

УДК 532.516+541.24

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ В ГИПЕРЗВУКОВЫХ СОПЛАХ
В РАМКАХ УПРОЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА**

МУЧНАЯ М. И.

Упрощенные уравнения Навье — Стокса нашли применение как альтернатива полным уравнениям Навье — Стокса для моделирования течений вязкого газа в областях большой протяженности, когда существует преимущественное направление потока [1—4]. В данной работе на основе этой модели исследуются течения в соплах аэродинамических труб. Проведены расчеты течений в конических и профилированных осесимметричных гиперзвуковых соплах в широком диапазоне чисел Маха и Рейнольдса. Получено хорошее согласие с экспериментом. Выявлена значительная роль вязко-невязкого взаимодействия в соплах на большие гиперзвуковые числа Маха.

Кратко остановимся на постановке задачи, которая подробно приведена в [5]. Система уравнений выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial(r^v \rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(r^v \rho v)}{\partial r} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^v \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{4}{3} \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^v \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

$$\rho u c_{pa} \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_{pa} \frac{\partial T}{\partial r} = u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial r} +$$

$$+ \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^v \lambda_a \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - \rho w_k$$

$$\rho u c_{vk} \frac{\partial T_k}{\partial x} + \rho v c_{vk} \frac{\partial T_k}{\partial r} = \rho w_k + \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^v \lambda_k \frac{\partial T_k}{\partial r} \right)$$

$$p = \rho RT, \quad w_k = \frac{E_k(T) - E_k(T_k)}{\tau(p, T)}, \quad E_k(T_k) = \int_0^{T_k} c_{vk} dT_k$$

Система содержит в себе все члены уравнений Эйлера и Прандтля и описывает поле течения в сопле целиком, т. е. невязкое ядро и пограничный слой в их развитии и взаимодействии.

Здесь в рамках теории двухтемпературной релаксации учитывается колебательная неравновесность, которая проявляется при высоких температурах торможения. Эти уравнения позволяют описывать течение однокомпонентного газа, каким является азот, а также, с достаточной точностью, воздуха с использованием при этом релаксационных свойств азота. Добавив сюда нерелаксирующие гелий и аргон, получим полный набор газов, применяющихся в высокоэнтальпийных гиперзвуковых установках.

Обозначения в уравнениях общеприняты: u и v — продольная и поперечная компоненты скорости, ρ — плотность, p — давление, T и T_k — поступательная и колеба-

тельная температуры, $E_k(T_k)$ — колебательная энергия, $E_k(T)$ — колебательная энергия, соответствующая термодинамическому равновесию, τ — время колебательной релаксации, w_k — скорость колебательной релаксации, μ — коэффициент динамической вязкости, λ — коэффициент теплопроводности, c_p и c_v — удельные теплоемкости при постоянном давлении и при постоянном объеме, R — газовая постоянная. Индекс k относится к колебательным степеням свободы, индекс a — к активным, т. е. поступательным и вращательным. Параметр ν равен нулю в плоском случае и единице в осесимметричном. Координата x направлена вдоль оси сопла, координата r — перпендикулярно к ней.

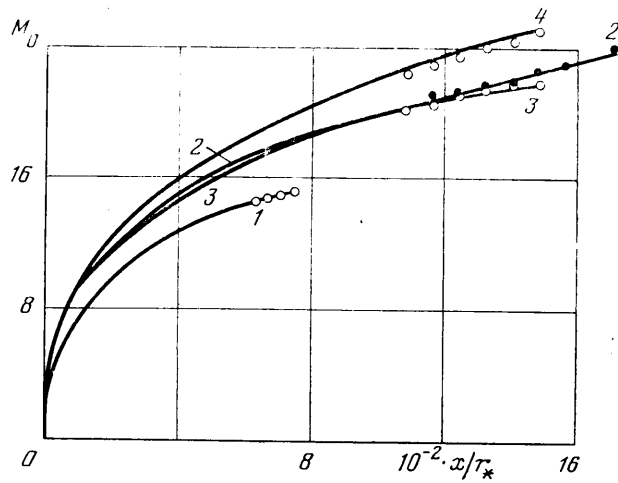
В начальном сечении задаются профили искомых величин u , v , T , T_k , ρ . Граничные условия таковы: на оси задаются условия симметрии, на стенке — условия скольжения для скорости и скачка температуры, стенка считается каталитической.

Задача решается маршевым методом и для регуляризации используется метод «подслойной аппроксимации» [1], заключающийся в вычислении $\partial p/\partial x$ за пределами дозвуковой области. Такой подход требует, чтобы в большей части области течения было сверхзвуковым. Поэтому начальное сечение выбирается в расширяющейся части сопла. Околокритическая часть сопла для получения начальных условий рассчитывается каким-либо иным методом, в данном случае с помощью уравнений «узкого канала» [6]. Они являются более сильным упрощением уравнений Навье — Стокса и отличаются от приведенной системы тем, что второе уравнение движения сводится к равенству $\partial p/\partial r=0$, и задача Коши для них всегда корректна. Для численного решения упрощенных уравнений Навье — Стокса используется неявный конечно-разностный метод. Счет ведется на сетке, сгущающейся к стенке.

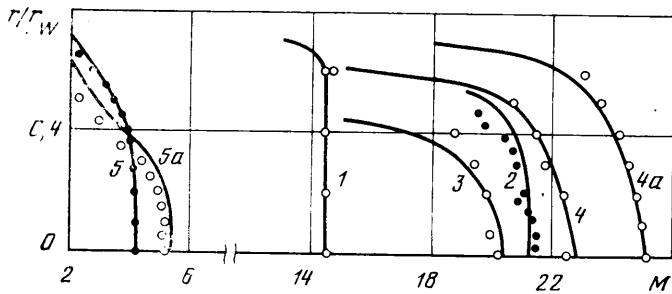
В этой постановке проведены исследования течений в гиперзвуковых соплах аэродинамических установок, для которых передача возмущений вверх по потоку пренебрежимо мала. Расчеты выполнены в диапазоне характерных чисел Рейнольдса $10^3 \leq Re_0 \leq 10^7$, где Re_0 определяется по параметрам газа в форкамере и по радиусу критического сечения сопла: $Re_0 = \rho_0 r_* \sqrt{2c_p T_0} \mu_0^{-1}$. Длина рассчитываемых сопел составляла от нескольких десятков до тысячи и больше радиусов критического сечения. Соответственно числа Маха на выходе реализовывались от 5 до 20 и выше. Рассчитывались течения в конических и профилированных соплах, максимальный угол полураскрытия достигал 22° . Ниже приводятся основные результаты расчетов.

На фиг. 1 представлены рассчитанные и полученные в эксперименте распределения числа Маха на оси трех конических сопел. Цифра 1 относится к соплу с углом полураскрытия $\theta=6^\circ$, давлением в форкамере $p_0=100$ атм и числом Рейнольдса $Re_0=10^6$. Экспериментальные данные получены на установке Т-326 ИТПМ СО АН СССР и любезно предоставлены автору Г. П. Клеменковым. Цифра 2 относится к соплу с $\theta=9^\circ$, $p_0=123$ атм, $Re_0=7 \cdot 10^5$. Экспериментальные данные для этого варианта получены на установке Т-327 ИТПМ и приведены в [7]. Цифры 3 и 4 относятся к соплу с $\theta=10^\circ$, экспериментальные данные взяты из [8]. Цифрой 3 обозначен вариант с $p_0=50$ атм, $Re_0=2,5 \cdot 10^6$, 4 — вариант с $p_0=192$ атм, $Re_0=10^6$. Первые по движению вдоль оси экспериментальные точки получены на выходе из сопла, остальные — в рабочей части установок. Видно, что совпадение расчета с экспериментом хорошее, максимальное различие составляет 1–2%.

На фиг. 2 те же обозначения используются для профилей числа Маха на срезах соответствующих сопел; 4а относится к профилю M в последнем измеряемом сечении рабочей части для варианта 4; 5 и 5а введены для профилей числа Маха в коническом сопле с $\theta=22^\circ$, $p_0=0,005$ атм, $Re_0=10^3$ [9] в двух сечениях $x/r_*=11,1$ и 23,3, где второе сечение соответствует выходу из сопла; r_* — радиус критического сечения, r_w на графике — радиус выходного сечения. Сопоставление расчетных и экспериментальных результатов на фиг. 2 показывает их хорошее согласие в ядре течения. Различие наблюдается на краю ядра, причем тем больше, чем ниже давление торможения. Это различие можно объяснить тем, что при получении экспериментального значения числа Маха его пересчитывают с замедленного давления торможения за прямым скачком в предположении отсутствия вязкости. Из расчетов, однако, следует, что на крайних от оси



Фиг. 1



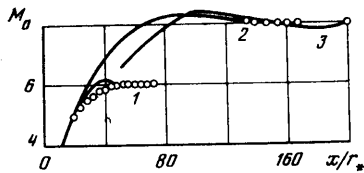
Фиг. 2

участках измерений влияние вязкости существенное и оно тем больше, чем меньше давление торможения.

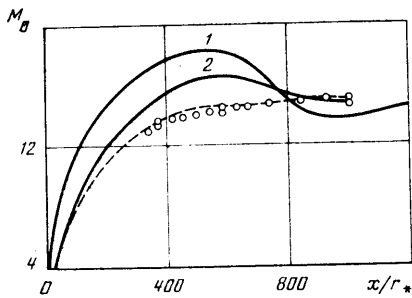
Приведенные на фиг. 1 и 2 результаты показывают, что упрощенные уравнения Навье — Стокса адекватно моделируют течение в гиперзвуковых соплах, по крайней мере в ядре течения, в котором производятся измерения.

Из анализа этих результатов можно сделать следующие выводы. Во-первых, чем больше давление торможения, тем больше размер ядра. Во-вторых, течение в ядре носит радиальный характер, причем чем меньше угол полураствора конуса θ , тем слабее выражена радиальность течения. В сопле с $\theta = 6^\circ$ (кривая 1) течение в ядре на выходе практически одномерное. В-третьих, течение в рабочей части трубы продолжает расширяться и размеры ядра увеличиваются. Это видно из сравнения кривых 4 и 4a для среза сопла и сечения в рабочей части гиперзвуковой трубы по данным [8], где рабочая часть представляет собой цилиндр с радиусом, равным радиусу выходного сечения сопла. При переходе в рабочую часть давление, повышаясь у стенки, продолжает падать в ядре течения. Ускоряющийся в ядре поток прижимает к стенке пограничный слой, толщина которого начинает уменьшаться, и ядро увеличивается. На стыке сопла с рабочей частью образуется косой скачок, который данная модель ухватывает в «размазанном» виде. Скачок идет под достаточно малым углом к стенке и не затрагивает ядра течения. Течение в гиперзвуковом ядре в рабочей части продолжает развиваться, как в коническом сопле, не реагируя на изменение геометрии контура.

Одно из основных требований, предъявляемых экспериментаторами к гиперзвуковым соплам, — обеспечение равномерного потока в рабочей



Фиг. 3



Фиг. 4

части трубы, т. е. получение близкого к одномерному ядра потока на срезе сопла с минимальным продольным градиентом числа Маха. Из рассмотренных выше конических сопел этому требованию удовлетворяет только сопло с углом полураствора $\theta=6^\circ$. Нарастающий на стенках этого сопла пограничный слой формирует течение в невязком ядре, близкое к одномерному; относительный рост числа Маха на расстоянии последних 200 радиусов критического сечения составляет 5%. Эта же величина для длинных конических сопел с $\theta=10$ и 9° достигает 10%, причем на выходе реализуется радиальное течение в невязком ядре.

Для преодоления указанного недостатка конических сопел конструируют профилированные сопла. Рассмотрим результаты расчетов течений в нескольких профилированных соплах. На фиг. 3 приведены расчетные и экспериментальные распределения числа Маха на оси сопел: 1 — сопло [10] с максимальным углом полураствора $\theta_{\max}=20^\circ$ при $Re_0=4 \cdot 10^4$ и безразмерной температуре стенки (или температурном факторе) $T_w/T_0=0,64$; 2 — сопло [11] с $\theta_{\max}=19^\circ$, $Re_0=10^4$, $T_w/T_0=1$; 3 — сопло, работающее на установке Т-326 ИТГИМ с $\theta_{\max}=9,5^\circ$, $Re_0=10^7$, $T_w/T_0=0,45$. Геометрия стенки и экспериментальные данные на срезе для сопла 3 предоставлены автору Г. П. Клеменковым. Отметим, что при $Re_0=10^7$ пограничный слой в сопле должен быть турбулентным, что учитывалось в расчете путем введения эффективной вязкости.

Из графика видно, что рассчитанные числа Маха на оси почти всюду совпадают с экспериментальными. То же можно сказать и о поперечном распределении числа Маха на срезе этих сопел. Для всех трех расчетов получилась идентичная картина течения. В начальном участке сопла происходит небольшое перерасширение потока. Ему соответствует сравнительно медленный рост толщины вытеснения и радиальное течение в ядре. Число Маха на оси достигает максимума, после чего толщина вытеснения растет быстрее, давление на оси начинает повышаться. Далее число Маха на оси несколько падает и практически остается постоянным до выходного сечения, а течение в ядре приближается к одномерному.

Геометрия данных сопел была получена на основе решения обратной задачи, когда рассчитанный изэнтропический контур с заданными параметрами течения подправляется с учетом влияния вязкости. Обычно к изэнтропическому контуру добавляется толщина вытеснения пограничного слоя, как сделано, например, для сопел 1 и 3. Контур сопла 2 получен путем надстраивания пограничного слоя с одновременной корректировкой изэнтропического контура по методу [12]. Но во всех случаях решение прямой задачи, т. е. расчет течения в заданном контуре, показало отклонения от равномерного распределения числа Маха, которое закладывалось в расчет в обратной задаче. Это результат того, что в традиционном подходе с поправкой на толщину вытеснения не учитывается взаимное влияние изэнтропического ядра и пограничного слоя. По-видимому, есть какие-то недостатки и в реализации метода [12]. Но в этих сравнительно недлинных соплах, рассчитанных на умеренные гиперзвуковые

числа Маха, отклонение параметров от расчетных невелико и традиционный подход к решению обратной задачи вполне приемлем. Важную роль в реализации течения, близкого к равномерному, играет тот факт, что температуры торможения в недлинных соплах невысоки и величина температурного фактора порядка единицы. Это способствует быстрому нарастанию пограничного слоя, который стабилизирует невязкое ядро.

Иная картина наблюдается в длинных профилированных соплах, спроектированных на основе решения обратной задачи для получения течения с большим гиперзвуковым числом Маха. На фиг. 4 приведены распределения числа Маха вдоль оси для двух сопел: 1 — $\theta_{\max}=18^\circ$, $p_0=100$ атм, $T_0=1800$ К, $T_w/T_0=0,16$, $Re_0=6 \cdot 10^5$; 2 — $\theta_{\max}=11^\circ$, $p_0=43$ атм, $T_0=1650$ К, $T_w/T_0=0,176$, $Re_0=4 \cdot 10^5$. Первое сопло имеется на установке Т-326 ИТНМ, данные по второму соплу приведены в [13]. Оба сопла были спроектированы на получение равномерного потока с числом $M=15$.

В обоих расчетах получено значительное перерасширение потока на оси, которое носит качественно такой же характер, как в рассмотренных выше недлинных соплах. Но количественные соотношения здесь другие. В первом сопле в сечении $x/r_* = 550$ число Маха M_0 вырастает до значения 18,3, потом идет спад до 13,8 при $x/r_* = 950$ и постепенный рост до 14,6 на выходе. Во втором сопле M_0 достигает максимума 16,5 при $x/r_* = 600$, после чего начинает падать и на выходе достигает значения 14,9. В начальном участке сопел формируется радиальное течение. Когда угол наклона контура сопла начинает уменьшаться, на течения в ядре это не сразу сказывается: поток в нем продолжает расширяться и разгоняться, поджимая пограничный слой, — происходит то же самое, что и при переходе из конического сопла в цилиндрическую рабочую часть трубы. При постепенном уменьшении угла наклона стенки начинает тормозиться сначала внешняя, прилегающая к пограничному слою часть невязкого ядра. Затем это торможение распространяется постепенно к оси, а поток в приосевой части ядра все еще продолжает разгоняться. И лишь на значительном расстоянии ниже по течению происходит торможение потока на оси, причем течение в ядре к этому времени существенно отличается от равномерного.

Перерасширение потока в ядре тем сильнее, чем больше максимальный угол раскрытия сопла. А последующее торможение тем сильнее, чем быстрее уменьшается угол наклона, т. е. чем больше продольная кривизна контура. Кроме того, на величину перерасширения влияет температурный фактор. Чем меньше относительная температура стенки, тем медленнее нарастает пограничный слой, тем больше инерции набирает невязкое ядро и тем сильнее оно «ударяется» о профилированную стенку.

В том же сопле можно получить достаточно равномерное течение, специальным образом задав температуру стенки. Для сопла 2 в численных экспериментах было найдено значение температуры стенки в виде отрезков трех прямых, при этом $T_w/T_0=1; 0,3$ и $0,176$ соответственно при $x/r_* = 0; 250$ и ≥ 500 . В этих условиях реализуется монотонное, малоградиентное на выходе распределение числа Маха вдоль оси (штриховая линия на фиг. 4). На фиг. 4 нанесены также экспериментальные точки, полученные для рассматриваемого сопла при испытании в ударной трубе. Время работы такой трубы измеряется миллисекундами, поэтому не используется охлаждение стенки, как это принято в высокоэнтальпийных установках длительного действия. Возможно, что температура газа на стенке в этом эксперименте отличается от комнатной, которая закладывалась в расчет при решении обратной задачи. Это соображение объясняет согласие экспериментальных данных с результатами расчета при задании непостоянной температуры стенки. Таким образом, расчеты показали, что температурный фактор влияет не только на величину невязкого ядра, но и на все течение в нем. Поэтому течение в одном и том же сопле при одних и тех же параметрах торможения может оказаться различным в уста-

повках кратковременного и длительного действия с охлаждаемой стенкой.

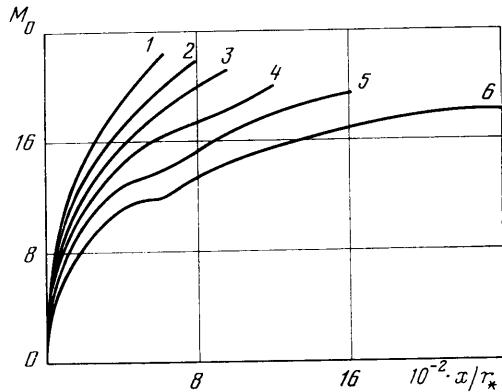
Из разобранных примеров следует, что при решении обратной задачи использование модели «изэнтропический контур плюс толщина вытеснения», удовлетворительно работающей для умеренных гиперзвуковых чисел Маха, неприемлемо для расчетов контуров на большие гиперзвуковые числа Маха. В первом случае вязко-невязкое взаимодействие является слабым и им можно пренебречь. В случае длинных гиперзвуковых сопел имеется сильное вязко-невязкое взаимодействие, определяющее всю картину течения. По-видимому, здесь заслуживает внимания метод [12], нашедший продолжение в [14].

С помощью модели упрощенных уравнений Навье — Стокса проводились некоторые параметрические расчеты, в которые закладывалась различная геометрия контура. Удалось подобрать контуры, которые обеспечивали безградиентное вдоль оси на выходе течение с большим гиперзвуковым числом Маха. Однако однородность течения в ядре и его размеры нельзя признать удовлетворительными. Кроме того, стало понятно, что существенного уменьшения длины по сравнению с коническим соплом профилирование не дает. В укороченном сопле больше продольная кривизна, а значит, и больше возможность перерасширения потока.

На данном этапе численных исследований профилированным соплам можно предложить альтернативу. При обсуждении результатов расчетов течений в конических соплах было отмечено, что сопло с углом полураствора в 6° обеспечивает поток на выходе хорошего качества. Была проведена серия расчетов для группы из шести конических сопел с одинаковым радиусом критического сечения $r_* = 0,625$ мм и одинаковым радиусом выходного сечения $r_w = 110$ мм. Углы полураствора конусов равны $15, 12, 10, 8, 6$ и 4° . Определяющие параметры течения одинаковы: $p_0 = 150$ атм, $T_0 = 1500$ К, $T_w = 300$ К, $Re_0 = 7,4 \cdot 10^5$. Полученные в расчетах распределения числа Маха вдоль оси приведены на фиг. 5. Цифры 1–6 обозначают номер сопла в порядке уменьшения угла наклона контура. Графики демонстрируют естественное профилирующее влияние пограничного слоя, нарастающего на стенках конического сопла. По мере уменьшения угла раствора конуса число Маха на оси на срезе сопла становится меньше, но и продольный градиент тоже падает; при этом размеры ядра уменьшаются, но течение в нем выравнивается. Расчеты показывают, что оптимальными в смысле равномерности течения на выходе и обеспечения достаточных для эксперимента размеров ядра являются сопла с углом полураствора конуса в $4-8^\circ$.

Заметим, что вязко-невязкое взаимодействие может привести к неравномерностям потока и в коническом сопле. На фиг. 5 видно, что чем меньше угол конуса, тем заметнее неравномерности на оси и тем ближе к критическому сечению они начинают проявляться.

Излагаемое здесь представление о характере течения в гиперзвуковых соплах сложилось в результате неоднократных обсуждений результатов расчетов с коллегами по работе: В. Н. Ветлущим, В. Л. Ганимедовым, Г. П. Клеменковым, Ю. Г. Коробейниковым и В. И. Пинчуковым, за что автор глубоко благодарен им.



Фиг. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lin T. C., Rubin S. G.* Viscous flow over a cone at moderate incidence. 1. Hypersonic tip region.— *Computers and Fluids*. 1973, v. 1, № 1, p. 37–57.
2. *Li C. P.* A computational procedure for supersonic flows governed by the parabolic Navier – Stokes equations.— *J. Comput. Phys.*, 1980, v. 35, № 3, p. 356–380.
3. *Ковеня В. М., Черный С. Г.* Решение упрощенных уравнений вязкого газа маршевым методом.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1979, т. 10, № 1, с. 71–87.
4. *Войнович П. А., Фурсенко А. А.* Метод глобальных итераций для расчета смешанных течений вязкого газа.— *Дифференциальные уравнения*, 1984, т. 20, № 7, с. 1151–1156.
5. *Мучная М. И.* Использование упрощенных уравнений Навье – Стокса для расчета вязкого течения в гиперзвуковом сопле. Препринт № 17. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1981, 22 с.
6. *Мучная М. И.* Расчет течения вязкого газа в гиперзвуковом сопле с учетом колебательной неравновесности.— *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1979, № 1, с. 165–168.
7. *Друкер И. Г., Жак В. Д., Сапогов Б. А., Сафронов Ю. А.* Характеристики гиперзвуковой азотной трубы ИТПМ СО АН.— В кн.: Вопросы газодинамики (Аэрофиз. исслед., вып. 5). Новосибирск, 1975, с. 294–295.
8. *Körpenwallner G.* Der Hypersonische Vakuumwindkanal der Aerodynamischen Versuchsanstalt. Göttingen DGRR/WGLR – Jahrestagung Bad Godesberg, 1966, X, № 66–113.
9. *Евсеев Г. А.* Экспериментальное исследование течения разреженного газа.— *Изв. АН СССР. Механика*, 1965, № 3, с. 165–172.
10. *Кудрявцева Л. И., Межиров И. И., Пономарев С. П., Якушева В. Л.* Экспериментальное исследование осесимметричных профилированных сверхзвуковых сопел при малых числах Re.— *Уч. зап. ЦАГИ*, 1973, т. 4, № 3, с. 123–126.
11. *Липин А. В., Титов В. А.* Экспериментальное исследование сверхзвуковых профилированных осесимметричных сопел.— В кн.: Тр. 4-й Всесоюзн. конф. по динамике разреженного газа и молекулярной газовой динамике. М., 1977, с. 711–717.
12. *Михайлов В. В.* Метод расчета сверхзвуковых сопел с учетом влияния вязкости.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1969, № 1, с. 69–72.
13. *Межиров И. И.* Исследование течений в гиперзвуковых соплах аэродинамических труб.— *Тр. ЦАГИ*, 1981, вып. 2119, 60 с.
14. *Денисенко О. В.* Метод расчета сверхзвуковых сопел при сильном влиянии вязкости.— *Уч. зап. ЦАГИ*, 1982, т. 13, № 4, с. 71–80.

Новосибирск

Поступила в редакцию
28.XII.1985