую артериолу и дренирующую венулу.

Благодаря тому, что расположение сосудов упорядочено, а плотность капилляров достаточно велика ( $10^2-10^3$  мм<sup>-2</sup>), естественно для описания движения крови в них использовать представления теории фильтрации.

Ниже рассматриваются постановка и общий алгоритм решения задачи о течении крови в системе капилляров и микрососудов (артериальных и венозных) двух следующих порядков. Приводится подробный анализ течения в отдельном единичном сосудистом комплексе.

**1. Постановка задачи для сети.** Исходными служат следующие общие предположения<sup>1</sup>: 1) капиллярная сеть состоит из совокупности ячеек; смежные (вдоль мышечных волокон) ячейки разделены артериолами и венулами 1-го порядка; 2) каждая ячейка моделируется объемом анизотропного пористого материала, а сосуды 1-го и 2-го порядков — каналами с проницаемой стенкой или линейными источниками (стоками); 3) все движения жидкости в сосудах — медленные квазистационарные; 4) можно ограничиться двумерной задачей, подразумевая, что все переменные осреднены в направлении, ортогональном ходу мышечных волокон и поперечных сосудов.

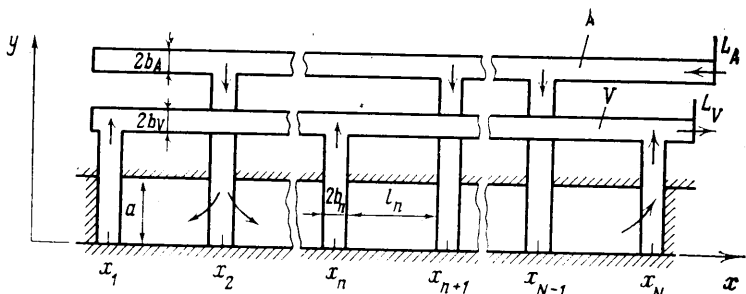
Рассмотрим на плоскости сеть, состоящую из  $N-1$  ячеек, разделенных поперечными каналами (фиг. 1) с общей нумерацией ( $n=1, 2, \dots, N$ ). Поперечные каналы в свою очередь соединены с продольными: подводящим ( $A$ ) и отводящим ( $V$ ). Пусть  $a, l_n$  — высота и длина ячейки,  $x_n$  — координата оси симметрии поперечного канала, длину которого считаем совпадающей с  $a$ , а полуширину  $b_n$  — малой:  $b_n \ll l_n, b_n \ll a$ , где  $l_n = x_{n+1} - x_n - (b_n + b_{n+1})$ .

Движение жидкости в  $n$ -й ячейке будем характеризовать давлением  $p_n$  в порах (капиллярах) и фильтрационной скоростью  $v_n$ ;  $v_n/m$  — истинная средняя скорость, где  $m$  — пористость, полагаемая постоянной. Внутри ячейки справедливы обычные уравнения теории фильтрации

$$\frac{\partial p_n}{\partial x} = -\frac{\mu}{k_x} u_n, \quad \frac{\partial p_n}{\partial y} = -\frac{\mu}{k_y} v_n, \quad \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

Величина  $\mu$  имеет смысл эффективной вязкости и равна вязкости в подводящих сосудах; при необходимости в  $\mu$  учитываются поправки, со-

<sup>1</sup> См.: Левтов В. А., Регирер С. А., Утушкина Н. С., Шадрина Н. Х. Сосудистое русло скелетных мышц: строение и математические модели. — Отчет Ин-та механ. МГУ, 1984, № 2928. 134 с.



Фиг. 1

ответствующие движению по капиллярам [2]. Коэффициенты проницаемости  $k_x, k_y$  считаются далее (кроме п. 5) постоянными.

Границы  $y=0, y=a$  непроницаемы, а на границе ячейки и прилегающего к ней канала непрерывны давление и продольная составляющая скорости

$$v_n^1 = 0 \quad (x_n + b_n < x < x_{n+1} - b_{n+1}; y=0, y=a) \quad (1.2)$$

$$p_n^1 = p_n, \quad u_n^1 = u_n \quad (x = x_n + b_n) \quad p_{n+1}^1 = p_n, \quad u_{n+1}^1 = u_n \quad (x = x_{n+1} - b_{n+1}) \quad (1.3)$$

Здесь  $p_n^1, v_n^1$  — давление и скорость в  $n$ -м поперечном канале, для которых формулируются дополнительные уравнения (п. 2); верхний индекс у  $p, v$  обозначает порядок (1, 2) или тип ( $a, v, A, V$ ) канала. Поскольку жидкость не проходит через основания каналов и крайние границы сети, то

$$v_n^1 = 0 \quad (x_n - b_n < x < x_n + b_n, y=0) \quad (1.4)$$

$$u_1^1 = 0 \quad (x = x_1 - b_1), \quad u_N^1 = 0 \quad (x = x_N + b_N) \quad (1.5)$$

Течение в поперечных каналах таково, что давления  $p_n^1$  в них не зависят от  $x$  (п. 2). Они должны быть равны давлениям  $p^2$  в каналах  $A, V$  в местах отхождения поперечных каналов; должно также выполняться условие сохранения массы

$$p_n^1(a) = p^2(x_n) \equiv p_n^2 \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (1.6)$$

$$Q^2(x_n + b_n) - Q^2(x_n - b_n) = -Q_n^1(a), \quad Q_n^1(a) = \int_{-b_n}^{b_n} v_n^1(x, a) dx \quad (1.7)$$

Расходы в поперечных и продольных каналах обозначены через  $Q_n^1(y), Q^2(x)$ ; в (1.6), (1.7)  $p^2$  и  $Q^2$  означают либо  $p^A, Q^A$ , либо  $p^V, Q^V$  в зависимости от типа канала. Соотношения (1.3), (1.6) записаны в предположении, что гидравлические сопротивления разветвлений пренебрежимо малы по сравнению с сопротивлением сосудов. Переменные  $p^2, Q^2$  подчиняются гидродинамическим уравнениям того же типа, что и  $p_n^1, Q_n^1$  (п. 2).

Существенное упрощение достигается, если в (1.3), (1.5), (1.7) пренебречь  $b_n$  в сравнении с  $l_n, a$ , т. е. считать, что поперечные каналы служат линейными источниками (стоками) на границах между ячейками и одновременно точечными источниками (стоками) на стенках продольных каналов  $A, V$ . В этом случае  $l_n = x_{n+1} - x_n$  и

$$p_n^1 = p_n, \quad u_n^1 = u_n \quad (x = x_n), \quad p_{n+1}^1 = p_n, \quad u_{n+1}^1 = u_n \quad (x = x_{n+1}) \quad (1.8)$$

$$u_1^1 = 0 \quad (x = x_1), \quad u_N^1 = 0 \quad (x = x_N), \quad Q^2(x_n + 0) - Q^2(x_n - 0) = -Q_n^1(a)$$

Задача замыкается заданием расположения закрытых и открытых ( $x = L_A, L_V$ ) концов каналов  $A, V$ , а также давлений  $p^\pm$  на входе и выходе системы.

2. Вспомогательная задача и эффективное граничное условие. Рассмотрим  $n$ -й канал с  $n \neq 1, N$ , разделяющий  $n$ -ю и  $n+1$ -ю ячейки (фиг. 1). Будем считать, что течение квазистационарное и  $u_n^*/v_n^* \sim b_n/a = \epsilon \ll 1$ ,  $\rho u_n^* b_n/\mu \ll \epsilon$ , где звездочкой отмечены характерные значения. Тогда в низшем по  $\epsilon$  приближении для скоростей и давления получаются уравнения типа теории смазки [3, 4] с соответствующими граничными условиями:

$$\frac{\partial p_n^1}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v_n^1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial p_n^1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_n^1}{\partial x} + \frac{\partial v_n^1}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$u_n^1 = u_{n-1}, \quad v_n^1 = 0 \quad (x = x_n - b_n),$$

$$u_n^1 = u_n, \quad v_n^1 = 0 \quad (x = x_n + b_n) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p_n^1}{\partial y} = 0 \quad (y=0), \quad p_n^1 = p_n^2 \quad (y=a) \quad (2.3)$$

Справедливость уравнений (2.1) нарушается в малой, порядка  $b_n$  по высоте, области у закрытого конца канала; соответственно при  $y=0$  не выполняется точно условие  $u_n^1=0$ . На границах канала с пористым материалом ставится условие прилипания  $v_n^1=0$ , оправдываемое малой пористостью [5]. От обоих упрощений в принципе можно отказаться, но это привело бы к неоправданному усложнению, требующему решения уравнений Бринкмана [6] в пористой среде.

Интегрируя уравнения (2.1) по  $x$  с учетом условий для  $u_n^1, v_n^1$ , находим

$$\frac{2b_n^3}{3\mu} \frac{\partial^2 p_n^1}{\partial y^2} = u_n - u_{n-1} \quad (n \neq 1, N) \quad (2.4)$$

$$\frac{2b_1^3}{3\mu} \frac{\partial^2 p_1^1}{\partial y^2} = u_1, \quad \frac{2b_N^3}{3\mu} \frac{\partial^2 p_N^1}{\partial y^2} = -u_{N-1} \quad (2.5)$$

В каналах 2-го порядка  $A, V$  давление и скорость подчиняются тем же уравнениям (2.1) и из них можно получить аналоги соотношений (2.5) для  $p^2$ , причем в правой части будет стоять плотность оттока в каналы 1-го порядка (п. 3).

3. Алгоритм решения для системы ячеек. В общем случае из (1.1) следует простое эллиптическое уравнение относительно  $p_n$ . Пользуясь методом функции Грина, можно получить соотношение

$$u_n(x_n + b_n, y) = \int_0^a [p_n^1(y') K_n^+(y, y') - p_{n+1}^1(y') K_{n+1}^+(y, y')] dy' \quad (3.1)$$

и аналогичное равенство (с ядрами  $K_n^-, K_{n+1}^-$ ) для  $u_n(x_{n+1} - b_{n+1}, y)$ . Вместе с (2.4), (2.5) они дают систему интегродифференциальных уравнений для  $p_n^1$ , решение которой получается с точностью до постоянных  $p_n^1(a)$ , определяемых условиями сопряжения (1.6), (1.7).

Один из важных для приложений частных случаев, когда ядра  $K_n^\pm$  вырождаются в  $\delta$ -функции, соответствует пределу при  $k_y/k_x \rightarrow 0$ . Это принимаемое далее упрощение основано на экспериментальных данных о том, что поперечные соединения между капиллярами довольно редки [1].

Пусть  $k_x = k = \text{const}$ ,  $k_y = 0$  и все поперечные каналы заменены линейными «проводниками», в которых выполнены условия типа (2.4), (2.5). Из (1.1) следует, что внутри каждой ячейки  $v_n = 0$  граничные условия (1.2) выполнены автоматически, а продольная скорость  $u_n(y)$  и давление  $p_n(x, y)$  связаны соотношениями

$$p_n = -(\mu/k) u_n + F_n(y) \quad (x_n < x < x_{n+1}, \quad n = 1, \dots, N-1) \quad (3.2)$$

Используя условия (1.8), отсюда найдем

$$p_n^1 = -\frac{\mu}{k} x_n u_n + F_n, \quad p_{n+1}^1 = -\frac{\mu}{k} x_{n+1} u_n + F_n, \quad u_n = -\frac{k}{\mu l_n} (p_{n+1}^1 - p_n^1) \quad (3.3)$$

Подставив (3.3) в (2.4), (2.5), получим систему  $N$  уравнений относительно  $p_n^1(y)$  ( $n=1, \dots, N$ )

$$\frac{2l_1 b_1^3}{3k} \frac{\partial^2 p_1^1}{\partial y^2} = p_1^1 - p_2^1 \quad (3.4)$$

$$\dots$$

$$\frac{2l_n b_n^3}{3k} \frac{\partial^2 p_n^1}{\partial y^2} = -\xi_n p_{n-1}^1 + (1 + \xi_n) p_n^1 - p_{n+1}^1 \quad (n \neq 1, N)$$

$$\dots$$

$$\frac{2l_{N-1} b_{N-1}^3}{3k} \frac{\partial^2 p_{N-1}^1}{\partial y^2} = p_{N-1}^1 - p_N^1 \quad \left( \xi_n = \frac{l_n}{l_{n-1}} \right)$$

Трёхдиагональное строение облегчает численное решение этой системы, а в некоторых случаях позволяет применить аналитические методы [7]. Последнее возможно, например, при  $b_n/b_{n\pm 1} \rightarrow \infty$  для всех чётных или для всех нечётных  $n$  (п. 4) и при  $\xi_n = \text{const}$ ,  $l_n b_n^3 = \text{const}$ .

Предположим, что длины всех ячеек одинаковы ( $l_n = l$ ) и одинаковы размеры всех поперечных каналов ( $b_n = b$ ). Подставляя в (3.4) частное решение  $p_n^1 = A \cos(n^{-1/2})\varphi \exp \lambda y$ , получим известным способом [7]

$$\lambda_m^2 = \frac{6k}{lb^3} \sin^2 \frac{\pi m}{2N}, \quad \varphi_m = \frac{\pi m}{N} \quad (m=0, 1, \dots, N-1) \quad (3.5)$$

Отсюда следует, что при  $N \geq 2$  имеется нулевой характеристический показатель кратности 2, а прочие показатели, простые и действительные, отличны от нуля. Таким образом

$$p_n^1 = \sum_{m=1}^{N-1} (B_m^+ e^{\lambda_m y} + B_m^- e^{-\lambda_m y}) \alpha_{nm} + B_0^+ y + B_0, \quad \alpha_{nm} \equiv \cos \left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi m}{N} \quad (3.6)$$

Уравнения для отыскания  $2N$  констант  $B_m^\pm$ ,  $B_0^+$ ,  $B_0$  даются условиями (2.3). После несложных выкладок находим  $B_m^+ = B_m^- = B_m$ ,  $B_0^+ = 0$  и

$$p_n^1 = 2 \sum_{m=1}^{N-1} \alpha_{nm} B_m \operatorname{ch} \lambda_m y + B_0, \quad 2 \sum_{m=1}^{N-1} \beta_{nm} B_m \operatorname{ch} \lambda_m a = p_n^2 - p_{n+1}^2 \quad (3.7)$$

$$\beta_{nm} \equiv \alpha_{nm} - \alpha_{n+1, m} = 2\gamma_{nm} \sin \frac{\pi m}{2N}, \quad \gamma_{nm} = \sin \frac{\pi n m}{N}$$

Коэффициенты  $B_m$  представляются линейными комбинациями значений давления на открытых концах поперечных каналов. Поскольку матрица, обратная  $\{\gamma_{nm}\}$ , есть  $(2/N)\{\gamma_{mr}\}$ , то для  $m=1, \dots, N-1$

$$4B_m \sin \frac{\pi m}{2N} \operatorname{ch} \lambda_m a = \frac{2}{N} \sum_{r=1}^{N-1} \gamma_{mr} (p_r^2 - p_{r+1}^2) \quad (3.8)$$

Скорость жидкости в ячейках, выражаемая формулой (3.3), с учетом

(3.7), (3.8) записывается в виде

$$u_n(y) = \frac{k}{\mu l} \sum_{r=1}^{N-1} U_{nr}(y) (p_r^2 - p_{r+1}^2), \quad U_{nr} = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N-1} \gamma_{mn} \gamma_{mr} \frac{\operatorname{ch} \lambda_m y}{\operatorname{ch} \lambda_m a} \quad (3.9)$$

Расходы жидкости через  $n$ -ю ячейку и  $n$ -й канал (при  $y=a$ ) даются соответственно формулами

$$Q_n \equiv \int_0^a u_n dy = \frac{ka}{\mu l} \sum_{r=1}^{N-1} Q_{nr} (p_r^2 - p_{r+1}^2) \quad (3.10)$$

$$Q_n^1(a) = -\frac{2b^3}{3\mu a} \sum_{r=1}^{N-1} q_{nr} (p_r^2 - p_{r+1}^2), \quad Q_{nr} = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N-1} \gamma_{mn} \gamma_{mr} \frac{\operatorname{th} \lambda_m a}{\lambda_m a}$$

$$q_{nr} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N-1} \alpha_{nm} \gamma_{mr} \lambda_m a \operatorname{th}(\lambda_m a) \sin^{-1} \frac{\pi m}{2N}$$

Постоянные  $p_r^2$  определяются из условий (1.6), (1.7). Обозначим через  $b_A, b_V$  полуширину каналов  $A, V$  (фиг. 1), а через  $x_{n,A}, x_{n,V}$  — места присоединения к ним поперечных каналов с номерами  $n_A, n_V$ , питающих ячейку и дренирующих ее. По аналогии с (2.5) запишем уравнения для давления, где уже учтены условия (1.7)

$$\frac{2b_{A,V}^3}{3\mu} \frac{\partial^2 p^{A,V}}{\partial x^2} = - \sum_{n_{A,V}} Q_n^1(a) \delta(x - x_{n_{A,V}}) \quad (3.11)$$

Интегрируя (3.11) дважды по  $x$  с учетом того, что закрытые концы каналов помечены в точке  $x_1=0$ , а открытые — в точках  $x=L_{A,V}$ , получим  $p^{A,V}(x)$ . Удовлетворяя условиям (1.6), найдем

$$\frac{2b_{A,V}^3}{3\mu} (p_{n_{A,V}}^2 - p^{\pm}) = - \sum_{k_{A,V}} Q_k^1(a) [(x_{n_{A,V}} - x_k)_+ - (L_{A,V} - x_k)] \quad (3.12)$$

Здесь  $(z)_+ \equiv H(z)z$ ,  $H$  — единичная функция,  $p_{2A,V}^n = p_n^2$  при  $x=x_{n,A}$  или  $x=x_{n,V}$ . Уравнения (3.10) для  $Q_n^1(a)$  вместе с (3.12) образуют замкнутую систему относительно всех  $p_n^2, Q_n^1$ . Положения точек  $x_{n,A,V}$  существенны только для уравнений (3.12).

Преобразование этих уравнений к более компактному виду возможно при правильном чередовании поперечных каналов. Пусть, например,  $N$  — нечетное число,  $x=x_{2s}$  и  $x=x_{2s-1}$  ( $s=1, \dots, (N-1)/2$ ) — места присоединения подводящих и отводящих каналов. В этом случае удобно разрешить (3.12) относительно разностей  $p_{2s-1}^2 - p_{2s+1}^2, p_{2s}^2 - p_{2s+2}^2$ , которые выразятся через суммы  $Q_{2m-1}^1, Q_{2m}^1$  соответственно. Эти суммы в свою очередь вычисляются исходя из (3.10) и тригонометрических тождеств

$$\sum_p \alpha_{pq} = \left( 2 \sin \frac{\pi q}{N} \right)^{-1} \left[ (-1)^{l+1} \sin \frac{\pi q}{2N} + \sin \frac{\pi q}{N} \left( l + \frac{1}{2} \right) \right] \equiv \Gamma_{lq}$$

при  $p=1, 3, \dots, l$  или  $p=2, 4, \dots, l$  соответственно для нечетных и четных  $l$ . После этого легко получить уравнения относительно  $p_n^2$

$$p_q^2 - p_{q+2}^2 = -2 \frac{lb^3}{ab_q^3} \sum_{r=1}^N \theta_{rq} p_r^2 \quad (q=1, \dots, N-2)$$

$$p_{N-1}^2 = p^+ + \frac{L_A - (N-1)l}{ab_A^3} b^3 \sum_{r=1}^N \theta_{r,N-1} p_r^2$$

$$p_N^2 = p^- + \frac{L_V - Nl}{ab_V^3} b^3 \sum_{r=1}^N \theta_{rN} p_r^2, \quad \theta_{ri} = \frac{2}{N} \sum_{q=1}^{N-1} \alpha_{rq} \Gamma_{iq} \lambda_q a \operatorname{th} \lambda_q a$$

Здесь  $b_q = b_{A,V}$  соответственно для четных и нечетных  $q$ .

**4. Течение при малом сопротивлении отводящих каналов.** Вернемся снова к уравнениям (3.4), (3.11) и предположим, что отношения  $b_{2s}^3/b_{2s-1}^3$  и  $b_A^3/b_V^3$  малы ( $\sim \epsilon$ ). Тогда в наинизшем по  $\epsilon$  приближении  $p_{2s-1}^2 = p_{2s-1}^1 = p^- = \text{const}$  и от (3.4) отщепляется система несвязанных уравнений

$$\frac{2l_{2s} b_{2s}^3}{3k} \frac{\partial^2 p_{2s}^1}{\partial y^2} = (1 + \xi_{2s}) (p_{2s}^1 - p^-)$$

Таким образом, для всех подводющих поперечных каналов

$$p_{2s}^1(y) = p^- + (p_{2s}^2 - p^-) \frac{\operatorname{ch} \lambda_{2s} y}{\operatorname{ch} \lambda_{2s} a} \quad \left( s=1, \dots, \frac{N-1}{2} \right) \quad (4.1)$$

$$(\lambda_{2s} a)^2 = \frac{3k(1 + \xi_{2s})}{2l_{2s} b_{2s}^3}$$

$$Q_{2s}^1(a) = -\frac{2b_{2s}^3}{3\mu a} (p_{2s}^2 - p^-) \lambda_{2s} a \operatorname{th} \lambda_{2s} a \quad (4.2)$$

Скорости и расходы в ячейках определяются формулами

$$u_{2s} = \frac{k}{\mu l_{2s}} (p_{2s}^2 - p^-) \frac{\operatorname{ch} \lambda_{2s} y}{\operatorname{ch} \lambda_{2s} a}, \quad u_{2s-1} = -\xi_{2s} u_{2s} \quad (4.3)$$

$$Q_{2s} = \frac{ka}{\mu l_{2s}} (p_{2s}^2 - p^-) \frac{\operatorname{th} \lambda_{2s} y}{\lambda_{2s} a}, \quad Q_{2s-1} = -\xi_{2s} Q_{2s}$$

Постоянные  $Q_{2s}^1(a)$ ,  $p_{2s}^2$  определяются из совместного решения (4.3) и уравнений типа (3.12), которые преобразуются к виду

$$p_{2s}^2 - p_{2s+2}^2 = \frac{3\mu}{2b_A^3} (l_{2s} + l_{2s-1}) \sum_{m=1}^s Q_{2m}^1(a) \quad \left( s < \frac{N-1}{2} = S \right) \quad (4.4)$$

$$p_{N-1}^2 = p^+ + \frac{3\mu}{2b_A^3} (L_A - x_{N-1}) \sum_{m=1}^s Q_{2m}^1(a)$$

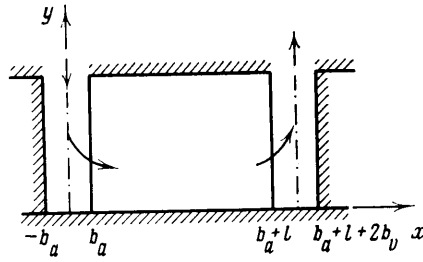
Когда все ячейки одинаковы ( $b_{2s} = b$ ,  $l_{2s} = l_{2s-1} = l$ ,  $\xi_{2s} = 1$ ) и  $L_A - x_{N-1} = 2l$ , из (4.2), (4.4) следует

$$Q_{2s}^1(a) = -\frac{2b^3}{3\mu a} (p_{2s}^2 - p^-) \lambda a \operatorname{th} \lambda a \quad (4.5)$$

$$p_{2s}^2 - p_{2s+2}^2 = \frac{3\mu l}{b_A^3} \sum_{m=1}^s Q_{2m}^1(a) \quad (s < S)$$

$$p_{2s}^2 = p^+ + \frac{3\mu l}{b_A^3} \sum_{m=1}^s Q_{2m}^1(a), \quad (\lambda a)^2 = \frac{3ka}{lb^3}$$

После исключения  $Q_{2s}^1(a)$  эта система приводится к трехдиагонально-



Фиг. 2

му виду; окончательные формулы имеют вид

$$p_{2s}^2 = p^- + (p^+ - p^-) \Psi_s, \quad Q_{2s}^1(a) = -\frac{2b^3(p^+ - p^-)}{3\mu a} \Psi_s \lambda a \operatorname{th} \lambda a \quad (4.6)$$

$$\Psi_s = \frac{\operatorname{ch}(s^{-1/2}) \psi}{\operatorname{ch}(S^{+1/2}) \psi}, \quad \operatorname{ch} \psi = 1 + \frac{lb^3}{ab_a^3} \lambda a \operatorname{th} \lambda a$$

$$u_{2s} = \frac{k}{\mu l} (p^+ - p^-) \Psi_s \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda a}, \quad Q_{2s} = \frac{ka}{\mu l} (p^+ - p^-) \Psi_s \frac{\operatorname{th} \lambda a}{\lambda a} \quad (4.7)$$

Когда  $b_a^3 \gg b^3$ ,  $\lambda a \ll 1$ , то  $\operatorname{ch} \psi \approx 1$ ,  $\psi \approx 0$ ,  $p_{2s}^2 \approx p^+$  и

$$u_{2s} \approx \frac{k}{\mu l} (p^+ - p^-) \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda a}, \quad Q_{2s} \approx \frac{ka}{\mu l} (p^+ - p^-) \frac{\operatorname{th} \lambda a}{\lambda a} \quad (4.8)$$

Этот предельный случай соответствует одинаковому (с точностью до направления) течению во всех ячейках и совпадает с решением, которое можно построить для одной ячейки с заданными давлениями на входе и выходе. Такая задача представляет самостоятельный интерес, тем более что ее решения удастся получить при менее жестких ограничениях (пункты 5, 6; см. также [8]).

5. Течение в отдельной ячейке. Рассмотрим снова ячейку, ограниченную каналами шириной  $2b_1 = 2b_a$ ,  $2b_2 = 2b_v$  и имеющую на входе и выходе соответственно давления  $p_1^2 = p^+$ ,  $p_2^2 = p^-$  (фиг. 2). Пусть, как и ранее,  $k_y = 0$ , но  $k_x = k(x)$ . Из (1.1) тогда следует соотношение типа (3.2)

$$p = -\mu u(y) \int_{b_a}^x \frac{dx}{k(x)} + F(y) \quad (5.1)$$

Используя условия (1.3), (1.5) при  $x = b_a$  и  $x = b_a + l$ , получим

$$p_1^1 = F(y), \quad p_2^1 = -\mu \langle k^{-1} \rangle l u(y) + F(y) \quad (5.2)$$

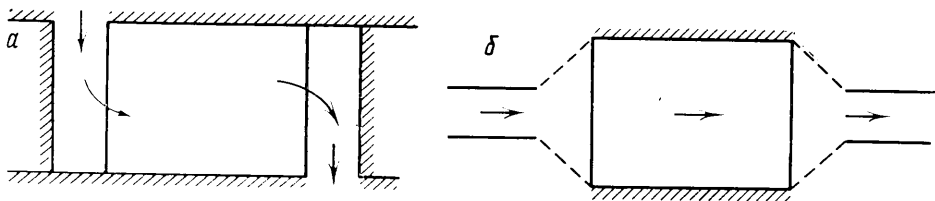
$$\frac{2b_{a,v}^3}{3\mu} \frac{\partial^2 p_{1,2}^1}{\partial y^2} = \pm u, \quad \langle k^{-1} \rangle = \frac{1}{l} \int_{b_a}^{b_a+l} \frac{dx}{k(x)}$$

Исключение  $u(y)$ ,  $F(y)$  приводит к системе уравнений для  $p_{1,2}^1$ , откуда

$$p_1^1 = B_1^+ e^{\Lambda y} + B_1^- e^{-\Lambda y} + B_0^+ y + B_0, \quad \Lambda^2 = \frac{3}{2} \frac{b_a^3 + b_v^3}{l \langle k^{-1} \rangle b_a^3 b_v^3} \quad (5.3)$$

Через  $p_1^1$ , согласно (5.2), находятся также  $u(y)$  и  $p_2^1$ . Постоянные  $B_1^\pm$ ,  $B_0^+$ ,  $B_0$  определяются при помощи граничных условий (2.3); окончательные формулы для скорости и расхода в ячейке имеют вид (ср. (4.8))

$$u = \frac{p^+ - p^-}{\mu l \langle k^{-1} \rangle} \frac{\operatorname{ch} \Lambda y}{\operatorname{ch} \Lambda a}, \quad Q = \frac{(p^+ - p^-) a \operatorname{th} \Lambda a}{\mu l \langle k^{-1} \rangle \Lambda a} \quad (5.4)$$



Фиг. 3

Чтобы оценить чувствительность этих соотношений к способу подключения поперечных каналов, рассмотрим, опуская подробности вычислений, еще две ситуации. Пусть сначала открытый конец выходного канала расположен на стороне, противоположной входу (при  $y=0$ ; фиг. 3, а). Тогда

$$u = \frac{2\Lambda^2 b_a^3 (p^+ - p^-)}{3\mu\theta} [\operatorname{ch} \Lambda(a-y) + \eta \operatorname{ch} \Lambda y]$$

$$Q = \frac{2}{3\mu\theta} \Lambda b_a^3 (p^+ - p^-) (1 + \eta) \operatorname{sh} \Lambda a$$

$$\eta = b_v^3 / b_a^3, \quad \theta = 2 + \Lambda a \operatorname{sh} \Lambda a + (\eta + \eta^{-1}) \operatorname{ch} \Lambda a$$

Наконец, если соединение каналов с ячейкой последовательное (фиг. 3, б), то скорость в ячейке постоянна ( $u=Q/a$ ), а расход определяется по формуле

$$Q = \frac{(p^+ - p^-) a}{\mu' \langle k^{-1} \rangle} \frac{1}{1 + (\Lambda a)^2} \quad (5.5)$$

При  $\Lambda a \ll 1$  и  $\Lambda a \gg 1$  для  $Q^0 = Q \mu l \langle k^{-1} \rangle / a (p^+ - p^-)$  в трех рассмотренных схемах получаются асимптотические формулы, представленные ниже:

Условие	$\Lambda a \ll 1$	$\Lambda a \gg 1$
Односторонняя схема 1	$1 - \frac{1}{3} (\Lambda a)^2$	$(\Lambda a)^{-1}$
Разносторонняя схема 2	$1 - \frac{1}{3} (\Lambda a)^2$	$\frac{(1 + \eta)^2}{\eta} (\Lambda a)^{-2}$
Последовательная схема 3	$\Lambda - (\Lambda a)^2$	$(\Lambda a)^{-2}$

Три схемы обнаруживают заметное различие также и в степени неоднородности скорости; если оценивать ее параметром  $\xi = (u_{\max} - u_{\min}) a / Q$ , то получим для схем 1, 2 соответственно

$$\xi = \Lambda a \operatorname{th} \frac{\Lambda a}{2}, \quad \xi = \frac{1 + \eta \operatorname{ch} \Lambda a - \sqrt{1 + \eta^2 + 2\eta \operatorname{ch} \Lambda a}}{(1 + \eta) \operatorname{sh} \Lambda a} \Lambda a \quad (5.6)$$

В обеих схемах при  $\Lambda a \rightarrow 0$  распределение скоростей стремится к однородному, а при  $\Lambda a > 1$  неоднородность велика: большая часть потока сосредоточена в верхней ( $y \approx a$ ) области ячейки. Зоны наименьших и наибольших скоростей в схеме 1 всегда расположены вблизи границ  $y=0$  и  $y=a$  соответственно. В схеме 2 при  $b_a \leq b_v$  наибольшая скорость достигается у границы  $y=a$ , а наименьшая — на линии

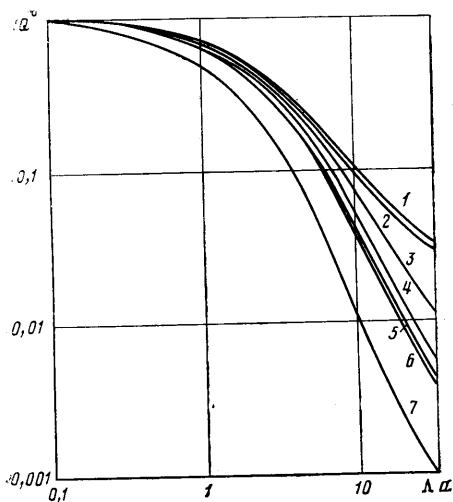
$$\frac{y}{a} = \frac{1}{\Lambda a} \operatorname{arth} \frac{\operatorname{sh} \Lambda a}{\eta + \operatorname{ch} \Lambda a}$$

которая тем ближе к  $y=0$ , чем больше  $\Lambda a$  и  $\eta$ .

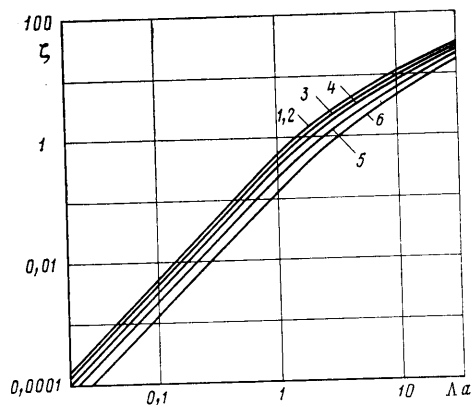
Графики на фиг. 4, 5 иллюстрируют поведение безразмерных функций  $Q^0, \xi$  в зависимости от  $\Lambda a, \eta$ . Кривые 1 соответствуют схеме 1, кривые 2-6 — схеме 2 при  $b_v/b_a = 5; 2,5; 1,66; 1,25; 1,0$ , кривая 7 (фиг. 4) — схеме 3.

Формулы пунктов 3, 4 показывают, что различаются и распределения скоростей между ячейками. Например, по (4.7) внутри каждой ячейки





Фиг. 4



Фиг. 5

степень неоднородности определяется параметром  $\lambda a$ , а различие расходов в разных ячейках быстро увеличивается с ростом числа  $N=2S-1$ . Физическая природа неоднородности скоростей очевидна — это потери давления в каналах на участках между соседними разветвлениями.

Ни расход через единичную ячейку, ни суммарный расход через систему ячеек, который, например по (4.7), составляет

$$Q_z = \frac{ka}{\mu l} (p^+ - p^-) \frac{\text{sh } S\psi}{2 \text{sh } \frac{\psi}{2} \text{sh} \left( S - \frac{1}{2} \right) \psi} \frac{\text{th } \lambda a}{\lambda a}$$

не аппроксимируется выражениями, пропорциональными  $Sb^3$  или  $b_a^3$ , т. е. сопротивление сети в целом не подчиняется пуазейлевскому закону.

**6. Заключение.** Применительно к реальной микрососудистой сети скелетной мышцы наиболее правдоподобна схема 1, в наибольшей степени отклоняющаяся от представлений о сети с одинаковым потоком через однотипные сосуды. Эксперименты показывают [1], что неоднородность скоростей в капиллярах действительно имеет место и усугубляется при сужении питающих артериол (когда  $\lambda a$  растет). Соединение сосудов по схеме 2 встречается редко, а схема 3 вообще не является физиологической. Однако обе они, особенно последняя, часто фигурируют в литературе в качестве иллюстраций и даже как основы расчетов. В частности, схема 3 является источником концепции «эквивалентного сосуда», согласно которой изменение сопротивления сети трактуется как изменения сечений однотипных подводных сосудов в соответствии с обычным законом Пуазейля. В действительности же, как сказано выше, этот закон неприменим к сложноорганизованным сетям в целом.

Решения пунктов 3–5 допускают в основном качественные сопоставления с опытными данными. Несложно приближенно перейти от двумерной задачи к такому описанию процесса, в котором будут фигурировать диаметры сосудов и сопротивление каждого из них будет связано с диаметром привязным законом 4-й степени. Можно также оценить погрешности, вносимые предположениями о правильном чередовании сосудов, равенстве  $2b_a$  и  $2b_v$  и т. п. Например, первое предположение завышает число артериальных сосудов и, следовательно, дает заниженное расчетное сопротивление сети. Между предельными случаями  $b_v = b_a$  и  $b_v \gg b_a$  заключена действительная ситуация ( $b_v \approx b_a$ ); соответственно построенные решения дают при данном  $b_a$  нижнюю и верхнюю оценки расходов.

Выше были представлены лишь наиболее простые варианты задачи о сосудах скелетной мышцы. Существуют возможности обобщения с учетом двумерного (а иногда и трехмерного) характера движения в капиллярной ячейке, особенностей движения эритроцитов по сосудам, наличия сосудов более высоких порядков и т. д. Во всех этих случаях, как и выше, в основе построения математических моделей лежит стремление не столько воспроизвести устройство реальной сети в деталях, сколько ввести средние (или «размазанные») характеристики, измеримые в макроскопических экспериментах и на самом деле мало чувствительные к названным деталям.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Левтов В. А., Шустова Н. Я., Регирер С. А., Шадрина Н. Х., Мальцев Н. А., Левкович Ю. И. Топографическая и гидродинамическая неоднородность терминального русла сосудов икроножной мышцы кошки.— Физиол. журн. СССР, 1985, т. 71, № 9, с. 1112–1123.
2. Левтов В. А., Регирер С. А., Шадрина Н. Х. Реология крови. М.: Медицина, 1982. 270 с.
3. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
4. Регирер С. А. О приближенной теории течения вязкой несжимаемой жидкости в трубах с пористыми стенками.— Изв. вузов. Математика, 1962, № 5, с. 65–74.
5. Beavers G. S., Sparrow E. M., Masha B. A. Boundary condition at a porous surface which bounds a fluid flow.— AIChE Journal, 1974, v. 20, № 3, p. 596–597.
6. Haber S., Mauri R. Boundary conditions for Darcy's flow through porous media.— Int. J. Multiphase Flow, 1983, v. 9, № 5, p. 561–574.
7. Ильин В. П., Кузнецов Ю. И. Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985. 207 с.
8. Лосев Е. С. О распределении эритроцитов в микроциркуляторной ячейке.— Изв. АН СССР. МЖТ, 1986, № 6, с. 89–93.

Москва  
Ленинград

Поступила в редакцию  
11.XII.1985