

УДК 532.546

ЗАДАЧА СИСТЕМАТИЧЕСКОГО ДРЕНАЖА ОРОШАЕМЫХ ЗЕМЕЛЬ, ПОДСТИЛАЕМЫХ ВОДОУПОРНОМ

КРАМАРОВСКАЯ И. И., КРАМАРОВСКИЙ Б. И.

Фильтрационные задачи, в которых одновременно учитываются орошение и дренаж, возникают весьма часто при проведении гидромелиоративных мероприятий в зонах аридного климата. В публикуемой работе исследуется фильтрация в грунте ограниченной мощности в условиях инфильтрации и горизонтального закрытого дренажа. Дренаж осуществляется системой горизонтальных параллельных труб круглого сечения, расположенных друг от друга на одинаковом расстоянии и одинаково заглубленных. Предполагается, что дрена полностью заполнена водой; напор в грунте вдоль линии соприкосновения с дренажной трубой равен высотной отметке верхней ее точки, избыточное давление в которой отсутствует. На поверхности земли задается постоянная влажность. Это может являться результатом неравномерности распределения поливных норм. При равномерном поливе поверхностный слой земли увлажняется неравномерно: наибольшая, часто избыточная, насыщенность — посредине между дренами, над дренами грунт практически сухой. Соответствующая задача стационарной фильтрации сводится к краевой задаче теории аналитических функций, в ходе решения которой выясняется, каким должно быть распределение поливных норм, обеспечивающих равномерную влажность поверхности земли.

Рассмотрим фильтрационное течение в плоскости, перпендикулярной оси трубы. Вся плоскость фильтрации можно разделить на области влияния каждой дрены, причем при неограниченном их числе эти области одинаковы. В силу симметрии течения относительно вертикали, пересекающей ось дрены, достаточно изучить фильтрацию в половине такой области.

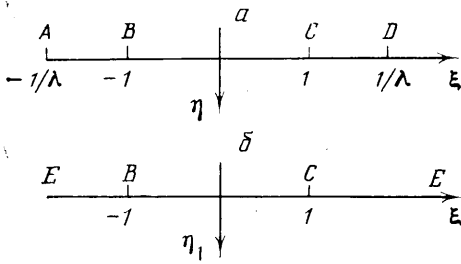
Итак, рассматривается установившаяся фильтрация в прямоугольнике $ABCD$ (фиг. 1). Дрена аппроксимируется точечным стоком, расположенным в точке E . На поверхности земли задается постоянная величина $\eta = \eta_1$, где $\eta = p/\gamma$, а p и γ — разность между действительным и атмосферным давлениями и удельный вес воды. При неполном насыщении это эквивалентно заданию постоянной влажности. Участки границы BE и $CDAE$ являются линиями тока. Пусть BE — нулевая линия тока. Тогда вдоль $CDAE$ функция тока $\psi = -Q$, где Q — интенсивность стока.

Фильтрация в рассматриваемой области, охватывающей зоны полного и неполного насыщения, описывается уравнением

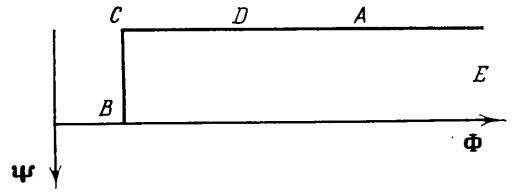
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \frac{\partial k(\eta)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

где $k(\eta)$ — коэффициент влагопроводности.

Как и в [1, 2], будем считать, что $k(\eta)$ при $-\infty < \eta < \infty$ является монотонно возрастающей функцией η , имеющей непрерывную первую производную. Она должна достаточно хорошо отражать экспериментально наблюдаемые зависимости в зоне неполного насыщения и совпадать с коэффициентом фильтрации k_f в области полного насыщения.



Фиг. 2



Фиг. 3

в (3) приближенным выражением $\kappa(y)$. Тогда V_x, V_y будут совпадать с соответствующими компонентами скорости u_x, u_y действительного течения, а Φ, Ψ и Ω — соответственно с потенциалом скорости, функцией тока и комплексным потенциалом действительного течения.

Для дальнейшего решения задачи необходимо определить комплексный потенциал Ω в области течения (фиг. 1) при граничных условиях: $\Psi=0$ на BE , $\Psi=-Q$ на $CDAE$, $\Phi=\Phi^0$ на BC , $\Phi=\infty$ в точке E , где

$$\Phi^0 = \int_0^{\eta_1} k(\eta) d\eta + f(0)$$

Для отыскания Ω воспользуемся методом конформных отображений. Область движения — прямоугольник $ABCD$ (фиг. 1) — отобразим на нижнюю полуплоскость вспомогательной комплексной переменной ζ (соответствие точек показано на фиг. 2, а). Получим

$$z = \frac{L}{2K(\lambda)} \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\lambda^2\zeta^2)}} + \frac{L}{2} \quad (4)$$

Модуль λ определяется из соотношения

$$K'(\lambda)/K(\lambda) = 2m/L$$

где $K(\lambda)$ и $K'(\lambda) = \sqrt{1-\lambda^2}$ — полные эллиптические интегралы первого рода с модулями λ и $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$ соответственно.

Область изменения Ω — полуполосу (фиг. 3) — отобразим на нижнюю полуплоскость другой вспомогательной комплексной переменной ζ_1 (соответствие точек указано на фиг. 2, б). Получим

$$\Omega = -\frac{iQ}{\pi} \arcsin \zeta_1 + \Phi^0 - \frac{iQ}{2} \quad (5)$$

Переменные ζ и ζ_1 связаны соотношением

$$\zeta_1 = (e\zeta - 1)/(e - \zeta) \quad (6)$$

Разделив в (4), (6) и (5) действительные и мнимые части, получим соответственно

$$\xi = \frac{\operatorname{sn}(x_1, \lambda) \operatorname{dn}(y_1, \lambda')}{\operatorname{cn}^2(y_1, \lambda') + \lambda^2 \operatorname{sn}^2(x_1, \lambda) \operatorname{sn}^2(y_1, \lambda')} \quad (7)$$

$$\eta = \frac{\operatorname{cn}(x_1, \lambda) \operatorname{dn}(x_1, \lambda) \operatorname{sn}(y_1, \lambda') \operatorname{cn}(y_1, \lambda')}{\operatorname{cn}^2(y_1, \lambda') + \lambda^2 \operatorname{sn}^2(x_1, \lambda) \operatorname{sn}^2(y_1, \lambda')}$$

$$\xi_1 = \frac{(e\xi - 1)(e - \xi) - e\eta^2}{(\xi - e)^2 + \eta^2}, \quad \eta_1 = \frac{(e^2 - 1)\eta}{(e - \xi)^2 + \eta^2} \quad (8)$$

$$\Phi_1 = \text{Arsh} \sqrt{\frac{1}{2} (-R + \sqrt{R^2 + 4\eta_1^2})} \quad (9)$$

$$\Psi_1 = \begin{cases} -\arcsin \sqrt{\frac{1}{2} (R + \sqrt{R^2 + 4\eta_1^2})} & (\xi_1 \leq 0) \\ -\pi + \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} (R + \sqrt{R^2 + 4\eta_1^2})} & (\xi_1 > 0) \end{cases}$$

$$x_1 = K(\lambda) \left(\frac{2x}{L} - 1 \right), \quad y_1 = 2K(\lambda) \frac{y}{L} = K'(\lambda) \frac{y}{m}, \quad -K(\lambda) \leq x_1 \leq K(\lambda)$$

$$0 \leq y_1 \leq K'(\lambda), \quad e^{-1} = -dn(2K(\lambda)d/L, \lambda'), \quad \Phi_1 = \pi(\Phi - \Phi^0)/Q,$$

$$\Psi_1 = \pi\Psi/Q \quad R = 1 - \xi_1^2 - \eta_1^2, \quad L = |BC|, \quad m = |AB|$$

Здесь sn , cn , dn — эллиптические функции Якоби, e — координата точки E в плоскости ξ .

Расход фильтрационного потока Q определим, пользуясь граничным условием на контуре дрены, за который примем эквипотенциаль, проходящую через верхнюю точку G дрены. В точке G имеем (δ — радиус дрены)

$$\eta_1 = 0, \quad y = d - \delta, \quad \Phi = f(d - \delta) = \int_0^{d-\delta} \kappa(y) dy = \Phi_g, \quad \xi_1 = \xi_{1g}$$

Подставив эти значения в (5), получим

$$Q = -\pi(\Phi_g - \Phi^0) / \ln(-\xi_{1g} - \sqrt{\xi_{1g}^2 - 1}) \quad (10)$$

Из (4), (5) и (6) найдем комплексную скорость как функцию переменной ξ

$$\bar{v} = v_x - iv_y = \frac{d\Omega}{dz} = -\frac{2iQK(\lambda)}{\pi L} \frac{\sqrt{(e^2 - 1)(1 - \lambda^2 \xi^2)}}{\xi - e}$$

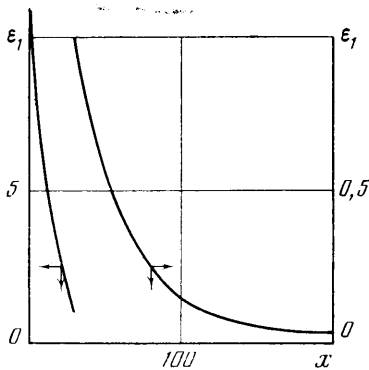
При $y = 0$ имеем $v_y = \varepsilon$, где ε — интенсивность инфильтрации на поверхности земли, определяемая выражением

$$\varepsilon = \frac{2QK(\lambda)}{\pi L} \frac{\sqrt{(e^2 - 1)(1 - \lambda^2 \xi^2)}}{\xi - e}, \quad \xi = -\text{sn} \left(K(\lambda) \left(1 - \frac{2x}{L} \right), \lambda \right) \quad (11)$$

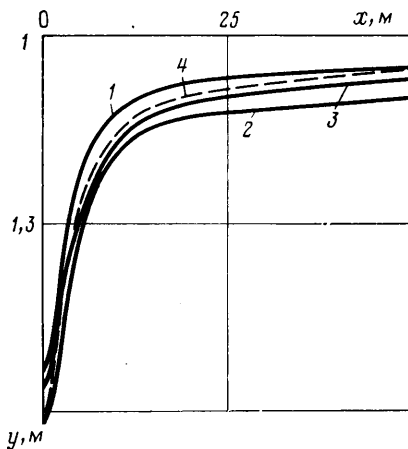
Из (11) ясно, насколько неравномерным должно быть распределение инфильтрации вдоль границы BC в рассматриваемой задаче. Отношение интенсивностей инфильтрации в точках B и C , равное $|e - 1| |e + 1|^{-1}$, зависит от глубины залегания дренажной трубы. Чем ближе к поверхности земли залегают дренажные трубы, тем большая неравномерность распределения поливных норм требуется для обеспечения постоянной влажности на поверхности земли.

На фиг. 4 представлен график распределения приведенной инфильтрации $\varepsilon_1 = 0,5\pi L\varepsilon/K(\lambda)Q$ вдоль BC , построенный для следующих геометрических размеров: $L = 50$ м, $m = 25$ м, $d = 2,5$ м и соответствующих им значений $\lambda^2 = 0,5$, $e = -1,00857$.

Далее, применяя последовательно формулы (7), (8), (9) для сетки значений x и y , получим соответствующие им значения Φ_1 и Ψ_1 ; с их помощью построим линии тока и эквипотенциали. Принимая во внимание соотношения $\Phi = Q\Phi_1/\pi + \Phi^0$, $\Phi = -\Theta + f(y)$, имея сетку значений Φ_1 , можно построить семейство изобар. Изобара, на которой $\eta = 0$, отвечает свободной поверхности.



Фиг. 4



Фиг. 5

Расход и положение изобар определяются с некоторой погрешностью, так как при решении был использован приближенный метод. Точность решения зависит от близости задаваемой функции $\kappa(y)$ к коэффициенту влагопроводности $k(\eta)$. В случае одномерного движения, когда η не зависит от x , можно добиться хорошего приближения функции $\kappa(y)$ к $k(\eta)$, выбирая ее, например, в виде $\kappa(y) = k_f(\text{th } \omega(y) + 1)/2$, где $\omega(y)$ — некоторая возрастающая функция. Для нее могут быть использованы выражения

$$\omega(y) = \alpha y + \beta, \quad \omega(y) = m \exp(ry) + n \exp(sy) + t$$

где $\alpha, \beta, m, n, r, s, t$ — константы.

При двумерном движении функцию $\omega(y)$ можно выбирать, ориентируясь на некоторое вертикальное сечение, т. е. фиксируя определенное значение x . О погрешности, связанной с тем, что введенная функция $\kappa(y)$ не учитывает зависимость коэффициента влагопроводности от x , можно судить, получив предельные решения, соответствующие таким двум вертикальным сечениям, в которых зависимости k от y максимально отличаются друг от друга.

Ясно, что чем ближе в области неполного насыщения линии $\eta = \text{const}$ к горизонталям, тем большей точности решения можно добиться.

В данной задаче на верхней и нижней границах области неполного насыщения $\eta = \text{const}$. Верхняя граница — поверхность земли — горизонтальна, нижняя — свободная поверхность — очевидно, не сильно искривлена. Следует ожидать, что в рассматриваемом случае может быть получено решение, весьма близкое к точному.

Зададим $\kappa(y)$ в виде

$$\kappa(y) = \frac{1}{2} k_f (\text{th}(\alpha y + \beta) + 1)$$

Постоянные α и β выберем так, чтобы на поверхности земли ($y=0$) выполнялось условие $\kappa(0) = k(\eta_1) = k_1$, а на свободной поверхности ($y=y^0$) значение $\kappa(y^0)$ было близко к коэффициенту фильтрации. Для этого следует положить $\alpha y^0 + \beta \approx 2,5$.

Первое из этих условий определяет β : $\beta = \text{Arth}(2k_1/k_f - 1)$. Из второго следует, что $\alpha \approx (2,5 - \beta)/y^0$.

Положение свободной поверхности заранее неизвестно. Для ее приближенного отыскания вначале следует задаться некоторым ориентировочным значением y^0 и с его помощью определить α . Далее для вычисленных значений α и β надо построить график зависимости $f(y)$ по формуле

$$f(y) = \frac{k_1}{2} \left[\frac{1}{\alpha} \ln \frac{\text{ch}(\alpha y + \beta)}{\text{ch } \beta} + y \right]$$

и определить $\Phi_g = f(\alpha - \delta)$. Затем по формуле (10) следует определить Q , после чего в узловых точках плоскости z найти Φ по формуле $\Phi = Q\Phi_1/\pi + \Phi^0$ и для фиксированных x построить графики зависимости $\Phi(y)$. Точки пересечения этих кривых с кривой $f(y)$ принадлежат свободной поверхности. Таким образом, в первом приближении находится положение свободной поверхности.

Имея полученное решение, можно уже более точно выбрать y^0 , найти соответствующее ему значение α и, повторяя указанную выше последовательность операций, найти второе приближение положения свободной поверхности. При необходимости всю процедуру можно повторить нужное число раз. Однако обычно второе приближение оказывается вполне приемлемым.

Высотная отметка депрессионной кривой является функцией x . В качестве y° , используемого при расчете, можно взять ординату любой точки этой кривой. Множеству y° , принадлежащих свободной поверхности, соответствует множество кривых, заполняющих некоторую полосу. Выбирая с помощью последовательных приближений значение y° , соответствующее положению свободной поверхности на правой границе, получим верхнюю предельную кривую этого множества (кривая 1 на фиг. 5); выбирая y° , соответствующее положению свободной поверхности на левой границе, получим нижнюю предельную кривую (кривая 2). Одну из кривых, принадлежащих данной полосе (кривая 3), и следует принять за свободную поверхность.

Можно, однако, несколько уточнить положение свободной поверхности, приняв во внимание, что она должна совпадать с кривой 1 на правом конце, с кривой 2 — на левом, т. е. иметь вид кривой 4 (фиг. 5). Такая кривая будет построена, если задаться зависимостью y° от x , которая определит в свою очередь зависимость $\alpha(x)$.

После окончательного определения положения свободной поверхности и α с помощью формулы $\Phi = -\Theta + f(y)$ можно построить линии равного давления $\eta = \text{const}$, совпадающие в области неполного насыщения с линиями равной влажности.

На фиг. 5 представлены результаты расчетов, проведенных для пласта с теми же геометрическими размерами, что и для фиг. 4 при следующих значениях параметров: $\delta = 0,1$ м, $\eta_1 = -1,6$ м, $k(\eta) = 1/2 k_f (\text{th}(a \exp(b\eta) + c \exp(d\eta) + m) + 1)$, $a = -0,4$, $b = -0,5$ м⁻¹, $c = 3$, $d = 3$ м⁻¹, $m = 0,35$, $k_f = 1$ м/сут, $k_1 = 0,564$ м/сут, $\Phi^\circ = 0,931$ м²/сут, $\beta = 0,129$.

Верхняя предельная кривая построена для $y^\circ = 1,05$ м, $\alpha = 2,37$ м⁻¹; нижняя — для $y^\circ = 1,62$ м, $\alpha = 1,6$ м⁻¹.

При этих данных расстояние между кривыми 1 и 2 фиг. 5 по вертикали не превышает 9 см. Такая небольшая ширина полосы позволяет считать, что свободная поверхность (кривая 3 или 4) построена с точностью, вполне достаточной для гидромелиоративной практики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Геронимус М. Б., Крамаровская И. И. Задача систематического внутриводоемного орошения из перфорированных труб.— Сб. науч. тр. Ташкентского ун-та им. В. И. Ленина, 1982, № 683, с. 41–47.
2. Крамаровская И. И. О некоторых гидрологических параметрах грунта.— Изв. АН УзССР, Сер. техн. наук, 1986, № 1, с. 49–53.
3. Крамаровская И. И. Увлажнение почвы из источника, расположенного на поверхности земли.— Сб. науч. тр. Ташкент. ун-та им. В. И. Ленина, 1981, № 670, с. 24–30.

Ташкент

Поступила в редакцию
17.X.1985