МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1986

УДК 532.5.013.4:532.546

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ

АРТЕМЬЕВА Е. Л., СТРОГАНОВА Е. В.

Исследуется устойчивость неравномерно нагретой жидкости, находящейся в поле тяжести в плоском горизонтальном пористом слое, через который совершается вертикальное вынужденное движение. Подобная система изучалась в [1, 2]. В данной работе дополнительно учитывается неоднородность проницаемости пористого слоя по глубине и зависимость вязкости насыщающей жидкости от температуры.

В результате применения линейной теории устойчивости возникает задача на собственные значения, которая решается численно. Получено семейство кривых, представляющих зависимость критического модифицированного числа Рэлея $Ra_k{}^*$ от параметра вдувания – числа Пекле Pe – при различных степенях неоднородности проницаемости и вязкости. Обнаружено, что если при однородных проницаемости и вязкости $Ra_k{}^*$ соответствует Pe=0 и с увеличением Pe устойчивость монотонно возрастает, то наличие неоднородности проницаемости или вязкости приводит к появлению минимума устойчивости в области Pe≈1, а при одновременном влиянии этих двух факторов минимум сдвигается в область Pe≈2.

Результаты работы могут использоваться, например, в исследовании процессов теплопереноса при вынужденном движении жидкости в трещинах проницаемого породного массива, когда при прокачке сквозь горизонтальную трещину через ее проницаемые стенки происходит вертикальное просачивание жидкости в пласт.

1. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет бесконечный горизонтальный пористый слой $0\leqslant z'\leqslant h$. Границы слоя проницаемы, сквозь них осуществляется вертикальное вынужденное движение жидкости с постоянной скоростью W_0. Для насыщенной пористой среды принимается так называемая гомогенная модель, в которой температуры жидкой и твердой фаз неразличимы [3]. Пусть верхняя граница насыщенного слоя поддерживается при температуре T_1', а нижняя – при температуре $T_0'=T_1'+\Delta T$.

Конвективный теплоперенос описывается системой уравнений в приближении Дарси – Буссинеска [4] и граничными условиями на верхней и нижней границе насыщенного слоя, которые в безразмерных переменных имеют вид

$$\nabla \mathbf{V}=0,\quad \mathbf{V}=-\mathrm{Ra}^*(\nabla \mathbf{p}-\gamma T) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{V}\nabla)T=\nabla^2 T \tag{1.2}$$

$$t=\frac{t'a}{\sigma h^2},\quad x=\frac{x'}{h},\quad y=\frac{y'}{h},\quad z=\frac{z'}{h}$$

$$V=\frac{V'h}{a},\quad T=\frac{T'}{\Delta T},\quad p=\frac{p'}{\rho g\beta\Delta T h}$$

$$\mathrm{Ra}^*=\frac{kg\beta\Delta T h}{\nu a},\quad \mathrm{Pe}=\frac{W_0 h}{a},\quad T_0=\frac{T_0'}{\Delta T},\quad T_1=\frac{T_1'}{\Delta T}$$

$$V_z=\mathrm{Pe},\quad T=T_0\ (z=0),\quad V_z=\mathrm{Pe},\quad T=T_1\ (z=1) \tag{1.3}$$

Здесь x', y', z', t' и V' — размерные координаты, время и скорость; температура T' отсчитывается от среднего постоянного значения $\langle T' \rangle$, давление p' есть отклонение от гидростатического давления, соответствующего $\langle T' \rangle$; ρ, ν и β — соответственно средняя плотность, кинематическая вязкость и коэффициент объемного расширения жидкости; $\sigma=(\rho c)_c/(\rho c)_w$ — отношение эффективной теплоемкости насыщенной пористой среды к теплоемкости жидкости, $a=\lambda_c/(\rho c)_w$ — эффективный коэффициент температуропроводности (λ_c — эффективная теплопроводность насыщенной пористой среды); k — проницаемость пористой среды, g — ускорение свободного падения, γ — орт оси z, направленный вертикально вверх; Ra^* — модифицированное число Рэлея.

Система (1.1)—(1.3) допускает решение, соответствующее невозмущенному состоянию, когда свободная конвекция отсутствует и имеется только вынужденное вертикальное движение жидкости поперек слоя. Распределение температуры при этом имеет вид

$$T_p=T_0+\frac{1-\exp(\mathrm{Pe}\,z)}{1-\exp(\mathrm{Pe})} \tag{1.4}$$

Вводя далее поля температуры и давления, отличающиеся от равновесных на малые величины возмущений, подставляя их в систему (1.1)—(1.3) и, согласно линейной теории устойчивости [4], пренебрегая малыми второго порядка, получаем систему уравнений для возмущений с соответствующими граничными условиями. После исключения давления она окончательно принимает вид

$$\nabla(\varphi\nabla V_z)=\mathrm{Ra}_1^*\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+V_z\frac{\mathrm{Pe}\exp(\mathrm{Pe}\,z)}{1-\exp(\mathrm{Pe})}+\mathrm{Pe}\frac{\partial T}{\partial z}=\nabla^2 T \tag{1.6}$$

$$\mathrm{Ra}_1^*=\frac{k_1 g\beta\Delta T h}{\nu_1 a},\qquad \varphi=\left(\frac{\nu}{k}\right)\Big/\left(\frac{\nu_1}{k_1}\right)$$

$$T=0,\quad V_z=0\quad (z=0;\ 1) \tag{1.7}$$

Здесь k_1 — проницаемость пористого слоя у верхней границы, а ν_1 — вязкость насыщающей жидкости при температуре верхней границы. Введение величины φ продиктовано следующими соображениями.

В реальных условиях проницаемость пористого пласта k, как правило, не постоянна. Одним из возможных случаев является ее монотонное уменьшение с глубиной из-за уплотнения пористого объема. Зависимость коэффициента пропорциональности k от глубины можно моделировать, например, линейным или экспоненциальным законом

$$k(z)=k_0+(k_1-k_0)z \tag{1.8}$$

$$k(z)=k_1(k_0/k_1)^{1-z} \tag{1.9}$$

Здесь k_0 — коэффициент проницаемости на глубине $z=0$.

Вязкость насыщающей жидкости есть величина, в общем случае зависящая от температуры; особенно существенна эта зависимость для больших перепадов температуры, которые могут иметь место в природных структурах. Для воды весьма точным в интервале температур 25 С$<T'<$ $<$250 С является эмпирический закон Вудинга

$$\nu=\nu_1[1+\alpha_\nu(T-T_1)]^{-1} \tag{1.10}$$

где ν_1 — вязкость при температуре T_1, $\alpha_\nu=\mathrm{const}$. С учетом того, что T_p+ $+T_\varepsilon=T$, где T_ε — малое возмущение, а T_p задается формулой (1.4), этот закон может быть преобразован к виду

$$\frac{\nu}{\nu_1}=\left[1+\left(\frac{\nu_1}{\nu_0}-1\right)\left(\frac{\exp(\mathrm{Pe})-\exp(\mathrm{Pe}\,z)}{\exp(\mathrm{Pe})-1}\right)\right]^{-1}$$

где введена вязкость ν_0 при температуре нижней границы T_0.

Для решения системы (1.5)–(1.7) любое возмущение, возникшее в системе, представляется в виде суперпозиции нормальных возмущений вида

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t)&=\theta(z)\exp[\lambda t+i(K_1x+K_2y)] \\ V_z(x, y, z, t)&=W(z)\exp[\lambda t+i(K_1x+K_2y)] \end{aligned} \tag{1.11}$$

где λ — декремент, K_1 и K_2 — волновые числа, θ и W — амплитуды. Обращение λ в нуль выделяет условия нейтральности возмущения, т. е. определяет границу устойчивости равновесия. Подставляя (1.11) при $\lambda=0$ в систему (1.5)–(1.7), получаем следующую краевую задачу, в которой $\mathrm{Ra}_1{}^*$ является собственным числом:

$$\frac{d}{dz}\left(\varphi\frac{dW}{dz}\right)-K^2\varphi W=-\mathrm{Ra}_1{}^*K^2\theta \tag{1.12}$$

$$-W\exp(\mathrm{Pe}\,z)+\mathrm{Pe}\frac{d\theta}{dz}=\left(\frac{d^2}{dz^2}-K^2\right)\theta \tag{1.13}$$

$$W=\theta=0 \quad (z=0), \qquad W=\theta=0 \quad (z=1)$$

$$K^2=K_1{}^2+K_2{}^2 \tag{1.14}$$

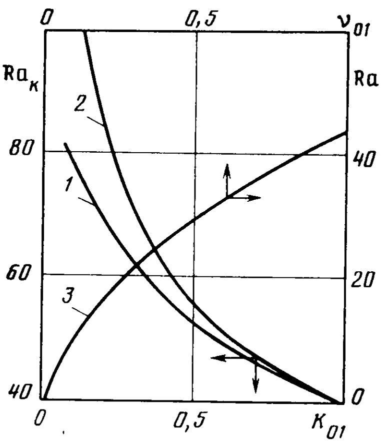
Интерес представляет минимальное собственное число Рэлея $\mathrm{Ra}_k{}^*$, которое определяет порог конвекции в данной системе.

2. Полученная краевая задача решается численно. Уравнения (1.12)–(1.13) интегрируются с помощью стандартной процедуры Рунге — Кутта при некоторых начальных приближениях для числа $\mathrm{Ra}_1{}^*$ и граничного условия $(dW/dz)_0$. Уточнение этих значений производится путем итераций на основе метода Ньютона для системы из двух уравнений (1.14) с двумя неизвестными $\mathrm{Ra}_1{}^*$ и $(dW/dz)_0$. Начальные приближения выбирались из существующих аналитических решений и из общих соображений о закономерностях процесса. Полученное собственное число $\mathrm{Ra}_1{}^*$ системы (1.12)–(1.14) затем минизируется методом «золотого сечения» в зависимости от волнового числа K, так как именно этот минимум $\mathrm{Ra}_k{}^*$ определяет границу устойчивости.

Для выявления общих закономерностей влияния на устойчивость изменяющихся параметров слоя при отсутствии поперечного потока $\mathrm{Pe}=0$ на фиг. 1 построены кривые *1* и *2* зависимости $\mathrm{Ra}_k{}^*$ от соотношения $k_{01}=k_0/k_1$ при $\nu_{01}=\nu_0/\nu_1=1$ (кривая *1* — $k(z)$ изменяется по линейному закону (1.8), кривая *2* — $k=k(z)$ подчиняется экспоненциальному закону (1.9), кривая *3* — $\mathrm{Ra}_k{}^*$ от ν_{01} при $k_{01}=1$). Рост устойчивости при уменьшении k_{01} можно объяснить тем, что при слабой проницаемости внизу пористого слоя поток сконцентрирован в верхней части слоя; эффективная глубина уменьшается, а число Рэлея, построенное по полной глубине, увеличивается.

С учетом изменяющейся с температурой вязкости жидкости при $k_{01}=1$ $\mathrm{Ra}_k{}^*$ тем меньше, чем меньше ν_{01} или, иначе, чем больше перепад температуры (кривая *3* на фиг. 1). Это очевидно, так как жидкость вблизи горячей нижней границы значительно менее вязкая, чем при температуре верхней границы T_1, она становится нестабильной при меньшем числе Рэлея, чем в случае жидкости с $\nu=\nu_1=\mathrm{const}$. В [7] указывается на уменьшение $\mathrm{Ra}_k{}^*$ в 5 раз по сравнению с классическим значением при перепаде температуры 250 С. При этом в формуле (1.10) $\alpha_\nu=1/(T_0'-260)$, а $T_0'=294$ С. Пересчет полученных в данной работе результатов для этих параметров дает уменьшение Ra_k^* в 4,4 раза.

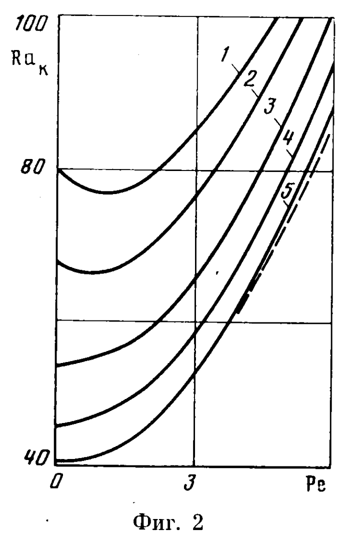
Кривые на фиг. 2 определяют зависимость Ra_k^* от Pe, характеризующего скорость поперечного потока при $\nu_{01}=1$ (*1—5* — соответственно значения параметра $k_{01}=0{,}10$; 0,25; 0,5; 0,75; 1,00). Тестовая кривая *5* на линейном участке имеет тангенс угла наклона к оси абсцисс 14,5. В [2] эта величина равна 14,3 (штриховая кривая *5*). При достаточно сильном влиянии неоднородности проницаемости наиболее неустойчива система, в которой имеется слабое поперечное движение жидкости Pe≈1, несмотря на то, что вообще наличие вынужденного движения должно повышать устойчивость.



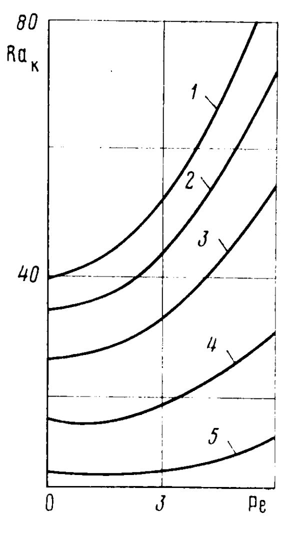
Фиг. 1

Аналогичная картина наблюдается для семейства кривых зависимости Ra_k^* от Pe (фиг. 3), когда параметром является ν_{01} (*1—5* — соответственно $\nu_{01}=1{,}00$; 0,75; 0,5; 0,25; 0,10). При слабом изменении вязкости ($\nu_{01}=0{,}75$; 0,5), что соответствует малым перепадам температуры, поведение кривых аналогично поведению тестовой, а при $\nu_{01}=0{,}25$ и 0,1 минимум устойчивости находится в области Pe≈1.

Поведение устойчивости в области малых чисел Pe и дальнейшее ее повышение можно понять из следующих соображений.



Фиг. 2



Фиг. 3

При $k_{01}=1$, $\nu_{01}=1$ с увеличением скорости вертикального движения у верхней границы образуется температурный пограничный слой (см. распределение температуры (1.4)). В связи с этим уменьшается эффективная толщина стратифицированного слоя жидкости $h_e\sim h/\mathrm{Pe}$. Так как характерная разность температуры при этом остается фиксированной, то число Рэлея Ra_k^*, определенное обычным образом по полной толщине слоя, имеет порядок $\mathrm{Ra}_k^*\sim h/h_e\sim \mathrm{Pe}$, т. е. растет с числом Пекле.

В случае $k_{01}\neq 1$, $\nu_{01}=1$ при Pe=0 это означает, что в нижней, более плотной области пористого объема движение почти отсутствует, оно сосредоточено в верхних частях объема и в связи с этим эффективная толщина слоя уменьшается. Пусть теперь у нижней границы появляется слабое вертикальное течение, Pe∼1. Жидкость в нижней части пористого слоя уже не является неподвижной, так что эффективная толщина слоя не уменьшается, как в случае Pe=0. Вместе с тем это вертикальное движение еще не настолько сильно, чтобы создать пограничный слой у верхней границы и в свою очередь уменьшить h_e. Итак, в области малых Pe функция Ra_k* от Pe убывает. При дальнейшем увеличении Pe начинает проявляться эффект, описанный в предыдущем абзаце. Функция Ra_k* от Pe начинает возрастать.

Обратимся теперь к случаю $\nu_{01}\neq 1$, $k_{01}=1$. Наличие большой разности температур между верхней и нижней границами приводит к тому, что у нижней (горячей) границы вязкость жидкости значительно меньше, чем при температуре верхней границы, т. е. жидкость более подвижна по сравнению с «классическим» случаем и, следовательно, более нестабильна. Появление у нижней границы малого поперечного потока еще более увеличивает подвижность, а значит, нестабильность жидкости. Критическое число Рэлея Ra_k* убывает. Увеличение поперечного потока приводит уже к преобладанию эффекта образования пограничного слоя, уменьшению эффективной толщины слоя; Ra_k* возрастает.

Исследование устойчивости рассматриваемой системы при взаимном влиянии неоднородности проницаемости и меняющейся с температурой вязкости показало, что минимум Ra_k* сдвигается в сторону бóльших скоростей поперечного потока — в область Pe≈2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Шварцблат Д. Л.* О возникновении конвекции в горизонтальном слое пористой среды при наличии поперечного просачивания.– В кн.: Тез. докл. на II Всесоюз. конф. «Современные проблемы тепловой конвекции». Пермь, 1975.
2. *Homsy G. M., Sherwood A. E.* Convective instabilities in porous media with through flow.– AIChE Journal, 1976, v. 22, No 1, p. 168–174.
3. *Пудовкин М. А., Волков И. К.* Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1978. 188 с.
4. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
5. *Wooding R. A.* Large-scale geothermal field parameters and convection theory.– N. Z. J. Sci., 1978, v. 21, № 2, p. 219–228.
6. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. М.: Наука, 1975. 631 с.
7. *Zebib A., Kassoy D. R.* Onset of natural convection in a dox of water-saturated porous media with large temperature variation.– Phys. Fluids, 1977, v. 20, № 1, p. 4–9.

Ленинград

Поступила в редакцию
14.I.1986