

УДК 532.517.4:532.525.2

**МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЯ  
В СТРУЕ СЖИМАЕМОГО ГАЗА**

**КОЗЛОВ В. Е., СЕКУНДОВ А. Н., СМИРНОВА И. П.**

В сверхзвуковой затопленной изобарической турбулентной струе по мере роста числа Маха  $M_c$  интенсивность смещения заметно убывает, а дальнобойность возрастает. Так, при числе  $M_c=2$  дальнобойность струи (расстояние, на котором осевые параметры в струе начинают существенно убывать) приблизительно в 2 раза больше, чем при  $M_c \approx 0$ . Численные расчеты показали, что современные модели турбулентности (и алгебраические, и дифференциальные) без специального учета в них эффектов скоростной сжимаемости не описывают указанное влияние числа  $M_c$ .

В ряде работ [1–4] предпринимались попытки модернизации модельных уравнений турбулентности для сжимаемых течений. Так, в [1–2] при модернизации уравнения баланса кинетической энергии турбулентности  $e$  была учтена работа сил «плавуности», связанная с ускорением потока. Оказалось, что заметное влияние числа  $M_c$  появляется в этом случае лишь при  $M_c > 3$  и наличии значительного продольного градиента давления. Таким образом, эти силы не могут объяснить отмеченное выше влияние числа Маха.

В [3, 4] согласование расчетных и опытных данных было достигнуто путем учета в модельном уравнении для  $e$  слагаемого, которое описывает работу сил сжатия. В данной работе на основе уточненных оценок работы сил плавуности и сжатия показано, что путем модернизации уравнения для  $e$  нельзя описать наблюдающееся в опытах сильное уменьшение интенсивности смещения в сверхзвуковых затопленных изобарических струях. Авторами предложен иной механизм влияния скоростной сжимаемости на турбулентное смещение, который связан не с изменением баланса кинетической энергии, а с изменением структуры крупномасштабных вихрей, т. е. с изменением низкочастотной части спектра пульсаций. На основе этого механизма модернизированы две дифференциальные модели турбулентности [1, 5], в которые входит дифференциальное уравнение Коважного для турбулентной вязкости. Предложенные модели апробируются путем сопоставления результатов численных расчетов с известными опытными данными при вариации числа Маха истечения ( $0 < M_c \leq 3$ ) и относительного подогрева струи ( $1 \leq \theta \leq 6$ ).

**1. Анализ уравнения баланса кинетической энергии турбулентности.** В уравнении баланса энергии турбулентности [6], записанном в приближении пограничного слоя при отсутствии внешних сил, два слагаемых в явном виде учитывают эффекты сжимаемости

$$\langle T_p \rangle = -\langle \rho' u' \rangle \left\langle \frac{du}{dt} \right\rangle, \quad \langle T_c \rangle = \left\langle p' \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \right\rangle \quad (1.1)$$

Слагаемое  $\langle T_p \rangle$  связано с работой сил плавуности в поле ускорения самого потока  $\langle du/dt \rangle$ . Это слагаемое приближенно запишем в виде [2]

$$\langle T_p \rangle \approx \langle \rho' u' \rangle \left\langle \frac{dp}{dx} \right\rangle \frac{1}{\langle \rho \rangle} = -\frac{\tau}{\langle \rho \rangle} \left\langle \frac{dp}{dx} \right\rangle \langle u' v' \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}$$

Здесь  $\tau$  — временной масштаб турбулентности. Дальнейшие оценки работы сил плавуности проведем для случая затопленной ненагретой сверхзвуковой слабонедорасширенной плоской струи. Из условия постоянства температуры торможения можно получить следующую зависимость,

связывающую осредненные параметры:

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{(\gamma-1)\rho u}{a^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Здесь  $\gamma=1,4$  — показатель адиабаты,  $a$  — скорость звука. Оценим величину отношения  $\langle T_p \rangle$  к скорости диссипации  $\varepsilon$  турбулентной энергии, в «сердине» слоя смешения ( $u=0,5U_c$ ), используя следующие приближенные соотношения [2]:

$$|\langle u'v' \rangle| \approx 0,3\varepsilon; \quad \tau \approx 10 \frac{v_t}{\varepsilon}; \quad \varepsilon \approx 0,2\rho \frac{e^{1,5}}{L_t}; \quad \frac{U_c L_t}{\delta e^{0,5}} \approx 1$$

Здесь  $L_t$  — интегральный масштаб турбулентности,  $\delta$  — толщина слоя смешения. После преобразований получим

$$\frac{\langle T_p \rangle}{\varepsilon} \approx 0,64\delta \frac{d \ln p}{dx} \quad (1.2)$$

Можно показать, что в области первого взаимодействия слоя смешения с волной Праудтля — Майера, возникающей в сверхзвуковой слабонедорасширенной струе, имеет место следующая оценка:  $-\delta(d \ln p/dx) \leq 0,23(1-M_c^{-2})$ , что в силу (1.2) дает

$$-\frac{\langle T_p \rangle}{\varepsilon} \leq 0,15(1-M_c^{-2}) \quad (1.3)$$

Отсюда видно, что в рассмотренном случае работа сил плавучести составляет малую долю ( $<15\%$ ) от диссипации. Заметим, что в свободной неизобарической струе из-за переменности давления вдоль высокоскоростной части зоны смешения величина  $\langle T_p \rangle$  знакопеременна и интегральное влияние этого слагаемого на энергию турбулентности, по-видимому, еще меньше. Численные расчеты сверхзвуковых неизобарических струй в дозвуковом спутном потоке, проведенные по методике [7], также подтвердили несущественность рассматриваемого фактора.

Проведенные оценки менее строго выполняются при взаимодействии струйной турбулентности со скачком уплотнения. Однако прямые измерения [8] показали, что заметное изменение энергии турбулентности за скачком уплотнения наблюдается лишь при  $M_c > 2,5$  и степенях нерасчетности  $N > 2$ .

Слагаемое  $\langle T_c \rangle$  характеризует работу сил сжатия. Произведение  $p' \operatorname{div} u'$  определяется сравнительно крупномасштабными движениями газа и принимает максимальное значение в тех областях потока, где частицы (моли) газа в своем пульсационном движении перемещаются навстречу друг другу [9]. В этом случае в области их столкновения возникает течение, сходное с течением вблизи точки соударения двух встречных струй. Можно показать, что на оси симметрии этих струй параметры потока связаны соотношением

$$T_c = \frac{\rho}{2a^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{W^2 u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) \quad (1.4)$$

Здесь  $W$  — скорость в сливающихся струях вдали от места соударения,  $u$  — текущая скорость (обращающаяся в ноль в точке слияния). Оценивая производную в правой части по порядку величины и предполагая, что область взаимодействия имеет размеры порядка интегрального масштаба турбулентности  $L_t$ , имеем

$$T_c = -2\rho W^3 / 15a^2 L_t \quad (1.5)$$

В этом соотношении  $W$  — случайная величина и поэтому (1.5) необходимо осреднить. Для нахождения дисперсии  $\sigma \equiv \langle W^2 \rangle^{0,5}$  рассмотрим значение квадрата разности продольных компонент пульсационной ско-

рости в двух точках потока, удаленных друг относительно друга на расстояние большее, чем размеры области взаимодействия. В этом случае имеем

$$\langle (2W)^2 \rangle = \langle (u_1' - u_2')^2 \rangle \approx 2 \langle (u_1')^2 \rangle \quad (1.6)$$

Зная дисперсию и принимая закон распределения вероятности для  $W$  нормальным, проведем осреднение (1.5)

$$\langle T_c \rangle \approx - \frac{4}{15\sqrt{\pi}} \frac{\rho \langle (u')^2 \rangle^{2,5}}{a^2 L_t} \approx - \frac{0,4\epsilon \langle (u')^2 \rangle}{a^2} \quad (1.7)$$

Эта оценка с точностью до постоянного множителя совпадает с результатом, полученным в [10]. В середине слоя смешения затопленной ненагретой изобарической струи  $\langle (u')^2 \rangle^{0,5} \approx 0,2U_c$ , и из (1.7) имеем

$$- \frac{\langle T_c \rangle}{\epsilon} \approx \frac{0,017}{M_c^{-2} + 0,375(\gamma - 1)} \quad (1.8)$$

В рассмотренном случае работа сил сжатия составляет малую часть (менее 11% при  $\gamma=1,4$ ) от диссипации. Следовательно, слагаемым  $\langle T_c \rangle$ , входящим в уравнение баланса энергии турбулентности, также можно пренебречь, как и слагаемым  $\langle T_p \rangle$ . Тогда получается, что в уравнении баланса нет явных энергетических механизмов, которые могли бы привести к заметному уменьшению  $\epsilon$ .

**2. Влияние сжимаемости на турбулентную вязкость.** В полуэмпирических моделях турбулентности наряду с энергией  $\epsilon$  используется и другая характеристика — коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_t$ . Анализ опытных данных [11] показывает, что при увеличении числа Маха струи от 0,28 до 1,37 энергия турбулентности убывает в 1,6 раза, толщина зоны смешения — в 2 раза, напряжение турбулентного трения — в 3 раза, а турбулентная вязкость, следовательно, — в 6 раз. Так как  $\nu_t \sim \sqrt{\epsilon} L_t$ , а энергия турбулентности относительно слабо уменьшается с ростом числа Маха (что подтверждается приведенными выше экспериментальными данными [11] и оценками предыдущего параграфа), то отсюда следует вывод о сильном уменьшении интегрального масштаба турбулентности с увеличением числа Маха. Немногочисленность экспериментальных исследований не позволяет непосредственно использовать приведенные выше количественные оценки, однако выявленная тенденция — преобладающее влияние числа Маха на коэффициент турбулентной вязкости — представляется убедительной и позволяет осуществить учет скоростной сжимаемости в полуэмпирических моделях турбулентности [1, 5] введением дополнительного стокового члена в уравнение для  $\nu_t$ . Рассмотрим несколько косвенных подтверждений указанного механизма влияния сжимаемости.

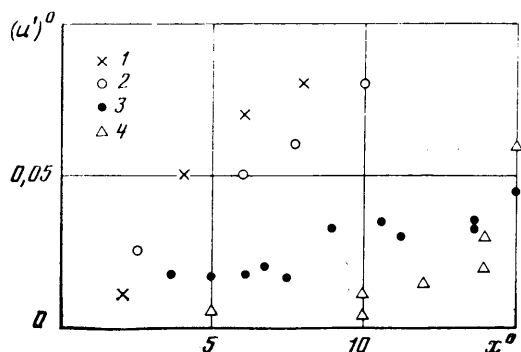
На фиг. 1 представлены результаты измерения вдоль оси начального участка струи ( $x^0 = x/R_c$ ) относительных пульсаций скорости

$$(u')^0 = [\langle (\rho u)^2 \rangle]^{0,5} (\rho_c U_c)^{-1}$$

Данные, полученные при  $M_c \approx 0$  [12], обозначены цифрой 1; при  $M_c = 0,28$  [11] и 1,37 [11] — соответственно 2 и 3. Измерения авторов, проведенные при  $M_c = 2,1$  в условиях эксперимента, близких к описанным в [13], обозначены цифрой 4. Эти пульсации на оси струи индуцируются наиболее крупными вихрями из зоны смешения и связаны с дальнотейшим пульсаций давления. Даже с учетом существования «конуса Маха» (вне которого возмущения не могут сноситься вниз по потоку) из приведенных на фиг. 1 данных следует, что в сверхзвуковых струях пульсации на оси заметно меньше, чем в дозвуковых струях. Косвенно это свидетельствует об уменьшении интенсивности наиболее крупных вихрей

в спектре пульсаций (а следовательно, и интегрального масштаба  $L_t$ ) по мере роста числа Маха.

Для количественного описания изменения структуры крупных вихрей под влиянием эффектов сжимаемости воспользуемся методами линейной теории устойчивости.



Фиг. 1

Представим вертикальную пульсационную составляющую скорости  $v'$  в виде

$$v'(x, y, z, t) = v^{\circ}(y) \exp [i(kx + \beta z - \omega t)]$$

$$k = 2 \frac{\pi}{\lambda_x}, \quad \beta = 2 \frac{\pi}{\lambda_z}, \quad \omega = ck$$

Здесь  $\lambda_x$  и  $\lambda_z$  — длины волн в направлении осей  $x$  и  $z$ ,  $v^{\circ}(y)$  и  $c = c_r + ic_i$  — собственные функция и комплексное число, определяемые в результате решения системы линеаризованных уравнений движения, неразрывности и энергии. Можно показать, что эта система эквивалентна следующему уравнению типа уравнения Рэлея:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{A} \left[ (\langle u \rangle - c) \frac{dv^{\circ}}{dy} - v^{\circ} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right] = \frac{k^2 (\langle u \rangle - c) v^{\circ}}{a^2}$$

$$A = (1 + \beta^2 k^{-2}) a^2 - (\langle u \rangle - c)^2 \quad (2.1)$$

Если ввести обобщенное волновое число  $n = (k^2 + \beta^2)^{0,5}$  и обобщенное число Маха  $M_0 = 0,5M(1 + \beta^2 k^{-2})^{0,5}$ , то уравнение (2.1) приводится к виду, получающемуся при рассмотрении двумерных возмущений. Результаты численных расчетов [14] двумерных возмущений в слое смешения ( $\langle u \rangle = U \operatorname{th}(2y\delta^{-1})$ ,  $M_0 = Ua^{-1}$ ) с точностью  $\pm 10\%$  можно аппроксимировать зависимостью

$$\frac{c_i}{\Delta U} \equiv \max(0, \varphi), \quad \Delta U \equiv 2U$$

$$\varphi = -1,4n\delta + \exp \{ -M_0^2 [1 - 2,5n\delta + 2,6(n\delta)^2] \}$$

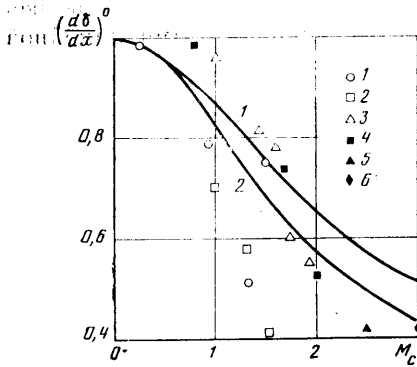
Тогда для максимального значения инкремента нарастания возмущений

$$B_{\max} \equiv \max_{\alpha, \beta} \left[ \int_0^{k\delta} \frac{c_i}{\Delta U} d(k\delta) \right]$$

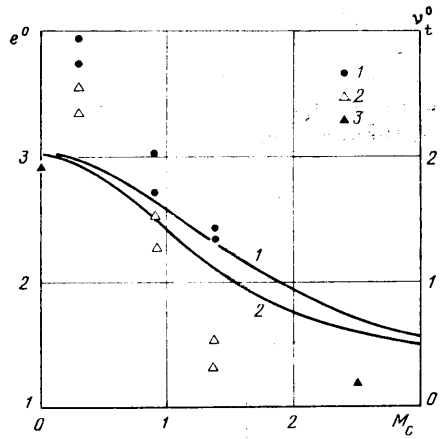
в предположении, что  $\Delta U \ll 2a$ , может быть получено следующее соотношение:

$$B_{\max} \approx 0,44(1 - 0,25M_m^2), \quad M_m \equiv \frac{\Delta U}{a} \quad (2.2)$$

В [15] на основе обработки экспериментальных данных была установлена приближенная зависимость коэффициента  $\alpha$ , характеризующего по-



Фиг. 2



Фиг. 3

рождение турбулентной вязкости в полуэмпирическом уравнении Коважного [1], от  $V_{\max}$ . Используя (2.2), представим эту зависимость в виде

$$\alpha \approx 0,2 - 0,034 M_m^2 \quad (2.3)$$

Следует подчеркнуть, что величина  $\alpha$  определяется числом Маха  $M_m$  (см. (2.2)), вычисленным по максимальной разности скоростей в данном сечении потока, и поэтому влияние сжимаемости в затопленных струях больше, чем в спутных струях и следах (при одном и том же числе Маха).

Отметим, что с точки зрения универсальности дифференциальной модели введение нелокальной характеристики  $M_m$  неудобно, поэтому выразим  $M_m$  приближенно через локальные характеристики турбулентности. Обработка экспериментальных данных [11] показывает, что в слое смешения при изменении числа Маха в диапазоне  $0,28 < M_c < 1,37$  имеет место

$$M_c^2 = C_1 \frac{e_{\max}}{a_c^2}; \quad \frac{1}{e_{\max}} \left( v_t \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right)_{\max} = C_2 \quad (2.4)$$

Здесь  $C_1$  изменяется в пределах от 25 до 45, а  $C_2$  — в пределах от 0,2 до 0,4. Используя (2.4) и переходя от максимальных значений параметров к локальным, из (2.3) получим

$$\alpha = 0,2 - \frac{C_3 v_t}{a^2} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (2.5)$$

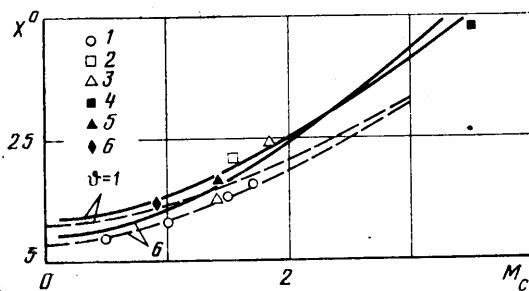
Здесь  $C_3$  изменяется в пределах от 2,1 до 7,7. Член, описывающий порождение в однопараметрической модели турбулентности [1], может быть представлен с помощью (2.4), (2.5) в виде

$$\alpha v_t \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| = C_4 \frac{v_t^2}{e} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{C_5 e^2}{a^2} \quad (2.6)$$

Здесь  $C_4$  изменяется в пределах от 0,5 до 1, а  $C_5$  — от 0,08 до 1,23.

Полученные связи (2.5), (2.6) позволяют модифицировать однопараметрическую [1] и двухпараметрическую [5] модели для сжимаемых течений

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_t}{dt} &= \frac{1}{y^i} \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\rho y^i v_t \frac{\partial v_t}{\partial y} \right) + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \rho v_t \left( 0,2 - \frac{5v_t}{a^2} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right) \\ \rho \frac{dv_t}{dt} &= \frac{1}{y^i} \frac{\partial}{\partial y} \left( 2,4\rho y^i v_t \frac{\partial v_t}{\partial y} \right) + 0,9 \frac{\rho v_t^2}{e} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{\rho e^2}{2a^2} - 0,14 \rho v_t \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \\ \rho \frac{de}{dt} &= \frac{1}{y^i} \frac{\partial}{\partial y} \left( 1,2\rho y^i v_t \frac{\partial e}{\partial y} \right) + \rho v_t \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{0,07\rho e^2}{v_t} \left( 1 + \frac{v_t}{e} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right) \end{aligned}$$



Фиг. 4

Значения констант, учитывающих сжимаемость в модифицированных моделях, близки к среднеарифметическим значениям констант в соотношениях (2.5), (2.6).

На фиг. 2 приведено полученное в расчете изменение характерной толщины зоны смешения  $db/dx$  (вычисленной по максимальному градиенту средней скорости и отнесенной к значению при  $M_c \approx 0$ ) в зависимости от  $M_c$ . Кривые 1 и 2 соответствуют одно- и двухпараметрической модифицированной модели турбулентности. Цифрами 1–3 обозначены соответственно данные Lau (1979), Carey (1954), Burch & Eggers (1972), приведенные в [11], а цифры 4–6 – данные Maydew & Reed (1963), Ikawa (1973), Solignac (1966), приведенные в [3].

На фиг. 3 кривыми 1 и 2 представлены соответственно расчетные данные по изменению энергии турбулентности  $e^0 = 10^2 c_{\max} U_c^{-2}$  и коэффициента турбулентной вязкости  $\nu_t^0 = 10^3 (\nu_t)_{\max} (U_c x)^{-1}$  в зависимости от числа  $M_c$ . Расчет проводился с использованием модифицированной двухпараметрической модели турбулентности. Цифрами обозначены экспериментальные данные: 1. –  $e^0$  [11], 2 –  $\nu_t^0$  [11], 3 –  $\nu_t^0$  [16].

Как видно из фиг. 2, 3, расчетные значения с ростом  $M_c$  уменьшаются несколько медленнее, чем в эксперименте. В целом соответствие расчетных и опытных данных удовлетворительное. Численные расчеты различных струйных течений при вариации числа Маха, степени нерасчетности и подогрева показали, что с точки зрения предсказания осредненных характеристик потока выбранные значения констант, учитывающие эффект сжимаемости, близки к оптимальным.

**3. Анализ особенностей смешения осесимметричных изобаричных затопленных подогретых сжимаемых струй.** Для практики важно правильно предсказать смешение сверхзвуковых струй при наличии подогрева ( $\theta > 1$ ). Имеющиеся экспериментальные данные при  $M_c > 1$  и  $\theta > 1$  немногочисленны, измеренные значения параметров вследствие погрешностей имеют большой разброс. В этой связи представлялось полезным провести расчеты таких струй с помощью модифицированных моделей турбулентности и сопоставить их результаты с опытами. Такое сопоставление, во-первых, будет служить дополнительной проверкой правильности модельных уравнений и, во-вторых, эти расчеты позволят упорядочить и обобщить результаты экспериментов.

На фиг. 4 представлены зависимости длины начального участка струи  $X^0 = x_n/R_c$  от числа  $M_c$ , определенные по однопараметрической и двухпараметрической модифицированным моделям турбулентности (соответственно штриховые и сплошные линии) для двух значений степени подогрева  $\theta = 1$  и 6. Цифрами 1–6 обозначены соответственно опытные данные следующих работ: [17]  $\theta = 1.5-2.3$ ; [18]  $\theta = 2.8$ ; [19]  $\theta = 1.4-4.0$ ; [19]  $\theta = 6.5$ ; [11]  $\theta = 1.0$ ; [20]  $\theta = 2.0$ . Видно, что согласование расчетных и экспериментальных данных удовлетворительное. И экспериментальные и расчетные данные свидетельствуют о том, что влияние подогрева наиболее существенно при  $M_c \approx 0$ . Так, при увеличении  $\theta$  от 1 до 6 при  $M_c \approx 0$  расчетное значение дальности  $X^0$  уменьшается от 11–12 до 7,5–9,0. Эти результаты согласуются с наиболее достоверными опытными данными [21], полученными при большом числе Рейнольдса. По мере роста числа  $M_c$  длина начального участка затопленной струи возрастает. При  $M_c > 1.5-2.0$  результаты расчетов слабо зависят от относительного подогрева  $\theta$ . Для грубых оценок длины начального участка струи можно использовать следующее эмпирическое соотношение:

$$\frac{x_n}{R_c} = 12 + 2,5M_c^2 - 11,2 \frac{1 - \theta^{-0,25}}{1 + M_c^2}$$

В заключение отметим, что в сверхзвуковой струе, распространяющейся в сверхзвуковом спутном потоке, число Маха  $M_m$  (см. (2.2)), определяемое по максимальной разности скоростей в данном сечении потока, оказывается зачастую сравнительно небольшим. В этом случае, как показывают экспериментальные [22] и расчетные [23] результаты, эффекты сжимаемости невелики и их можно не учитывать в моделях турбулентности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н.* Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтономности. М.: Машиностроение, 1975. 94 с.
2. *Секундов А. Н.* Феноменологическая модель и экспериментальное исследование турбулентности при наличии пульсаций плотности.— В сб.: Турбулентные течения. М.: Наука, 1977, с. 140—145.
3. *Oh Y. H., Bushnell D. M.* Influence of external disturbances and compressibility on free turbulent mixing. Langley Research Center, NASA SP-347, 1975.
4. *Глебов Г. А., Молчанов А. М.* Модель турбулентности для расчета высокоскоростных реагирующих струй.— В сб.: Исследования теплообмена в летательных аппаратах. М., 1982, с. 6—11.
5. *Кузнецов В. Р., Лебедев А. Б., Секундов А. Н., Смирнова И. П.* Расчет турбулентного диффузионного факела горения с учетом пульсаций концентрации и архимедовых сил.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977 г., № 1, с. 30—40.
6. *Мошин А. С., Яелок А. М.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 639 с.
7. *Козлов В. Е.* Расчет слабонеизобарической свободной струи.— В сб.: Турбулентные струйные течения. Тез. докл. 4-го Всесоюз. науч. совещ. по теор. и прикл. аспектам турбулент. течений. Ч. 2. Таллин, 1982, с. 200—204.
8. *Секундов А. Н.* Турбулентность в сверхзвуковом потоке и ее взаимодействие со скачком уплотнения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 2, с. 8—16.
9. *Rotta J. C.* Statistische theorie nichthomogener turbulenz.— Z. Physik, 1951, B. 129, № 5, S. 547—572; B. 131, № 1, S. 51—77.
10. *Иевлев В. М.* Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975. 256 с.
11. *Lau J. C., Morris P. J., Fisher M. J.* Measurements in subsonic and supersonic free jets using a laser velocimeter.— J. Fluid Mech., 1979, v. 93, Pt 1, p. 1—27.
12. *Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н., Смирнова И. П.* Турбулентное смешение газовых струй. М.: Наука, 1974. 272 с.
13. *Trouitt T. R., McLaughlin D. K.* Experiments on the flow and acoustic properties of a moderate-Reynolds-number supersonic jet.— J. Fluid Mech., 1982, v. 116, p. 123—156.
14. *Blumen W., Drazin P. G., Billings D. F.* Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. Pt 2.— J. Fluid Mech., 1975, v. 71, Pt 2, p. 305—316.
15. *Борисов А. Г., Кузнецов В. Р., Секундов А. Н.* Крупномасштабные движения в сдвиговых турбулентных потоках.— В сб.: Турбулентные струйные течения. Ч. 1. Таллин, 1985, с. 63—68.
16. *Ikawa Hideo, Kubota Toshi.* An experimental investigation of a two-dimensional, self-similar, supersonic turbulent mixing layer with zero pressure gradient.— AIAA Pap., 1974, № 40, 10 p.
17. *Lau J. C.* Mach number and temperature effects on jets.— AIAA Journal, 1980, v. 18, № 6, p. 609—610.
18. *Knott P. R., Mossey P. W.* Laser velocimeter measurements in high speed high temperature jet exhaust.— In: Proc. 2-nd Intern. Workshop on Laser Velocimetry. Purdue University, March 27—29, 1974, p. 68—89.
19. *Anderson A. R., Johns F. R.* Characteristics of free supersonic jets exhausting into quiescent air.— Jet Propulsion, 1955, v. 25, № 1, p. 13—15.
20. *Pabst.* Die Ausbreitung heisser gasstrahlen in bewegter Luft. F. W. Flugzeugbau. U. M. NN, 1944, № 8004, 8007.
21. *Расщупкин В. И., Секундов А. Н.* Исследование разноплотностных струй на установке кратковременного действия.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 6, с. 28—34.
22. *Авдуческий В. С., Иванов А. В., Карпман И. М., Трасковский В. Д., Юделович М. Я.* Структура турбулентных недорасширенных струй, вытекающих в затопленное пространство и спутный поток.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3, с. 15—29.
23. *Копченов В. И.* Метод численного решения задачи о распространении сверхзвуковой недорасширенной турбулентной струи в спутном сверхзвуковом потоке.— Уч. зап. ЦАГИ, 1980, т. 11, № 4, с. 37—45.