

УДК 532.516.5:533.6.011.55

## ГИПЕРЗВУКОВОЙ ВЯЗКИЙ УДАРНЫЙ СЛОЙ В ЗАКРУЧЕННОМ ПОТОКЕ ГАЗА НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

ГЕРШБЕЙН Э. А., ПЕЙГИН С. В.

Рассматривается обтекание вращающихся осесимметричных затупленных тел гиперзвуковым закрученным потоком вязкого сжимаемого газа, вектор скорости которого параллелен оси вращения тела. Поверхность тела считается проникаемой, причем вдув (отсос) газа осуществляется в общем случае не по нормали к поверхности тела. В первом приближении интегрального метода последовательных приближений найдено аналитическое решение задачи, справедливое при малых числах Рейнольдса. На основании результатов численного решения, полученного в широком диапазоне изменения определяющих параметров задачи, исследуется влияние закрутки набегающего потока, угловой скорости вращения тела, числа Рейнольдса и параметра вдува (отсоса) на структуру сжатого слоя, коэффициенты трения и теплообмена на поверхности тела. Изучается влияние закрутки потока на характер асимптотики уравнений вязкого ударного слоя при больших числах Рейнольдса. Показано, что наличие ненулевой окружной составляющей у вектора скорости газа в ударном слое может приводить к качественному изменению характера течения.

Ранее закрученные гиперзвуковые течения в различных постановках исследовались в ряде работ [1–6]. В [1] рассматривалась невязкая постановка задачи; в [2, 3] изучение велось в рамках модели пограничного слоя; в [4, 5] – в приближении параболизированных уравнений Навье – Стокса; в [6] получено решение уравнений вязкого ударного слоя в окрестности критической точки. При этом в [2, 4, 6] поверхность тела считалась непроницаемой, а решения [5] ограничены случаем слабого вдува.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим осесимметрично закрученное течение однородного сжимаемого газа в гиперзвуковом вязком ударном слое около проникаемой поверхности. Выберем криволинейную ортогональную систему координат  $(\xi, \eta, \zeta)$  следующим образом: координату  $\xi$  будем отсчитывать вдоль поверхности, координату  $\eta$  – в окружном направлении, координату  $\zeta$  – по нормали к телу. В данной системе координат уравнения гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя имеют следующий безразмерный вид [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u r) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\rho v r) &= 0 & (1.1) \\ \rho \left( Du - \frac{dr}{d\xi} \frac{w^2}{r} \right) &= -\frac{2\epsilon}{1+\epsilon} \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\mu}{K} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \\ \rho \left( Dw + \frac{dr}{d\xi} \frac{uw}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\mu}{K} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right), \quad \rho DT = \frac{2\epsilon}{1+\epsilon} u \frac{\partial P}{\partial \xi} + \\ &+ \frac{\mu}{K} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\mu}{\sigma K} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial \zeta} &= \frac{1+\epsilon}{2} \rho \left( \chi u^2 + \frac{w^2 \cos \alpha}{r} \right), \quad P = \rho T, \quad K = \epsilon \text{Re} \end{aligned}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho_\infty V_\infty L}{\mu(T_0)}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$T_0 = T_\infty^\circ (\gamma-1) M_\infty^2, \quad D \equiv u \frac{\partial}{\partial \xi} + v \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

Здесь  $V_\infty u$ ,  $V_\infty w$ ,  $V_\infty \varepsilon v$  — составляющие скорости в направлениях  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  соответственно;  $\varepsilon^{-1} \rho_\infty \rho$ ,  $T_0 T$ ,  $P_\infty^\circ T_0 (\varepsilon T_\infty^\circ)^{-1} P$  — плотность, абсолютная температура, давление газа;  $Lr$  — радиус поперечной кривизны тела,  $\kappa L^{-1}$  — продольная кривизна контура тела,  $\mu(T_0)\mu$  — коэффициент вязкости ( $\mu = T^\alpha$ ),  $\alpha$  — угол между вектором скорости набегающего потока и вектором внешней нормали к телу; все линейные размеры отнесены к характерному размеру тела  $L$ , а нормальная координата  $\zeta$  — к  $\varepsilon L$ .

Граничные условия имеют вид

$$\zeta=0: \quad u=u_w(\xi), \quad w=w_w(\xi)$$

$$T=T_w(\xi), \quad (\rho v)_w = G(\xi) \quad (1.2)$$

$$\zeta=\zeta_s: \quad \rho \left( v - u \frac{\partial \zeta_s}{\partial \xi} \right) = v_\infty, \quad v_\infty (u - u_\infty) = \frac{\mu}{K} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad (1.3)$$

$$v_\infty (w - w_\infty) = \frac{\mu}{K} \frac{\partial w}{\partial \zeta}, \quad P = \frac{1+\varepsilon}{2} \left( v_\infty^2 + \frac{w_\infty^2}{2} \right)$$

$$v_\infty \left[ T - T_\infty - \frac{1}{2} (v_\infty^2 + (u - u_\infty)^2 + (w - w_\infty)^2) \right] = \frac{\mu}{\sigma K} \frac{\partial T}{\partial \zeta}$$

Здесь и далее индексы  $w$ ,  $\infty$ ,  $s$  соответствуют значениям переменных на теле, в набегающем потоке и на поверхности ударной волны. При выводе записанных в гиперзвуковом приближении обобщенных условий Рэнкина — Гюгонио на ударной волне (1.3) предполагалось, что в набегающем потоке

$$\text{rot } \mathbf{V}_\infty = (\Omega^*, 0, 0), \quad \rho_\infty = \text{const} \quad (1.4)$$

$$P_\infty = P_\infty^\circ + \frac{\rho_\infty w_\infty^2}{2}, \quad w_\infty = \Omega^* r$$

где  $P_\infty^\circ$  — давление газа в набегающем потоке на оси симметрии течения при  $r=0$  и  $\Omega = L\Omega^*/V_\infty \ll O(1)$ .

Как следует из асимптотического анализа задачи [8], система (1.1)–(1.3) является равномерно пригодной для описания течения в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса и параметра вдува (отсоса).

Для удобства численного решения задачи перейдем в (1.1)–(1.3) к новым переменным. В результате получим следующую систему уравнений и граничных условий (индекс \* здесь и далее опускаем):

$$\xi^* = \xi, \quad \zeta^* = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\zeta} \frac{\rho r}{\xi^*} d\zeta, \quad \Delta = \int_0^{\zeta_s} \frac{\rho r}{\xi^*} d\zeta, \quad l = \frac{\mu \rho r^2}{K \Delta^2 \xi^2}$$

$$u^* = \frac{u}{u_\infty} = \frac{\partial f}{\partial \zeta^*}, \quad w^* = \frac{w}{w_0} \quad (1.5)$$

$$\theta = \frac{2T}{v_\infty^2}, \quad P_1 = \frac{1}{\xi^*} \frac{\partial P}{\partial \xi^*}$$

$$(lu_\zeta')_{\zeta^*} = Du + \alpha_1 u^2 - \alpha_2 w^2 + \alpha_3 \rho^{-1} P_1$$

$$(lw_\zeta')_{\zeta^*} = Dw + \alpha_4 uw, \quad (l\sigma^{-1}\theta_\zeta')_{\zeta^*} = D\theta + \alpha_5 u\theta - l[\alpha_6 (u_\zeta')^2 + \alpha_7 (w_\zeta')^2] - \alpha_8 u \rho^{-1} P_1$$

$$P_{\zeta^*}' = \beta_1 u^2 + \beta_2 w^2, \quad P_{1\zeta^*}' = \beta_3 uu_\zeta' + \beta_4 ww_\zeta' + \beta_5 u^2 + \beta_6 w^2 \quad (1.6)$$

$$P=0,5v_{\infty}^2\rho\theta, \quad \mu=(0,5\theta v_{\infty}^2)^{\omega}, \quad D \equiv u_{\infty} \left( u \frac{\partial}{\partial \xi} - f_{\xi}' \frac{\partial}{\partial \xi} \right) - \alpha_0 f \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\xi=0: \quad u=u_w, \quad \theta=\theta_w, \quad w=w_w$$

$$\alpha_0 f + u_{\infty} f_{\xi}' = -Gr(\xi\Delta)^{-1} \quad (1.7)$$

$$\xi=1: \quad l\Phi u_{\xi}' + u = 1, \quad l\Phi w_{\xi}' + w = w_{\infty} w_0^{-1}$$

$$l\sigma^{-1}\Phi\theta_{\xi}' + \theta = 1 + 0,5[\alpha_6(u-1)^2 + \alpha_7(w-w_{\infty}w_0^{-1})^2]$$

$$P = \frac{1+\varepsilon}{2} \left( v_{\infty}^2 + \frac{w_{\infty}^2}{2} \right), \quad P_1 = \frac{1+\varepsilon}{\xi} \left( v_{\infty} \frac{\partial v_{\infty}}{\partial \xi} + \frac{w_{\infty}}{2} \frac{\partial w_{\infty}}{\partial \xi} \right) \quad (1.8)$$

$$\alpha_0 f + u_{\infty} f_{\xi}' = \Phi^{-1}, \quad \Phi \equiv -\Delta \xi (rv_{\infty})^{-1}, \quad w_{\infty} = \Omega r$$

$$\alpha_0 = \frac{(\xi \Delta u_{\infty})_{\xi}'}{\xi \Delta}, \quad \alpha_1 = \frac{du_{\infty}}{d\xi}, \quad \alpha_2 = \frac{w_0^2 d \ln r}{u_{\infty} d\xi}$$

$$\alpha_3 = \frac{2\varepsilon \xi}{(1+\varepsilon)u_{\infty}}, \quad \alpha_4 = u_{\infty} \left( \frac{d \ln w_0}{d\xi} + \frac{d \ln r}{d\xi} \right)$$

$$\alpha_5 = u_{\infty} \frac{d \ln v_{\infty}^2}{d\xi}, \quad \alpha_6 = \frac{2u_{\infty}^2}{v_{\infty}^2}, \quad \alpha_7 = \frac{2w_0^2}{v_{\infty}^2}, \quad \alpha_8 = \frac{2\alpha_3 u_{\infty}^2}{v_{\infty}^2} \quad (1.9)$$

$$\beta_1 = 0,5\xi(1+\varepsilon)\kappa u_{\infty}^2 \Delta r^{-1}, \quad \beta_3 = 2\beta_1 \xi^{-1}$$

$$\beta_2 = 0,5\xi \Delta (1+\varepsilon) w_0^2 \cos \alpha r^{-2}, \quad \beta_4 = 2\beta_2 \xi^{-1}$$

$$\beta_5 = \frac{(\beta_3 \xi)_{\xi}'}{2\xi}, \quad \beta_6 = \frac{(\beta_4 \xi)_{\xi}'}{2\xi}, \quad w_0 = \begin{cases} w_{\infty}, & \Omega \neq 0 \\ w_w, & \Omega = 0 \end{cases}$$

2. Асимптотическое решение уравнений вязкого ударного слоя в закрученном потоке при больших числах Рейнольдса и сильном вдуве. Рассмотрим решение задачи (1.1)–(1.3), когда

$$Re \gg 1, \quad Re_w = \frac{\rho_w^* v_w^* L}{\mu_w^*} \gg 1, \quad \delta^2 = \frac{\rho_w^* v_w^{*2}}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2} \ll 1$$

В этом случае задача становится сингулярной [9] и для ее решения может быть использован метод сращиваемых асимптотических разложений [10]. При этом весь ударный слой разбивается на невязкий ударный слой (примыкающий к ударной волне) и слой вдуваемых газов (примыкающий к поверхности тела), в которых эффектами молекулярного переноса в первом приближении можно пренебречь, и слой смешения, расположенный между ними, в котором эти эффекты играют основную роль. Рассмотрим решение внешней задачи, заключающейся в расчете параметров в слое вдува и в невязком ударном слое. При этом в зависимости от продольной кривизны  $\kappa$  контура обтекаемого тела возможны два случая. Если  $\kappa \leq \delta$ , то градиент давления, создаваемый телом, не превышает по своему порядку градиент давления, индуцируемого слоем вдува, и поэтому распределение давления в возмущенной области течения заранее неизвестно и должно находиться из совместного решения уравнений, описывающих течение в невязком ударном слое и слое вдува. В этом случае, как показано в [11, 12], решение такой объединенной системы уравнений не единственно и зависит от произвольной постоянной, определяемой из дополнительного краевого условия, выставляемого ниже по течению. Если же  $\kappa = O(1) \gg \delta$ , то поправка в градиент давления, возникающая за счет разницы в формах контактной поверхности и поверхности обтекаемого тела, будет много меньше, чем градиент давления, создаваемый телом. Поэтому в данном случае этой поправкой в первом приближении можно пренебречь и считать, что контактная поверхность совпадает с поверх-

ностью тела, а распределение давления совпадает с распределением давления на теле без вдува [9, 12]. При этом решение в слое вдува в первом приближении может быть найдено после определения решения в невязком ударном слое и необходимость в выставлении дополнительного краевого условия ниже по течению отпадает. В дальнейшем будем рассматривать лишь второй случай, т. е. изучать обтекание тел, у которых  $\kappa \sim O(1)$ .

*Слой вдуваемых газов.* Уравнения и граничные условия, в первом приближении описывающие течение в слое вдува, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\rho ur) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho vr) = 0, \quad \rho \left( Du - \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{w^2}{r} \right) = - \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{\partial P}{\partial \xi}$$

$$Dw + \frac{dr}{d\xi} \frac{uw}{r} = 0; \quad \rho DT = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} u \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad \frac{dP}{d\xi} = 0 \quad (2.1)$$

$$\zeta=0: \quad u=u_w, \quad w=w_w, \quad \rho v=(\rho v)_w, \quad T=T_w \quad (2.2)$$

$$\zeta=\zeta_c: \quad P=P_c(\xi), \quad v=0 \quad (2.3)$$

Решение (2.1)–(2.3) запишем следующим образом:

$$u^2(\xi, t) + w^2(\xi, t) + 2T(\xi, t) = u_w^2(t) + w_w^2(t) + 2T_w(t) \quad (2.4)$$

$$\frac{T(\xi, t)}{T_w(t)} = \left[ \frac{P_c(\xi)}{P_c(t)} \right]^{(\gamma_w-1)/\gamma_w} \frac{\rho(\xi, t)}{\rho_w(t)} = \left[ \frac{P_c(\xi)}{P_c(t)} \right]^{1/\gamma_w} \quad (2.5)$$

$$\zeta(\xi, t) = \int_t^{\xi} \frac{\rho_w(t) v_w(t) dt}{\rho(\xi, t) u(\xi, t) r(\xi)}, \quad 0 \leq t \leq \xi, \quad \frac{w(\xi, t)}{w_w(t)} = \frac{r(t)}{r(\xi)}$$

Здесь  $t$  – координата  $\xi$  выхода линии тока из поверхности тела,  $P_c(\xi)$  – давление на контактном разрыве, определяемое из решения задачи в невязком ударном слое.

Разрешая особенности в окрестности критической точки, при  $\xi=0$  получим

$$T(0, \zeta) = T_w, \quad \rho(0, \zeta) = \rho_w, \quad W = C_1 v, \quad U^2 = P_1 - C_1^2 v^2 + C_0 v$$

$$C_0 = v_w^{-1} (U_w^2 + W_w^2 - P_1), \quad C_1 = \Omega_1 v_w^{-1}$$

$$U = \frac{\partial u}{\partial \xi}(0, \zeta), \quad W = \frac{\partial w}{\partial \xi}(0, \zeta) \quad (2.6)$$

$$P_1 = - \frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon)\rho_w \xi} \frac{dP_c}{d\xi}(0), \quad \zeta = - \int_{v_w}^v \frac{dv}{2U}$$

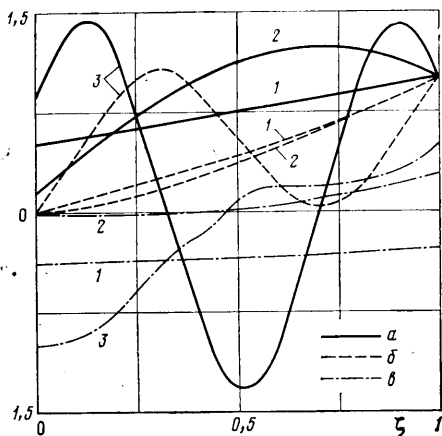
где  $\Omega_1 = \Omega_1^* L / V_\infty$  – безразмерная угловая скорость вращения тела.

Отметим, что толщина слоя вдува  $\zeta^0$  остается конечной лишь при  $\partial P_c / \partial \xi < 0$  (либо  $P_1 > 0$  в критической точке). Аналогично [3] можно показать, что область  $D$  существования решения в слое вдуваемых газов с условием  $\zeta^0 < \infty$  совпадает с интервалом  $[0, \xi^0)$ , где  $\xi^0$  зависит от  $u_w, w_w, P_c(\xi)$ , формы тела и определяется по формулам (2.7)–(2.8) работы [3].

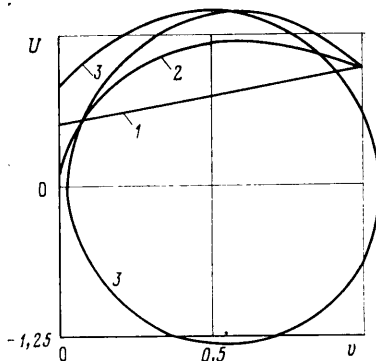
*Невязкий ударный слой.* В системе координат, связанной с поверхностью ударной волны, уравнения, справедливые в невязком ударном слое, совпадают по своему виду с уравнениями (2.1). Исключение составляет лишь последнее из этих уравнений для поперечного градиента давления, которое в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{1+\varepsilon}{2} \left( \kappa u^2 - \frac{w^2 \cos \alpha}{r} \right) \quad (2.7)$$

Систему (2.1), (2.7) необходимо решать с граничными условиями



Фиг. 1



Фиг. 2

Рэнкина — Гюгонио на ударной волне и условием  $v=0$  на контактной поверхности.

Рассмотрим характер влияния параметра  $\Omega$  на структуру решения (2.1), (2.7) на примере течения в окрестности критической точки. Разрешив особенности, получим следующую автомодельную систему уравнений и граничных условий:

$$\frac{dv}{d\xi} + 2U = 0, \quad v \frac{dU}{d\xi} = -P_1 + \Omega^2 v^2 - U^2, \quad U = \frac{\partial u}{\partial \xi}(0, \xi) \quad (2.8)$$

$$\frac{dP_1}{d\xi} = -2\epsilon(U^2 + \Omega^2 v^2), \quad P_1 = \frac{2\epsilon}{1+\epsilon} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}(0, \xi)$$

$$\xi=0: \quad v=1, \quad U=1, \quad P_1 = \epsilon(\Omega^2 - 2); \quad \xi=\xi_c: \quad v=0 \quad (2.9)$$

Как показывает анализ численного решения (2.8)–(2.9), при малых  $\Omega$  остается справедливой двухслойная структура невязкого ударного слоя, согласно которой в первом подслое, примыкающем к ударной волне, влиянием градиента давления можно пренебречь, а в подслое около контактной поверхности это влияние необходимо учитывать, причем изменение градиента давления поперек второго подслоя в первом приближении несущественно [13, 14]. Однако по мере увеличения  $\Omega$  такое разделение становится невозможным — градиент давления оказывает существенное влияние на течение во всем невязком ударном слое.

Расчеты показали, что имеется некоторое критическое значение  $\Omega = \Omega_*$ , при котором происходит скачкообразное изменение режима течения. Это хорошо видно из фиг. 1, на которой приведены профили  $u/u_s$ ,  $w/w_s$ ,  $1/\epsilon \partial^2 P / \partial \xi^2$  (линии  $a$ ,  $b$ ,  $v$ ) поперек слоя при  $\xi=0$  для различных значений  $\Omega$  ( $\Omega = 10^{-6}$ ; 2,0; 2,5 — линии 1–3). Для  $\Omega < \Omega_*$  увеличение  $\Omega$  ведет к монотонному падению толщины слоя и появлению в профиле  $u/u_s$  характерного максимума вблизи ударной волны, значение которого растет с ростом  $\Omega$ . В точке  $\Omega = \Omega_*$  решение качественно меняет свой характер: толщина слоя разрывным образом увеличивается почти в 4 раза, в профиле  $u/u_s$  появляются два локальных максимума вблизи ударной волны и контактной поверхности, а в центре слоя образуется зона возвратных течений. Такая зависимость решения от параметра  $\Omega$  имеет достаточно ясный физический смысл. Действительно, если закрутка велика, то скоростного напора газа не хватает для преодоления индуцированного центробежными силами повышенного давления, в силу чего в невязком ударном слое появляются области возвратных течений.

Характер бифуркации решения (2.8)–(2.9) при  $\Omega = \Omega_*$  поясним, обратившись к картине интегральных кривых этой системы в фазовой плоскости  $(v, U)$ , приведен-

ной на фиг. 2, где линии 1-3  $\Omega=0$ ; 2; 2,5 соответственно. Решению краевой задачи (2.8)-(2.9) отвечает отрезок интегральной кривой, выходящей из точки (1,1) до ее пересечения в точке  $R_1$  с осью  $v=0$ . Как показывает анализ, поведение интегральной кривой при приближении ее к линии  $v=0$  полностью определяется величиной  $P_1^\circ = \lim_{v \rightarrow 0} P_1$ . Физически это понятно, поскольку центробежные силы стремятся к

нулю при  $v \rightarrow 0$  и, следовательно, характер движения жидкой частички в окрестности  $v=0$  должен зависеть только от сил градиента давления. При  $P_1^\circ \leq 0$  интегральная кривая пересекает ось  $v=0$  в точке  $(0, \sqrt{-P_1^\circ})$ ; если же  $P_1^\circ > 0$ , то такое пересечение отсутствует и интегральная кривая, достигнув на оси  $U=0$  минимального значения  $v_{\min} > 0$ , уходит в область  $U < 0$ . Расчеты показывают, что при  $\Omega=0$   $P_1^\circ < 0$  и с ростом  $\Omega$  значение  $P_1^\circ$  возрастает. Наконец, при  $\Omega = \Omega_* = 2,18$  (при  $\varepsilon = 0,1$ )  $P_1^\circ$  становится равным нулю. Дальнейшее увеличение  $\Omega$  приводит к тому, что  $P_1^\circ$  становится положительным; интегральная кривая, не пересекая оси  $v=0$ , уходит в нижнюю полуплоскость  $U < 0$  - в слое возникают возвратные течения. В силу (2.8) это приводит к росту  $v$  и увеличению центробежных сил, приводящих в свою очередь к развороту интегральной кривой и возвращению ее в область  $U > 0$ . Поскольку градиент давления является монотонно убывающей функцией  $\xi$ , то, начиная с некоторой толщины слоя  $\xi = \xi_0$ ,  $P_1$  становится отрицательным, вследствие чего при вторичном подходе интегральной кривой к оси  $v=0$  она пересекает ось.

Таким образом, из анализа решения автомодельных уравнений невязкого ударного слоя можно сделать вывод о том, что при  $\Omega > \Omega_*$  в окрестности критической точки происходит смена режима течения, характеризующаяся возрастанием толщины слоя и возникновением внутри него зоны возвратных токов. В связи с этим встает вопрос о применимости гиперзвукового приближения для исследования таких режимов течения. Известно, что в принципе в рамках уравнений параболического типа изучение течений, в которых продольная скорость знакопеременна, возможно [15, 16]. При этом для корректного решения таких задач необходимо задавать дополнительное граничное условие на нижней по координате  $\xi$  границе расчетной области, а также учитывать, что в тех подобластях течения, где продольная скорость имеет разные знаки, направления параболичности взаимопротивоположны.

Окончательно вопрос о применимости параболического приближения для исследования таких режимов течения, а также о виде граничного условия в замыкающем сечении ниже по течению, по-видимому, может быть решен либо из сравнений с результатами более точных математических моделей, либо с данными эксперимента.

**3. Аналитическое решение задачи интегральным методом последовательных приближений.** При малых и умеренных числах Рейнольдса применим к решению задачи интегральный метод последовательных приближений [17]. Переходя в (1.1)-(1.3) к новым переменным, получим систему интегродифференциальных уравнений и граничных условий для определения  $g_i$  ( $i=1, 2, 3$ )

$$x = \xi, \quad y = \frac{r}{\Delta x} \int_0^\xi \rho d\zeta, \quad l = \frac{\mu \rho r^2}{K \Delta^2 x^2}, \quad g_0 = \rho v r + x \Delta u y \xi' \quad (3.1)$$

$$d_i = p_i + b_i g_i, \quad p_i = d_{iw}, \quad b_i = p_i - d_{is} \quad (i=1, 2, 3)$$

$$d_1 = u, \quad d_2 = w, \quad d_3 = T$$

$$g_0 = G(x) r - \left( x \Delta \int_0^y d_1 dy \right)', \quad g_i = 1 + F_i + K_i \int_0^1 a_i l^{-1} dy$$

$$F_i = \int_1^y a_i l^{-1} \int_0^y f_i dy dy, \quad K_i(x) = -(1 + F_i(x, 0)) \left( \int_1^0 a_i l^{-1} dy \right)^{-1}$$

$$f_i = D g_i + b_i^{-1} (D^* p_i + g_i D^* b_i) + c_i, \quad a_1 = a_2 = 1, \quad a_3 = \sigma \quad (3.2)$$

$$c_1 = -\delta b_1^{-1} d_2^2, \quad c_2 = \delta b_2^{-1} d_1 d_2$$

$$c_3 = -l b_3^{-1} (b_1^2 g_{1y}'^2 + b_2^2 g_{2y}'^2)$$

$$\delta = \frac{d \ln r}{dx}; \quad D = D^* + \frac{g_0}{\Delta x} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D^* = (p_1 + b_1 g_1) \frac{\partial}{\partial x}$$

$$P = \frac{1}{2} \left( v_\infty^2 + \frac{w_\infty^2}{2} \right) + \frac{\Delta x (1 + \varepsilon)}{2r} \int_1^y \left( \kappa d_1^2 + \frac{\cos \alpha}{r} d_2^2 \right) dy$$

$$G(x) - r^{-1} \left( x \Delta \int_0^1 (p_1 + b_1 g_1) dy \right)' = v_\infty$$

$$b_i l^* g_{iy}' = d_{i_s} - d_{i_\infty} \quad (i=1, 2), \quad l^* = \frac{\mu_s \rho_s r}{K \Delta x v_\infty}$$

$$b_3 l^* g_{3y}' = T_s - 0,5 [v_\infty^2 + (u_s - u_\infty)^2 + (w_s - w_\infty)^2] \quad (3.3)$$

Систему (3.2)–(3.3) будем решать методом последовательных приближений [17] следующим образом. Пусть  $g_i^{(n-1)}$  ( $i=1, 2, 3$ ) известны в  $(n-1)$ -м приближении. Подставляя их в (3.3), найдем значения  $\Delta$ ,  $d_{i_s}$  ( $i=1, 2, 3$ ), после чего, подставив найденные  $\Delta$ ,  $d_{i_s}$  и известные  $g_i^{(n-1)}$  в правые части (3.2), определим  $g_i^{(n)}$ . Затем процесс повторяется. Опыт применения указанного метода к решению ряда задач вязкого ударного слоя [18, 19] показал, что описанный выше алгоритм обладает сходимостью и уже первое приближение в ряде случаев дает удовлетворительную для практики точность.

Приведем общее аналитическое решение (3.2)–(3.3) в первом приближении, задавая нулевое приближение для всех искомых функций в виде линейного профиля  $g_i^{(0)}(x, y) = y$  ( $i=1, 2, 3$ ) и аппроксимируя  $l^{-1}$  в виде  $l^{-1} = l_w^{-1} + y(l_s^{-1} - l_w^{-1})$

$$F_i = \sum_{j=0}^2 \frac{a_i A_{ij}}{j+1} \left\{ l_w^{-1} \frac{y^{j+2}-1}{j+2} - \frac{l_s^{-1} - l_w^{-1}}{j+3} (y^{j+3}-1) \right\}$$

$$A_{ij} = \alpha_j + b_i^{-1} (r_{ij} + q_{ij}) \quad (i=1, 2, 3; j=0, 1, 2)$$

$$\alpha_0 = Gr(\Delta x)^{-1}, \quad \alpha_1 = -p_1 (\ln(x \Delta p_1))_x'$$

$$\alpha_2 = -0,5 b_1 (\ln(x \Delta b_1))_x'$$

$$r_{10} = p_1 p_{1x}', \quad r_{11} = b_1 p_{1x}' + p_1 b_{1x}', \quad r_{12} = b_1 b_{1x}'$$

$$q_{10} = -\delta p_2^2, \quad q_{11} = -2\delta p_2 b_2, \quad q_{12} = -\delta b_2^2 \quad (3.4)$$

$$q_{20} = \delta p_1 p_2, \quad q_{21} = \delta (p_1 b_2 + p_2 b_1), \quad q_{22} = \delta b_2 b_1$$

$$q_{32} = 0, \quad q_{30} = (b_1^2 + b_2^2) l_w^{-1}, \quad q_{31} = (b_1^2 + b_2^2) (l_s^{-1} - l_w^{-1})$$

$$P = 0,5 \{ v_\infty^2 + 0,5 w_\infty^2 + \Delta x r^{-1} (1 + \varepsilon) [ (y-1) (\kappa p_1^2 + r^{-1} \cos \alpha p_2^2) + (y^2-1) (\kappa b_1 p_1 + r^{-1} \cos \alpha p_2 b_2) + (y^3-1) (\kappa b_1^2 + r^{-1} \cos \alpha b_2^2) / 3 ] \}$$

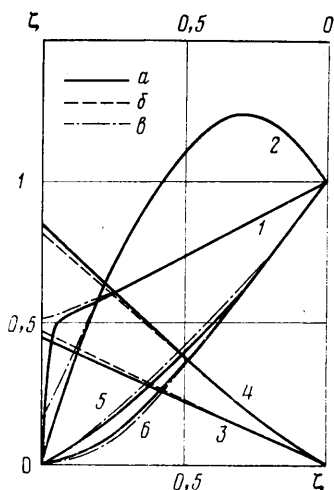
Необходимые при этом значения  $\Delta$ ,  $u_1$ ,  $w_s$ ,  $T_s$  определялись из решения следующей системы уравнений:

$$u_s (l^* - 1) = l^* u_w - u_\infty, \quad w_s (l^* - 1) = l^* w_w - w_\infty$$

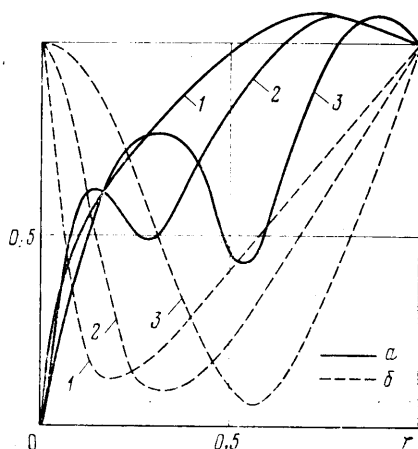
$$T_s (\sigma^{-1} l^* - 1) = \sigma^{-1} l^* T_w - 0,5 [v_\infty^2 + (u_s - u_\infty)^2 + (w_s - w_\infty)^2] \quad (3.5)$$

$$x \Delta (u_s - u_\infty) = 2F(x), \quad l^* = \frac{\mu_s \rho_s r}{K \Delta x v_\infty}$$

где  $F(x)$  — решение дифференциального уравнения первого порядка  $F_x' = r(G(x) - v_\infty)$ . В частном случае  $\omega=1$  система (3.5) имеет точное аналитическое решение, а при  $\omega \neq 1$  решение (3.5) может быть найдено численно.



Фиг. 3



Фиг. 4

4. Численное решение задачи. Обсуждение результатов расчетов. Система уравнений (1.6)–(1.8) решалась численно. Использовалась неявная разностная схема [20] с точностью аппроксимации  $O(\Delta\zeta)^4 + O(\Delta\xi)^2$ . Параметры задачи варьировались в следующих пределах:

$$\varepsilon = 0,1; \quad 0,05 \leq \theta_w = \text{const} \leq 0,5 \\ 5 \leq \text{Re} \leq 5 \cdot 10^7, \quad 0 \leq \Omega \leq 3, \quad -1 \leq \Omega_1 \leq 2$$

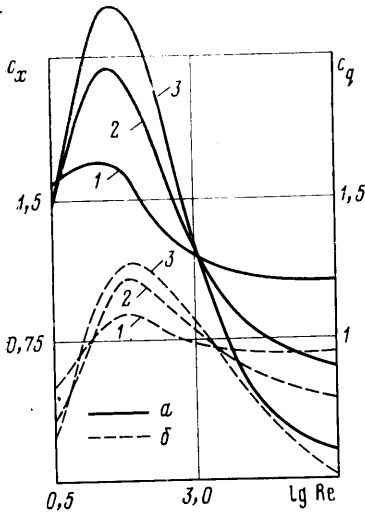
В процессе решения определялись профили искомых функций поперек ударного слоя, а также коэффициенты трения и теплообмена на поверхности тела

$$c_x = \frac{\mu}{\varepsilon \sqrt{\text{Re} r}} \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad c_y \approx \frac{\mu}{\varepsilon \sqrt{\text{Re} r}} \frac{\partial w}{\partial \zeta}, \quad c_q = \frac{\mu}{\varepsilon \sqrt{\text{Re} \sigma}} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \quad (4.1)$$

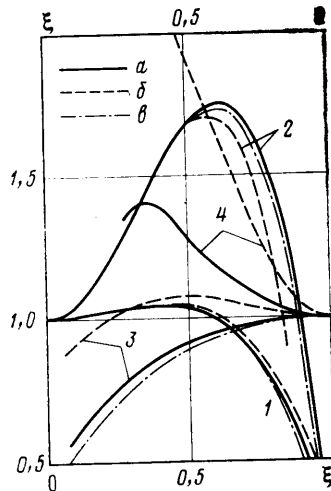
Как показали расчеты, наличие закрутки газа в набегающем потоке оказывает влияние не только на количественный, но и на качественный характер течения в вязком ударном слое. Это хорошо видно из фиг. 3, где приведены профили  $u$  (линии 1, 2) и  $w$  (линии 5, 6) в критической точке на непроницаемой поверхности поперек ударного слоя для различных значений параметра  $\Omega$  ( $\Omega = 10^{-5}$ , 2 – линии 1, 5 и 2, 6 соответственно) при  $\theta_w = 0,5$ ,  $\text{Re} = 5 \cdot 10^6$ . Здесь линии  $a$  – численное решение, линии  $b$  – асимптотическое решение внешней задачи в невязком ударном слое. По мере увеличения  $\Omega$  профиль  $u$  теряет свой монотонный характер и приобретает характерный максимум вблизи ударной волны. Наличие такого максимума объясняется сильным влиянием на течение в этой области центробежных сил, величина которых в данном месте ударного слоя становится значительной и не уравновешивается силами градиента давления. При фиксированном  $\Omega$  значение этого максимума растет с увеличением числа Рейнольдса и стремится к некоторому конечному пределу. Такое поведение решения хорошо согласуется с асимптотическим решением уравнений невязкого ударного слоя (2.8)–(2.9). По мере уменьшения  $\text{Re}$  влияние эффектов молекулярного переноса становится существенным во всей возмущенной области течения, величина максимума уменьшается, а начиная с некоторого  $\text{Re}^*$  он исчезает. В отличие от касательной составляющей вектора скорости в ударном слое влияние  $\Omega$  на профиль окружной скорости  $w$  поперек ударного слоя выражено гораздо слабее.

На фиг. 3 приведен пример сравнения численного (линия  $a$ ) и аналитического решения (3.5) (линия  $b$ ) для профилей  $u$  в критической точке





Фиг. 5



Фиг. 6

на непроницаемой поверхности при  $\theta_w=0,1$ ,  $\Omega=1,0$ ;  $\Omega_1=0$  для  $Re=5$  (линия 3) и 25 (линия 4). В целом проведенные расчеты позволяют сделать вывод о том, что аналитическое решение (3.5) имеет удовлетворительную точность при малых и умеренных числах Рейнольдса ( $K \lesssim 5$ ).

Если наряду с закруткой набегающего потока обтекаемое тело вращается, характер течения еще более усложняется. В этом случае при больших числах Рейнольдса вблизи поверхности тела профиль  $u$  может приобрести дополнительно два локальных экстремума: максимум и минимум, а профили окружной составляющей скорости имеют характерный минимум. Расчеты показали, что при  $Re \gg 1$  влияние вращения тела локализуется в пограничном слое около поверхности тела. Если же числа Рейнольдса относительно невелики ( $K=O(1)$ ), так что эффекты вязкости существенны во всем ударном слое, то локальные экстремумы в профилях  $u$  и вблизи поверхности исчезают, а минимум  $w$  растет по своей величине и смещается в центр ударного слоя.

Вдув газа в ударный слой может приводить к нелинейным эффектам взаимодействия с закруткой набегающего потока и вращением тела. Характерный пример зависимости структуры течения от параметра вдува приведен на фиг. 4, где изображены профили  $u$  (линия  $a$ ) и  $w$  (линия  $b$ ) поперек ударного слоя в критической точке при  $\theta_w=0,25$ ;  $\Omega=1,0$ ;  $\Omega_1=1,0$ ;  $Re=5 \cdot 10^3$  для различных значений  $(\rho v)_w$  ( $(\rho v)_w=0; 0,2; 0,8$  — линии 1–3). По мере увеличения вдува профиль  $u$  теряет свой монотонный характер и приобретает характерные экстремумы в слое смешения, который формируется между двумя невязкими слоями, прилегающими к поверхности тела и ударной волны.

Характерные зависимости коэффициентов трения  $c_x$  (линия  $a$ ) и теплообмена  $c_q$  (линия  $b$ ) на непроницаемой поверхности в критической точке от числа Рейнольдса при  $\theta_w=0,1$ ;  $\Omega_1=0$  для различных значений  $\Omega$  приведены на фиг. 5 ( $\Omega=0; 1,5; 2,1$  — линии 1–3). При прочих равных условиях и закрутка набегающего потока и вращение тела приводят к увеличению локального максимума для коэффициентов трения и теплообмена по сравнению со случаем  $\Omega=\Omega_1=0$ . При этом положение этого максимума практически не зависит от  $\Omega$  и  $\Omega_1$ , однако если увеличение  $\Omega_1$  приводит к росту  $c_x$  и  $c_q$  во всем диапазоне чисел Рейнольдса, то рост  $\Omega$  (при  $\Omega < \Omega_*$ ) приводит к увеличению  $c_x$  и  $c_q$  при  $\lg Re \lesssim 3,0$  и их уменьшению при  $\lg Re > 3,0$ . Расчеты показали, что увеличение  $\Omega$  приводит к тому, что выход  $c_x$  и  $c_q$  на их пограничные значения происходит при существенно больших значениях  $Re$  по сравнению со случаем  $\Omega=0$ . Например, для

$\Omega=1,8$  отличие  $c_x$  и  $c_q$  от соответствующих значений этих величин, вычисленных в рамках модели пограничного слоя, при  $Re=10^7$  составляло 30% и 25%. Такое различие связано с тем, что, как показывает анализ, величина  $du/d\xi$  на поверхности тела, подсчитанная из решения внешней задачи в невязком ударном слое, при  $\Omega \rightarrow \Omega_*$  стремится к бесконечности.

Таким образом, при достаточно интенсивных закрутках набегающего потока для правильного построения асимптотики уравнений ударного слоя при больших числах Рейнольдса следует учитывать вязко-невязкое взаимодействие, которое не учитывается при обычной постановке задачи в рамках теории пограничного слоя первого приближения.

На фиг. 6 приведены характерные зависимости относительного теплового потока  $c_q^\circ = c_q(\xi)/c_q(0)$  вдоль непроницаемой поверхности сферы при  $\theta_w=0,1$  для различных значений  $Re$ ,  $\Omega$  и  $\Omega_1$ . Здесь  $Re=500, 25, 10^4$  (линии  $a - e$ );  $\Omega=0, \Omega_1=1; 2$  (линии 1, 2);  $\Omega_1=0, \Omega=1; 2$  (линии 3, 4). При малых значениях  $\Omega$  и  $\Omega_1$  эффект закрутки слабо сказывается на распределении  $c_q^\circ$  вдоль поверхности сферы, однако по мере их роста наличие ненулевой составляющей вектора скорости газа в ударном слое в окружающем направлении приводит как к количественному, так и к качественному изменению характера  $c_q^\circ$ . В частности, закрутка набегающего потока приводит к более раннему отрыву пограничного слоя по сравнению со случаем обтекания сферы равномерным потоком, что объясняется возникновением в этом случае положительного градиента давления на поверхности тела. Отметим также, что вращение тела приводит к появлению на боковой поверхности сферы характерного максимума вблизи поверхности тела в профиле температуры поперек ударного слоя и смещению максимума теплового потока от критической точки в область  $\xi > 0$ . Ранее этот эффект в рамках модели пограничного слоя отмечался в [3].

Авторы благодарят Г. Г. Черного за полезное обсуждение результатов работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Smith R* Hypersonic swirling flow past blunt bodies. — *Aeronaut. Quart.*, 1973, v. 24, p. 241–251.
2. *Белянин Н. М., Шальман Е. Ю.* Ламинарный пограничный слой в закрученном потоке. — *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1976, № 1, с. 43–49.
3. *Пейгин С. В.* Ламинарный пограничный слой в закрученном потоке на проницаемой поверхности. — *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1985, № 6, с. 28–37.
4. *Sturek W. B., Schiff L. B.* Numerical simulation of steady supersonic flow over spinning bodies of revolution. — *AIAA Journal*, 1982, v. 20, № 12, p. 1724–1731.
5. *Kim M. D., Lewis C. H.* Computation of hypersonic laminar viscous flow over body with mass transfer and for spin at angle-of-attack. — *AIAA Pap.*, 1981, № 1044, 17 p.
6. *Марков А. А.* О влиянии вращения тела и внешней завихренности на теплообмен около критической точки затупленного тела в сверхзвуковом потоке. — *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1984, № 3, с. 179–182.
7. *Гершбейн Э. А., Юницкий С. А.* Исследование гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя в окрестности критической точки при наличии вдува или отсоса. — *ПММ*, 1979, т. 43, вып. 5, с. 817–828.
8. *Гершбейн Э. А.* Асимптотическое исследование задачи пространственного гиперзвукового обтекания вязким газом затупленных тел с проницаемой поверхностью. — В кн.: *Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений*. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 29–51.
9. *Гершбейн Э. А.* Теория гиперзвукового вязкого ударного слоя при больших числах Рейнольдса и при сильном вдуве инородных газов. — *ПММ*, 1974, т. 38, вып. 6, с. 1015–1024.
10. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
11. *Нейланд В. Я.* Вдувание газа в гиперзвуковой поток. — *Уч. зап. ЦАГИ*, 1972, т. 3, № 6, с. 29–40.
12. *Вигдорович И. И., Левин В. А.* Сверхзвуковое обтекание тел с интенсивным вдувом. М.: Изд-во МГУ, 1983. 34 с.
13. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
14. *Булах Б. М. О.* транзвуковом характере обтекания тупоносых тел гиперзвуковым потоком газа. — В кн.: *Транзвуковые течения газа*. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1964, с. 151–163.

15. *Klineberg J. M., Steger J. L.* On laminar boundary-layer separation.— AIAA Pap., 1974, № 94, 17 p.
16. *Черный Г. Г., Зубарев В. М.* Пограничный слой на движущейся поверхности. Неавтомодельные решения.— В кн.: Некоторые вопросы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 48–54.
17. *Гершбейн Э. А.* К теории пространственного обтекания затупленных тел гиперзвуковым потоком вязкого газа при наличии вдува.— В кн.: Некоторые вопросы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 144–156.
18. *Брыкина И. Г.* Интегрирование уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя методом последовательных приближений.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1978, т. 18, № 1, с. 154–166.
19. *Гершбейн Э. А., Щелин В. С., Юницкий С. А.* Численные и приближенные аналитические решения уравнений гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя при умеренно малых числах Рейнольдса.— В кн.: Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 72–92.
20. *Петухов И. В.* Численный расчет двумерных течений в пограничном слое.— В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964, с. 304–325.

Москва  
Томск

Поступила в редакцию  
5.XII.1985