

УДК 532.546

## О СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОЙ ЧАСТИЦЫ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНОЙ ПОРИСТОСТЬЮ

ИНДЕЛЬМАН П. В.

При исследовании фильтрации нейтральной примеси в стохастической постановке чаще всего предполагается, что пористость является постоянной и детерминированной величиной, а скорость — случайной функцией [1–4]. При этом распределение скорости обычно считается известным. Фильтрация в среде со случайной пористостью изучена в существенно меньшей степени. Отметим работу [5], в которой исследованы осредненные уравнения, полученные в рамках корреляционного приближения.

Ниже рассматривается модельная задача об одномерном движении жидкой частицы (положении фронта при фильтрации нейтральной примеси) в среде со случайной пористостью. Для частного вида случайного поля пористости получены выражения для одно- и двухточечной плотностей распределения положения частицы. Исследованы зависимости первых четырех моментов и корреляционной функции положения частицы как функции времени. Показано, что асимптотически для больших времен движение частицы аналогично броуновскому блужданию. С помощью численного моделирования показано, что полученные результаты переносятся на случай произвольного случайного поля пористости.

1. Рассмотрим одномерное движение частицы (фронта нейтральной примеси), выходящей в момент времени  $t'=0$  из точки  $x=0$  и движущейся в среде, пористость которой  $m(x)$  является случайной функцией пространственной переменной  $x$ . Оно описывается нелинейным уравнением

$$m(x) dx/dt' = V \quad (1.1)$$

где скорость  $V > 0$  для простоты полагается постоянной и детерминированной.

Предметом исследования будут статистические свойства процесса  $x(t')$ . Рассмотрим частный случай задания поля  $m(x)$ . Для этого разобьем область течения на отрезки длины  $h$ . Пусть для любого  $x$  из интервала  $j h \leq x < (j+1)h$ ,  $j=0, 1, 2, \dots$ , справедливо соотношение

$$m(x) = m = \text{const}$$

где  $m$  — случайная величина с плотностью распределения  $p(m)$ . Введем безразмерную координату положения частицы  $y(t') = x(t')/h$  и положим  $y = n + \gamma$ ,  $0 \leq \gamma < 1$ , где  $n$  — целая часть  $y$ .

Для любой реализации поля  $m(x)$  траектория  $y(t')$  является кусочно-линейной непрерывной функцией. Для того чтобы частица в момент времени  $t'$  оказалась в точке  $y = n + \gamma$ , она должна пройти  $n$  отрезков за время  $\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq t'$ , а за оставшееся время  $t' - \tau$  пройти расстояние  $\gamma$ . Поэтому для плотности распределения вероятностей  $P_{t'}(n, \gamma)$  нахождения частицы в окрестности точки  $y = n + \gamma$  в момент времени  $t'$  имеет место соотношение

$$P_{t'}(n, \gamma) = \int_0^{t'} F(\tau | n) P_{t'-\tau}(0, \gamma) d\tau \quad (1.2)$$

где  $F(\tau|n)$  — плотность распределения вероятностей моментов времени  $\tau$  прохождения  $n$  отрезков.

Учитывая, что на любом отрезке  $(n, n+1)$  и для любой реализации функция  $y(t')$  линейна, можно написать следующие равенства:

$$F(\tau|n) = \int_0^{\tau} F(\tau_1|n-1)F(\tau-\tau_1|1)d\tau_1 \quad (1.3)$$

$$F(t'|1) = \frac{V}{h} p \left( \frac{Vt'}{h} \right), \quad P_i(0, \gamma) = \frac{Vt'}{\gamma^2 h} p \left( \frac{Vt'}{\gamma h} \right) \quad (1.4)$$

Таким образом,  $P_i(n, \gamma)$  выражается через  $p(m)$ . При этом если  $p(m)$  принадлежит классу плотностей распределения вероятностей, инвариантных относительно операции свертки, то плотность  $F(\tau|n)$  также принадлежит этому классу [6]. Ограничимся случаем, когда  $m$  имеет гамма-распределение

$$p(m) = \frac{\alpha^\nu m^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \exp(-\alpha m), \quad \nu > 0, \quad \alpha > 0 \quad (1.5)$$

при  $m \geq 0$  и  $p(m) = 0$  при  $m < 0$ . Заметим, что ограничение  $m \leq 1$  можно не учитывать, если рассматривать (1.1) как уравнение для расхода жидкости. Введем безразмерное время  $t = \alpha Vt'/h$ . Тогда из (1.2)–(1.5) имеем

$$P_i(n, \gamma) = \int_0^t \frac{\tau^{n\nu-1}}{\Gamma(n\nu)} \frac{(t-\tau)^\nu}{\Gamma(\nu)\gamma^{\nu+1}} \exp\left(-\tau - \frac{t-\tau}{\gamma}\right) d\tau, \quad n=1, 2, \dots \quad (1.6)$$

$$P_i(0, \gamma) = \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu)\gamma^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{t}{\gamma}\right), \quad F(t|n) = \frac{t^{n\nu-1}}{\Gamma(n\nu)} \exp(-t)$$

Выражение для  $P_i(0, \gamma)$  можно получить из формулы для  $P_i(n, \gamma)$ , если принять, что  $F(t|0) = \delta(t)$ .

В точке  $y=n$  плотность  $P_i(n, \gamma)$  терпит разрыв

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} P_i(n, \gamma) = \nu F(t|n), \quad \lim_{\gamma \rightarrow 1} P_i(n-1, \gamma) = \frac{t}{n} F(t|n) \quad (1.7)$$

Выражения для плотности распределения вероятностей  $F_{n,\gamma}(t)$  моментов времени  $t$  достижения частицей точки  $y=n+\gamma$  находятся из формул

$$F_{n,\gamma}(t) = \int_0^t F(\tau|n)F_\gamma(t-\tau)d\tau, \quad F_\gamma(\tau) = \frac{\gamma}{\tau} P_i(0, \gamma)$$

Отметим, что плотность  $F_{n,\gamma}(t)$  непрерывна на всем интервале  $y > 0$ . Существование разрывов у плотности  $P_i(n, \gamma)$  (см. (1.7)) связано с наличием скачков у любой реализации поля  $m(x)$ .

2. Вычислим моменты  $M_k(t)$  положения частицы в момент времени  $t$

$$M_k(t) = \langle (n+\gamma)^k \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (n+\gamma)^k P_i(n, \gamma) d\gamma$$

Применяя к (1.6) преобразование Лапласа, получим выражение для образа плотности распределения и моментов

$$P_p(n, \gamma) = \nu(1+p)^{-n\nu}(1+\gamma p)^{-\nu-1}, \quad n=0, 1, \dots \quad (2.1)$$

$$M_k(p) = \int_0^1 \frac{\nu}{(1+\gamma p)^{\nu+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\gamma)^k}{(1+p)^{n\nu}}$$

Преобразуем выражение для моментов (2.1) к виду

$$M_k(p) = \int_0^1 \frac{v}{(1+\gamma p)^{v+1}} e^{-\gamma z} \frac{d^k}{dz^k} \frac{e^{iz}}{1-e^z} d\gamma \quad (2.2)$$

где  $z = -v \ln(1+p)$ . Полагая

$$\frac{d^k}{dz^k} \frac{e^{\gamma z}}{1-e^z} = \sum_{l=0}^k \beta_l^{(k)} \frac{e^{(\gamma+l)z}}{(1-e^z)^{l+1}}$$

для коэффициентов разложения  $\beta_l^{(k)}$  получим рекуррентные соотношения

$$\beta_0^{(k)} = \gamma^k; \quad \beta_l^{(k+1)} = (l+\gamma)\beta_l^{(k)} + l\beta_{l-1}^{(k)}, \quad k > 0, \quad 1 \leq l \leq k-1; \quad \beta_k^{(k)} = k! \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.2), получим

$$M_k(p) = \sum_{l=0}^k \frac{v(1+p)^v}{[(1+p)^v - 1]^{l+1}} \int_0^1 \frac{\beta_l^{(k)}}{(1+\gamma p)^{v+1}} d\gamma \quad (2.4)$$

При этом для старших коэффициентов  $\beta_l^{(k)}$  имеют место соотношения

$$\beta_{k-1}^{(k)} = \left( \frac{k-1}{2} + \gamma \right) k!, \quad \beta_{k-2}^{(k)} = \left[ \frac{\gamma^2}{2} + \frac{k-2}{2} \gamma + \frac{(3k-5)(k-2)}{24} \right] k! \quad (2.5)$$

Из (2.4) и (2.3) следует условие нормировки для плотности  $P_i(n, \gamma)$ :  $M_0(t) = 1$ .

Выясним асимптотическое поведение  $M_k(t)$  при больших временах  $t$ . Поскольку точка  $p=0$  является полюсом порядка  $k+1$ , то разложение  $M_k(p)$  в окрестности  $p=0$  имеет вид

$$M_k(p) = \sum_{n=0}^{k+1} \alpha_n p^{-n} + O(p)$$

Согласно теореме о разложении [7], получим асимптотическое представление

$$M_k(t) = \sum_{n=0}^k \frac{\alpha_{n+1} t^n}{(n+1)!} + O(t^{-1}) \quad (2.6)$$

Соотношения (2.3), (2.4) и (2.5) определяют статистические свойства движения частицы для больших  $t$ . С помощью (2.5) можно получить явные выражения для старших членов ряда (2.6)

$$M_k(t) = v^{-k} \left\{ t^k + \frac{k^2}{2} t^{k-1} + k(k-1) \left[ \frac{k(3k-5)}{24} - \frac{v}{12} \right] t^{k-2} \right\} + O(t^{k-3}) \quad (2.7)$$

Для центрированных моментов  $B_k(t) = \langle [(n+\gamma)^k - \langle (n+\gamma)^k \rangle^k] \rangle$  из (2.7) имеем

$$B_1(t) = M_1(t) \sim \frac{t+0,5}{v}, \quad B_2(t) \sim \frac{1}{v^2} \left( t - \frac{1+2v}{12} \right) \\ B_3(t) \sim \frac{t}{v^3}, \quad B_4(t) \sim \frac{3t^2}{v^4}; \quad B_k(t) \sim O(t^{k-3}), \quad k > 4 \quad (2.8)$$

Отсюда следуют оценки для коэффициента вариации, асимметрии и эксцесса положения частицы

$$\xi_2(t) = B_2^{1/2} B_1^{-1} \sim t^{-1/2}, \quad \xi_3(t) = B_3 B_2^{-3/2} \sim t^{-1/2}, \\ \xi_4(t) = B_4 B_2^{-2} = 3 + O(t^{-1})$$

Видно, что с течением времени продвижение частицы аналогично броуновскому движению. Однако в отличие от броуновского движения, для которого характерно нормальное распределение положения частицы, в рассматриваемом случае распределение имеет положительную асимметрию, убывающую с той же скоростью, что и коэффициент вариации  $\xi_2(t)$ . Следовательно, максимальная концентрация примеси движется с меньшей скоростью, чем ее среднее значение. Такое относительное накопление концентрации вещества в тыловой части зоны возмущения и относительное ее уменьшение в передней части отмечалось в [5].

Переходя к переменным переменным и учитывая, что  $m_0 = \langle m(x) \rangle = \nu/\alpha$ , а  $\nu = \xi_m^{-2} = m_0^2 / \langle (m - m_0)^2 \rangle$ , из (2.8) получим выражения для моментов  $B_k'(t')$  случайного процесса  $x(t')$

$$\begin{aligned} \langle x(t') \rangle &\sim Vt'/m_0, & B_2'(t') &\sim \xi_m^2 Vt' h/m_0 \\ B_3'(t') &\sim \xi_m^4 Vt' h^2/m_0, & B_4'(t') &\sim 3(\xi_m^2 Vt' h/m_0)^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

зависящие от степени и масштаба неоднородности поля  $m(x)$ .

Для экспоненциального закона распределения поля  $m(x)$ , т. е. при  $\nu=1$ , из (2.4) можно получить точные выражения для  $M_k(t)$ . Имеем

$$M_1(t) = t + \frac{1}{2} - \frac{1+t}{2} e^{-t} + \left( t + \frac{t^2}{2} \right) \int_t^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau, \quad M_2(t) = t^2 + 2t$$

Для случая  $\nu=2$  находим  $M_1(t) = t/2 + 1/4 - 1/4 e^{-2t}$ .

Приведенные соотношения показывают, что выход на асимптотику, сохраняющую неубывающие члены, происходит с экспоненциальной скоростью.

В [3] получено решение приближенного осредненного уравнения для концентрации примеси  $u(x, t)$  при начальном условии  $u(x, 0) = \delta(x)$ , из которого следуют выражения для моментов

$$\langle x(t') \rangle = \frac{Vt'}{m_0} \frac{1 + \xi_m^2}{1 - \xi_m^2}, \quad B_2'(t') = \frac{\epsilon \xi_m V^2 t'}{m_0^2 (1 + \xi_m^2)}$$

где  $\epsilon$  — временной масштаб корреляции поля пористости. Если положить  $\epsilon = m_0 R/V$ , то видно, что при малых вариациях пористости корреляционное приближение согласуется с асимптотическими формулами (2.9).

3. Представляет интерес определение корреляционной функции процесса  $x(t)$ . Для этого найдем совместную плотность распределения вероятностей  $P_{t_1 t_2}(n_1, \gamma_1, n_2, \gamma_2)$  нахождения частицы в окрестности точек  $y_1 = n_1 + \gamma_1$  и  $y_2 = n_2 + \gamma_2$  в моменты времени соответственно  $t_1$  и  $t_2$ .

Положим для определенности  $y_1 \leq y_2$ . Очевидно, что  $P_{t_1 t_2} = 0$  при  $t_1 > t_2$ . Пусть  $t_1 \leq t_2$  и введем величину  $t_0 = t_1/t_2 \leq 1$ . Если  $n_1$  отрезков длины  $h$  (или  $n_1$  шагов) пройдено за время  $\tau_1$ , то из условий  $\tau_1 + (t_1 - \tau_1)/\gamma_1 \leq t_2$  и  $\tau_1 \geq 0$  следует ограничение  $\tau_1 \geq \tau_0(\gamma_1)$ , где  $\tau_0(\gamma_1) = t_2(t_0 - \gamma_1)/(1 - \gamma_1)$  при  $\gamma_1 < t_0$  и  $\tau_0(\gamma_1) = 0$  при  $\gamma_1 \geq t_0$ . Можно убедиться, что при этом  $\tau_0(\gamma_1) \leq t_1$  и  $\tau_1 + (t_1 - \tau_1)/\gamma_1 \geq t_1$ . Оставшееся расстояние частица должна пройти за время  $\Delta t(\tau_1) = t_2 - \tau_1 - (t_1 - \tau_1)/\gamma_1$ .

Выпишем явные выражения для совместной плотности, рассматривая следующие случаи.

Если  $n_2 = n_1$ , то  $\gamma_2 \geq \gamma_1$ . Учитывая линейный закон движения частицы на каждом отрезке, находим

$$P_{t_1 t_2}(n_1, \gamma_1, n_1, \gamma_2) = \int_0^{t_1} F(\tau_1 | n_1) P_{t_1 - \tau_1}(\gamma_1) \delta\left(\gamma_2 - \frac{t_2 - \tau_1}{t_1 - \tau_1} \gamma_1\right) d\tau_1 \quad (3.1)$$

Пусть  $n_2 = n_1 + 1$ . В этом случае должны произойти три события: за время  $\tau_1 \geq \tau_0(\gamma_1)$  частица пройдет  $n_1$  шагов, на  $(n_1 + 1)$ -й шаг потребуется время  $(t_1 - \tau_1)/\gamma_1$  и на  $(n_1 + 2)$ -й шаг — время  $\Delta t/\gamma_2$ . Тогда для совместной плотности имеем выражение

$$P_{t_1 t_2}(n_1, \gamma_1, n_1 + 1, \gamma_2) = \int_{\tau_0(\tau_1)}^{t_1} F(\tau_1 | n_1) P_{t_1 - \tau_1}(\gamma_1) P_{\Delta t}(\gamma_2) d\tau_1 \quad (3.2)$$

В случае  $n_2 \geq n_1 + 2$  должны произойти первые два события, имевшие место при  $n_2 = n_1 + 1$ ; далее за время  $\tau_2$ ,  $0 \leq \tau_2 \leq \Delta t$ , частица должна пройти  $n_2 - n_1 - 1$  отрезка, а  $(n_2 + 1)$ -й шаг частица пройдет за время  $(\Delta t - \tau_2)/\gamma_2$ . Следовательно

$$P_{t_1 t_2}(n_1, \gamma_1, n_2, \gamma_2) = \int_{\tau_0(\tau_1)}^{t_1} F(\tau_1 | n_1) P_{t_1 - \tau_1}(\gamma_1) d\tau_1 \int_0^{\Delta t} F(\tau_2 | n_2 - n_1 - 1) P_{\Delta t - \tau_2}(\gamma_2) d\tau_2 \quad (3.3)$$

Случай  $n_1 = 0$  следует из (3.1)–(3.3) формальной подстановкой  $F(\tau | n) = \delta(\tau)$  при  $n = 0$ .

Можно показать, что (3.1)–(3.3) удовлетворяют всем требуемым для совместной плотности соотношениям.

4. Найдем асимптотическое поведение корреляционной функции  $R(t_1, t_2) = \langle [(n_1 + \gamma_1)(n_2 + \gamma_2) - \langle (n_1 + \gamma_1)(n_2 + \gamma_2) \rangle] \rangle$  процесса  $y(t)$  при  $t_1, t_2 \rightarrow \infty$ , таких, что  $t_2 - t_1 \rightarrow \infty$ . Ограничимся случаем экспоненциального закона ( $\nu = 1$ ).

Рассмотрим корреляцию

$$A = \langle (n_1 + \gamma_1)(n_2 + \gamma_2) \rangle = \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{n_2} \int_0^1 d\gamma_2 \int_0^{\Omega_{n_1}} (n_1 + \gamma_1)(n_2 + \gamma_2) P_{t_1 t_2} d\gamma_1 \quad (4.1)$$

где  $\Omega_{n_1} = 1$  при  $n_1 < n_2$  и  $\Omega_{n_1} = \gamma_2$  при  $n_1 = n_2$ . Обозначим члены ряда (4.1) через  $A_{n_1 n_2}$ . Можно показать, что члены  $A_{n_1 n_2}$ , не входящие в выражение

$$B_4 = \sum_{n_2=3}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{n_2-2} A_{n_1 n_2} \quad (4.2)$$

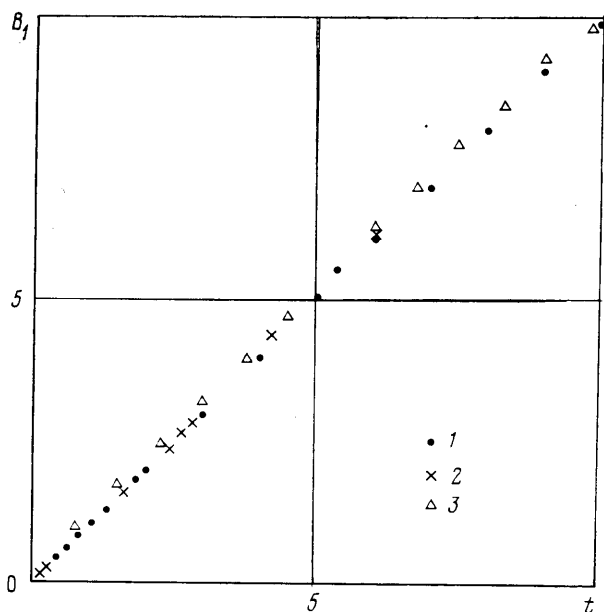
экспоненциально убывают. Подставляя выражения для  $A_{n_1 n_2}$  в (4.2) и вычисляя суммы по  $n_1$  и  $n_2$ , получим

$$B_4 = \int_0^1 d\gamma_1 \int_{\tau_0}^{t_1} \left\{ \left[ (1 + \gamma_1 + \tau_1) \left( 2,5 + t_2 - \frac{t_1 - \tau_1}{\gamma_1} \right) + \tau_1 \right] \exp\left(\frac{\tau_1 - t_1}{\gamma_1}\right) - \right. \\ \left. - [(1 + \gamma_1 + \tau_1)(3 + \tau_1) + \tau_1] \exp(\tau_1 - t_2) + (1 + \gamma_1 + \tau_1) \int_0^1 \gamma_2 \exp\left[\frac{1}{\gamma_2} \left( \tau_1 + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{t_1 - \tau_1}{\gamma_1} - t_2 \right) - \frac{t_1 - \tau_1}{\gamma_1} \right] d\gamma_2 \right\} \frac{t_1 - \tau_1}{\gamma_1^2} d\tau_1 \quad (4.3)$$

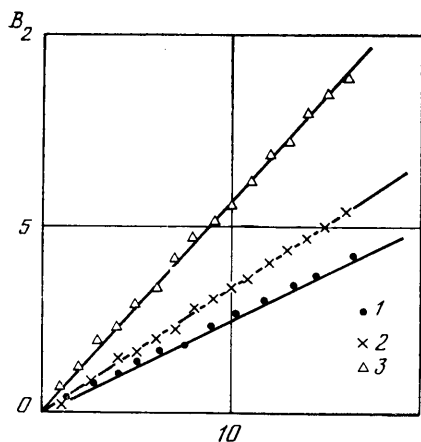
Второй и третий члены в интеграле (4.3) дают экспоненциально убывающую асимптотику. Отсюда для корреляции (4.1) и корреляционной функции получаем

$$A \sim t_1 t_2 + 0,5 t_2 + 1,5 t_1 + 0,25, \quad R(t_1, t_2) \sim t_1 \quad (4.4)$$

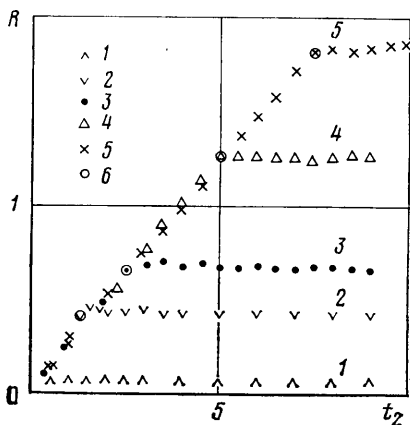
Из (2.8) следует, что опущенные в (4.4) члены при  $t_1 = t_2$  должны давать значение  $-0,25$ . Поэтому асимптотикой (4.4) можно пользоваться при  $t_1 \gg 1$ .



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Возвращаясь к размерным переменным, для корреляционной функции  $R'(t_1', t_2') = \langle [x(t_1')x(t_2') - \langle x(t_1') \rangle \langle x(t_2') \rangle] \rangle$ , из (4.4) получаем асимптотическое выражение

$$R'(t_1', t_2') \sim \xi_m^2 m_0^{-1} V h \min(t_1', t_2') \quad (4.5)$$

Соотношения (2.9) и (4.3) написаны в форме, не зависящей от конкретного вида распределения поля  $m(x)$ . Естественно предположить, что эти соотношения асимптотически выполняются для любого статистически однородного поля пористости с конечным радиусом корреляции.

Для проверки этого предположения уравнение (1.1) решалось численно. Область течения  $x > 0$  разбивалась на отрезки длины  $h$  и каждому отрезку присваивалось значение пористости, получаемое датчиком псевдослучайных чисел в соответствии с выбранным законом распределения. Повторяя процесс вычисления положения фронта на независимых реализациях поля пористости и осредняя реализации координат, можно получить статистические характеристики процесса  $x(t')$ . На фиг. 1 и 2 представлены зависимости  $B_1(t)$  и  $B_2(t)$ , где безразмерное время  $t = Vt'/mh$ . Варианты 1 и 2 соответствуют бинарному закону распределения Берну-

ли со значениями пористости 0,1 и 0,3. Вероятность появления значения 0,1 равна 0,5 и 0,75 соответственно для первого и второго вариантов. В варианте 3 пористость имеет логнормальное распределение с характеристиками  $m_0=0,4$  и  $\xi_m=0,75$ . Зависимость  $R(t_1, t_2)$  показана на фиг. 3 как функция  $t_2$ , при этом 1-5 соответствуют различным значениям  $t_1$ , 6 - значениям  $R(t_1, t_2)$  при  $t_1=t_2$ . Поле  $m(x)$  было таким же, как и при расчете варианта 1. Результаты расчетов согласуются со сделанным предположением. Следует отметить также достаточно быстрый выход характеристик на асимптотические зависимости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Scheidegger A. E. The physics of flow through porous media. Toronto: Univ. Press, 1958. 236 p. (Рус. перев.: Шейдеггер А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. М.: Гостехиздат, 1960, 249 с.)
2. Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах.- ПММ, 1959, т. 23, № 6, с. 1042-1050.
3. Швидлер М. И. Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985. 288 с.
4. Индельман П. В., Швидлер М. И. Об осреднении эволюционных стохастических уравнений фильтрационного переноса.- Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 5, с. 127-136.
5. Швидлер М. И. Осреднение уравнений фильтрационного переноса в средах со случайными неоднородностями.- Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 1, с. 68-75.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 751 с.
7. Лаврентьева М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Москва

Поступила в редакцию  
11.XII.1985