

УДК 532.546:519.63

ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ, ЭЛЕКТРО- И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В БЛОЧНОЙ СРЕДЕ

ЗУБКОВ В. В., ЛИНЬКОВ А. М.

Для многих приложений теории фильтрации, диффузии, конвективного переноса, электро- и теплопроводности важное значение имеют задачи о системах блоков, разделенных границами (в частности, трещинами, проводниками), причем процесс переноса происходит как по самим блокам, так и по разделяющим их границам. Решение подобных задач целесообразно осуществлять с помощью метода граничных интегральных уравнений [1-4].

Данная работа имеет целью предложить форму таких уравнений и методы их решения, специально ориентированные на учет особенностей обсуждаемых задач. Во-первых, дается форма граничного интегрального уравнения, содержащая лишь суммарный приток (жидкости, тепла, электричества) к единичной площадке границы, а не индивидуальные притоки к ней от каждого из разделяемых ею блоков. Это почти вдвое сокращает число неизвестных, подлежащих определению. Во-вторых, обсуждаются принципиальные моменты, связанные со спецификой течения вдоль границы, их пересечениями и изломами. В-третьих, на основе опыта численной реализации предложенной формы уравнений на ЭВМ с помощью алгоритмов разной структуры даются заключения достаточно общего характера, которые могут быть полезны при дальнейшем развитии метода граничных интегральных уравнений применительно к рассматриваемому классу прикладных задач.

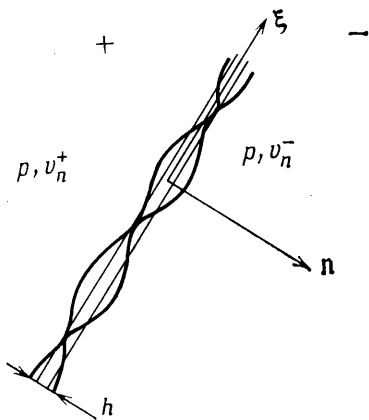
1. В обсуждаемом методе используются граничные интегральные уравнения для отдельных блоков, отвечающие трем требованиям, сформулированным в [5] применительно к аналогичным задачам о системах упругих элементов: 1) уравнение сформулировано для физических, а не фиктивных величин; 2) функции, испытывающие разрыв на границах блоков, входят только под знаками интегралов по границам; 3) если интегральное соотношение удовлетворяется на границе, то оно тождественно выполняется и в любой точке вне блока при равном нулю внеинтегральном члене.

Подобные уравнения хорошо известны для стационарных задач, представляя собой вариант третьего тождества Грина, а после применения преобразования Лапласа они формируются и для нестационарных задач [1]. Для j -того блока, занимающего область V_j^+ с границей γ_j и внешней нормалью n , и вне его (область V_j^-) имеем

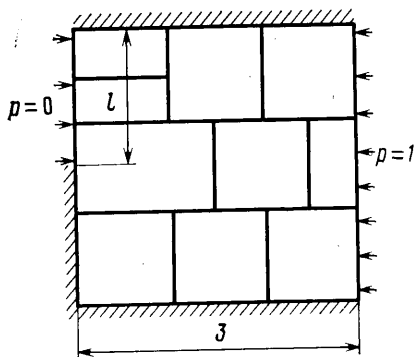
$$p_j(r_0) - \int_{\gamma_j} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_j \Gamma_j(r_0, r) - p_j(r) \frac{\partial}{\partial n} \Gamma_j(r_0, r) \right] d\gamma = 0, \quad r_0 \in \gamma_j \quad (1.1)$$

$$- \int_{\gamma_j} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_j \Gamma_j(r_0, r) - p_j(r) \frac{\partial}{\partial n} \Gamma_j(r_0, r) \right] d\gamma = 0, \quad r_0 \in V_j^- \quad (1.2)$$

где r_0, r — радиусы-векторы точек; $\Gamma_j(r_0, r)$ — фундаментальное решение исходного дифференциального уравнения, обладающее логарифмической особенностью в плоской задаче и особенностью вида $1/|r-r_0|$ в пространственном случае; производная по нормали вычисляется в переменной точке r интегрирования. Функция p имеет смысл напора (в задачах фильтрации), напряжения (в электростатике) или температуры.



Фиг. 1



Фиг. 2

Пусть имеется n соприкасающихся блоков. Для каждого из них справедливы соотношения (1.1), (1.2). Предполагается, кроме того, что для любого j ($j=1, \dots, n$) $\Gamma_j(r_0, r) = \Gamma(r_0, r)$ — одна и та же функция и что вдоль каждого из общих участков границ двух смежных блоков (для конкретности j -того и k -того) выполняются соотношения

$$p_j = p_k = p, \quad c_j \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_j + c_k \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_k = Ap \quad (1.3)$$

где A — заданный оператор; c_j — постоянная, характеризующая свойства j -того блока. Эти условия удовлетворяются в задачах об установившейся фильтрации, электро- и теплопроводности для произвольных блоков. Они выполняются также в нестационарных задачах (после преобразования Лапласа по времени), если свойства блоков одинаковы, и в ряде других случаев. Тогда умножение (1.1) и (1.2) на c_j и суммирование (1.1) по всем j с учетом (1.2), (1.3) и того, что нормали к смежным блокам имеют противоположные направления, дает

$$(c^+ + c^-)p(r_0) - \int_{\Gamma} \left[Ap\Gamma(r_0, r) - (c^+ - c^-)p \frac{\partial}{\partial n} \Gamma(r_0, r) \right] d\gamma = 0, \quad r_0 \in \gamma \quad (1.4)$$

где c^+ , c^- — значения постоянной c_j того блока, по отношению к которому нормаль в данной точке внешняя (внутренняя); γ — суммарная граница системы блоков. Нормаль n в (1.4) в точках внутренних границ фиксируется по произволу. Для внешней границы она направляется вне блоков, полагается $c^- = 0$ и p или Ap считается заданным хотя бы на некоторых участках (на прочих участках тогда должен быть известен сам оператор A). Соотношение (1.4) представляет искомое интегральное уравнение.

2. Оператор A , входящий в (1.4), отражает результат осреднения по малой толщине контактной зоны (трещины). Смысл оператора A поясним на примере стационарной фильтрации несжимаемой жидкости через систему блоков. На фиг. 1 показан элемент границы двух блоков, в которых происходит фильтрация. В связи с шероховатостью реальных поверхностей блоки соприкасаются только по некоторым выступам и между ними имеется зазор (открытый или частично заполненный) средней толщины h , по которому также возможно течение.

Направление нормали n к средней поверхности контакта выбирается произвольно. Величины в блоке, по отношению к которому нормаль внешняя (внутренняя), отмечаются знаком плюс (минус). Из закона сохранения

ния массы в зазоре имеем

$$\operatorname{div}_0 j = v_n^+ - v_n^- + v_0 = \Delta v \quad (2.1)$$

где $j = hv_s$ — поток жидкости вдоль контакта; индекс нуль отмечает, что вычисление проводится в касательной плоскости; v_0 — приток в рассматриваемую точку контакта в единицу времени на единицу площади. Соотношение (2.1) можно отнести и к внешней границе, приняв для нее $v_n^- = 0$.

Считая, что внутри блоков имеет место закон Дарси, а в трещине — течение типа Пуазейля, из (2.1) получим

$$k^+ \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)^+ - k^- \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)^- = \operatorname{div}_0 (k_s \operatorname{grad}_0 p) + v_0 \equiv Ap \quad (2.2)$$

где k^+ , k^- — коэффициенты фильтрации в блоках; k_s — коэффициент проводимости трещины; p — давление (напор) в зазоре.

В нестационарном случае в соотношение, аналогичное (2.2) и получаемое после преобразования Лапласа, добавляется член, отвечающий пьезопроводности. Если на границах блоков пренебречь упругим сжатием жидкости в трещинах, то контактное условие (2.2) не изменяется. Фундаментальное решение Γ_j , характеризующее дифференциальное уравнение для j -того блока, при нестационарном течении помимо r_0 , r оказывается зависящим от параметра преобразования и отношения коэффициента фильтрации к коэффициенту пьезопроводности блока. Вывод уравнения (1.4) остается в силе только при равенстве этого отношения для всех блоков.

3. Необходимо особо рассмотреть ребра — линии пересечения, или излома, поверхности контакта, на которых касательная плоскость и нормаль не определены и формула (2.2) неприменима. Сформулируем на ребрах специальные соотношения, служащие дополнительными условиями при решении интегрального уравнения. Они исключают побочные решения, порождаемые наличием пересечений и изломов поверхности контакта.

Ребро может либо представлять собой канал, обладающий повышенной (сравнительно с остальной поверхностью контакта) проводимостью k , либо нет. В первом случае на нем должны выполняться одномерные соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial l} &= \sum_{i=1}^N j_{mi} + j_0; & I &= -k_l \frac{dp}{dl}; & j_{mi} &= -k_{si} \frac{\partial p}{\partial m_i}; \\ & & & & & - \sum_{i=1}^N k_{si} \frac{\partial p}{\partial m_i} = \frac{\partial}{\partial l} \left(k_l \frac{dp}{dl} \right) + j_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $I = Fv_l$ — вектор потока в канале (на ребре); F — площадь его сечения; v_l — вектор средней скорости течения в канале; k_l — коэффициент, аналогичный по смыслу коэффициентам k и k_s , но отличающийся от них размерностью (размерность k умножается на размерность квадрата длины); l — ось локальной системы координат, направленная по касательной к ребру; N — число трещин (проводников), пересекающихся в ребре; j_{mi} — нормальная к ребру составляющая вектора потока в i -той из пересекающихся в ребре поверхностей; j_0 — плотность распределенных вдоль ребра источников (при их отсутствии $j_0 = 0$).

В свою очередь пересечение ребер дает узлы, сумма потоков в которых при наличии сосредоточенных в них источников равна интенсивности

этих источников I_0

$$\sum_{r=1}^T I_r = I_0 \quad (3.2)$$

где T — число ребер, пересекающихся в узле; I_r — поток в r -том из пересекающихся в узле ребер определяемый согласно (3.1). Значения I_r в (3.2) берутся с соответствующими знаками: притоки — с плюсом, а расходы — с минусом. При отсутствии сосредоточенных источников в точках пересечения ребер $I_0 = 0$.

Во втором случае, когда ребра не имеют проводимости, повышенной сравнительно с самими поверхностями контакта, достаточно считать $k_i = 0$. Тогда из (3.1) следует $I = 0$ и дополнительное условие принимает вид

$$\sum_{i=1}^N j_{mi} = -j_0 \quad (3.3)$$

Равенство для узлов (3.2) выполняется, поскольку $I_0 = 0$ и $I_r = 0$ ($r = 1, \dots, T$). Поэтому система обсуждаемых условий сводится к равенству (3.3). Эта же система отвечает и плоской задаче, поскольку в ней вдоль ребер никаких изменений не происходит, перепад давлений и течение отсутствуют ($dp/dl = 0$, $I = 0$, $dI/dl = 0$). Тогда (3.3) выполняется как следствие (3.1).

В случае предельной ситуации, когда сами блоки непроницаемы, а течение происходит лишь по разделяющим их границам, в регулярных точках контактов левая часть (2.2) равна нулю

$$\operatorname{div}_0(k_s \operatorname{grad}_0 p) + v_0 = 0 \quad (3.4)$$

На ребрах в общем случае удовлетворяются равенства (3.1), а в узлах — (3.2). При отсутствии повышенной проводимости ребер эти равенства сводятся к (3.3).

При плоских границах и постоянных значениях k_s на них уравнение (3.4) в свою очередь может быть заменено эквивалентным интегральным уравнением вида (1.4), и большая часть результатов сразу распространяется на этот двумерный случай. В случае плоского течения (3.4) представляет обыкновенное дифференциальное уравнение и при отсутствии распределенных источников ($v_0 = 0$) имеют место соотношения, аналогичные законам Кирхгофа для распределения токов j и потенциалов p в одномерных проводниках с проводимостями k_s .

4. Рассматриваемая задача имеет две существенные особенности. Во-первых, оператор A в (1.4) таков, что уравнение содержит под знаком интеграла вторые производные функции p . Во-вторых, совокупность уравнения (1.4) и дополнительных условий (3.1), (3.2) (или (3.3)) образует переопределенную систему уравнений. С целью исследовать влияние этих особенностей разработаны и реализованы два разных алгоритма для плоской задачи о стационарной фильтрации несжимаемой жидкости через произвольную систему блоков и разделяющих их трещин. В плоскости течения границам блоков отвечает контур γ , ребрам соответствуют точки-узлы, операции div_0 , grad_0 и d/dm_i сводятся к обычному дифференцированию по касательной к контуру. В рассматриваемом случае уравнение (1.4) и дополнительное условие (3.3) принимают вид

$$k_1 p(\sigma_0) + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} \left\{ \left[\frac{d}{ds} \left(k_s \frac{dp}{ds} \right) + v_0 \right] \ln \rho - k_2 \rho \frac{\partial}{\partial n} \ln \rho \right\} ds = 0, \quad r_0 \in \gamma \quad (4.1)$$

$$\sum_i k_{si} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_i = j_0 \quad (4.2)$$

$$k_1 = k^+ + k^-; \quad k_2 = k^+ - k^-; \quad \rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

где s — длина вдоль контура γ , отсчитываемая от произвольной его точки; суммирование выполняется по всем трещинам, пересекающимся в рассматриваемой точке. Конечно, эти равенства можно отнести и к регулярным точкам границ блоков. Для них число слагаемых в сумме равно двум.

В обоих вариантах программы для сопоставимости результатов используются одинаковые представления границы, заданных и искомым функций. Контур γ разбивается на сумму прямолинейных отрезков произвольной длины, вдоль которых сохраняется характер граничных или контактных условий. Каждый из отрезков в свою очередь делится на подотрезки, одинаковые в пределах отрезка. Значения искомым или заданных функций считаются постоянными на каждом подотрезке и выносятся за знак интеграла. Интегрирование функций, остающихся под интегралом, выполняется либо по аналитическим формулам (если интеграл имеет аналитическое выражение), либо численно — по формуле Симпсона (увеличение числа узлов этой формулы с 7 до 15 при использованном делении контура уже не влияло на получаемые результаты). Подотрезки, на которых подынтегральная функция обращается в бесконечность, всегда выделяются особо и интегрирование по ним проводится только по аналитическим зависимостям с выделением особенности. В интеграле, содержащем $\partial \ln \rho / \partial n$, соответствующее слагаемое пропускается, так как все контрольные точки помещаются в середины подотрезков.

В первом варианте, с тем чтобы избежать двукратного дифференцирования, решение строится относительно первой производной $q = dp/ds$. Тогда

$$p = p_0 + \int_{s_0}^s q \, ds$$

где s_0 — значение s в произвольной точке контура γ ; p_0 — напор в этой точке. При общем числе подотрезков M уравнение (4.1) после аппроксимации q и v_0 постоянными значениями на каждом из подотрезков и интегрирования дает систему M уравнений для M неизвестных, каковыми служат значения градиента напора, если на подотрезке задан приток, или притока, если на подотрезке известен напор. Присоединение (4.2) дает дополнительные равенства, число которых равно числу R точек излома и пересечения трещин, для тех же неизвестных. В результате получается переопределенная система $M+R$ уравнений для M неизвестных. Ее решение строится методом наименьших квадратов.

Решение задач с помощью первого варианта позволило установить, что наличие вторых производных в контактных условиях не влечет за собой неблагоприятных последствий. Результаты расчетов оказываются вполне надежными и устойчивыми, за исключением случаев, когда трещинная проводимость значительно выше проводимости блоков и на внешней границе вовсе нет трещин, открытых для истечения, или таких трещин мало по сравнению с их общим числом в системе. В таких случаях некоторое улучшение достигается введением дополнительного переопределяющего соотношения, выражающего общий баланс расходов и притоков по всему внешнему контуру, но все же в особо сложных случаях и этот прием не помогает.

Для интегрирования в этих случаях был предложен алгоритм, основанный на выделении членов, которые характеризуют течение только по трещинам при нулевой проницаемости блоков. Соответствующая система уравнений ничем не отличается от уравнений распределения потенциалов в электрической цепи, составленной из сопротивлений. Ненулевая проводимость реальных блоков отражается в виде некоторых добавок, эквивалентных дополнительным источникам тока с интенсивностями $\Delta v = v^+ - v^- + v_0$.

Упомянутая система получается, если воспользоваться формулой, представляющей простое следствие закона течения в трещине [4]

$$\sum_i \left\{ \left[p - p_i - \int_{s_i}^s \left(\int_{s_i}^s \Delta v \, d\xi \right) \frac{ds}{k_s} \right] \left(\int_{s_i}^s \frac{ds}{k} \right)^{-1} \right\} = j_0 \quad (4.3)$$

где p — напор в рассматриваемой точке. Суммирование распространяется на все подотрезки, сходящиеся к ней. Их номера отмечены индексом i . Для регулярных точек $N=2$.

Формула (4.3) используется сначала для формирования упомянутой системы уравнений, эквивалентной уравнениям электрической цепи. С этой целью она прилагается как к точкам излома и пересечения трещин, так и к точкам краев внутренних подотрезков, в которых неизвестен напор. Совокупность тех и других точек образует R_1 узлов с неизвестными напорами. Обозначая эти неизвестные p_k ($k=1, \dots, R_1$), имеем из (4.3) R_1 уравнений для R_1 неизвестных

$$\sum_i \left\{ \left[p_k - p_i - \int_{s_i}^{s_k} \left(\int_{s_i}^{s_k} \Delta v d\xi \right) \frac{ds}{k_s} \right] \left(\int_{s_i}^{s_k} \frac{ds}{k_s} \right)^{-1} \right\} = j_{0k} \quad (k=1, \dots, R_1) \quad (4.4)$$

Здесь индекс k указывает, что величина относится к узлу k с неизвестным напором. Некоторые из p_i , отвечающие тем краям внутренних подотрезков, которые совпадают с точками на внешнем контуре с заданными напорами, известны. Они также могут быть известны и в некоторых внутренних узлах. Поэтому в общем случае даже при $\Delta v = j_{0k} = 0$ система (4.4) неоднородна и имеет ненулевое решение.

Из алгебраической системы (4.4) сразу следует решение, если заранее знать интенсивность источников Δv , определяющих втекание (или вытекание) жидкости на единице поверхности трещины из прилежащих к ней блоков.

Значения Δv в точках трещин заранее неизвестны и для их определения служит пока что не использованное уравнение (4.1), в котором с помощью соотношения $d(k_s dp/ds)/ds = \Delta v$ вовсе исключается дифференцирование p по s

$$k_1 p(r_0) + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} \left[(v_0 - \Delta v) \ln \rho - k_2 p \frac{\partial}{\partial n} \ln \rho \right] ds = 0, \quad r_0 \in \gamma \quad (4.5)$$

Как и в первом варианте программы, контур γ разбивается на подотрезки общим числом M . На любом подотрезке внешнего контура в уравнении (4.5) известно либо Δv , либо p по заданию граничных условий. На внутренних подотрезках неизвестны ни Δv , ни p . Чтобы устранить эту неопределенность, значения напоров в контрольных точках внутренних подотрезков выражаются через Δv с помощью (4.3). В итоге получается алгебраическая система $M+R_1$ уравнений для $M+R_1$ неизвестных. Опуская детали соответствующих преобразований, следует подчеркнуть, что, как и прежде, система переопределена, но учет этого обстоятельства теперь осуществляется иначе, чем в первом варианте. Фактически вводятся дополнительные значения напоров в точках излома и пересечения трещин, которые по сути дублируют значения в ближайших к ним контрольных точках подотрезков.

5. Примером, иллюстрирующим возможности, точность и соотношение результатов, полученных по двум разработанным и реализованным алгоритмам, может служить схема, показанная на фиг. 2. На ней изображен участок водопроводящего пласта, представленного блоками с разделяющими их трещинами, находящегося между водоупорными породами и вскрываемого дренажной траншеей при увеличении ее глубины l . У правой границы напор равен 1 усл. ед. У вскрытой части левой границы напор равен нулю. Проводимость трещин равна единице, а коэффициенты фильтрации блоков составляют 0.1. При длине стороны блока, равной единице, это соответствует проводимости трещин, примерно на порядок больше проводимости блоков.

Расчеты проводились с помощью двух программ, реализующих оба алгоритма на ЭВМ ЕС-1033 в сопоставимых условиях — при одинаковом разбиении контура и примерно одинаковом числе неизвестных, составляющем в первом варианте 200, а во втором 153. Результаты расчетов представлены ниже в виде зависимости суммарного притока жидкости от глубины траншеи l :

l	0	0,5	0,5	1,0	1,0	1,5	2,0	2,0	2,5	3,0
q_1	—	—	—	0,463	0,578	0,594	0,606	0,812	0,825	0,827
q_2	0	0,137	0,408	0,441	0,581	0,599	0,647	0,817	0,824	0,826

Здесь q_1 — значения, полученные по первому алгоритму, q_2 — по второму. Значениям $l=0,5; 1; 2$, при которых происходит вскрытие очередной трещины, соответствуют два значения. Первое из них отвечает притоку непосредственно перед вскрытием, а второе — сразу после него. Погрешность вычислений оценивалась по отношению разности общего притока в блоки справа и суммарного притока в траншею слева к среднему арифметическому этих притоков (в точном решении они равны). Она составляет 19,5% перед вскрытием первой трещины, падает до 3,8% сразу после ее вскрытия; уменьшается до 0,4% при $l=1,5$ и становится меньше 1% при l , превышающем 2.

Таким образом значения, полученные по двум разным алгоритмам, достаточно хорошо согласуются между собой в случаях, когда оба они обеспечивают решение задачи. Однако первый вариант вовсе не дал разумного решения в случаях, когда траншея вскрывает только один блок ($l \leq 0,5$) пласта с трещинами. Тем не менее он дает хорошие результаты и для таких значений l , если собственную проводимость трещин устремить к нулю, т. е. фактически считать весь участок пласта одним сплошным однородным блоком. В этом предельном случае во втором варианте происходит вырождение и теперь уже он оказывается неприменимым.

Проведенные расчеты для схемы фиг. 2 и других схем фильтрации в трещиновато-блочной среде свидетельствуют о том, что даже при малой (порядка процентов от проводимости трещин) проводимости блоков она все же имеет существенное значение, особенно на первых этапах вскрытия пласта, заметно повышая водоприток и сглаживая скачки, обусловленные вскрытием очередной трещины. В таких условиях комбинированное влияние трещинной и блочной проводимостей невозможно отразить, используя модель некоторой «эквивалентной» однородной среды без трещин. Выявляется и большая роль течения по вертикальным трещинам. Например, при вскрытии половины пласта исключение вертикальных трещин снижает приток на 20%. Это ограничивает применимость популярной в гидрогеологии простейшей модели горизонтально-трещиноватого пласта и побуждает учитывать поперечные трещины. Метод граничных интегральных уравнений, как показано, дает средство изучения подобных важных прикладных задач, которые оставались недоступными для решения другими методами.

Авторы признательны гидрогеологам — сотрудникам Всесоюзного института горной геомеханики и маркшейдерского дела (ВНИМИ) и Ленинградского горного института за стимулирующий интерес к данной работе на протяжении трех лет и за обсуждение ряда ее прикладных аспектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Метод граничных интегральных уравнений. М.: Мир, 1978. 210 с. (Механика, Новое в зарубеж. науке, Вып. 15).
2. Бреббиа К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982. 248 с.
3. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
4. Shapiro A. M., Andersson J. Steady state fluid response in fractured rock: A boundary element solution for a coupled discrete fracture continuum model.— Water Resour. Res., 1983, v. 19, № 4, p. 959–969.
5. Линьков А. М. Плоские задачи о статистическом нагружении кусочно-однородной линейно-упругой среды.— ПММ, 1983, т. 47, вып. с. 644–651.

Ленинград

Поступила в редакцию
20.V.1985