

На фиг. 1 показана эволюция равновесной формы при добавлении жидкости; $a - \delta=1, \alpha=45^\circ$, $b - \delta=5, \alpha=45^\circ$, $c - \delta=1, \alpha=90^\circ$, $d - \delta=5, \alpha=90^\circ$; кривые I-II соответствуют значениям $v=0,01; 0,05; 0,07; 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 0,6; 0,8; 0,9; 0,95$; ось симметрии z расположена слева от рисунков. Фигура 2 описывает смещение средней точки смачиваемого участка меридиана тора $\tau_m=(\tau_0+\tau_1)/2$ при изменении v , где кривая I соответствует $\alpha=45^\circ$, 2 - 90° , 3 - 135° , сплошные линии - $\delta=1$, штриховые - $\delta=5$. При малых v жидкость примыкает к стенке на промежутке $0 < \tau < \tau_1$, близком к оси z . Рост v приводит к довольно сложным перемещениям смачиваемой дуги меридиана. Однако существует критический объем, при достижении которого наблюдается натекание жидкости на удаленный от оси участок $\tau < \tau < 2\tau_1$. При $\delta=5$ это происходит в виде резкого поворота равновесной линии на угол более 90° , в то время как в предельном случае $\delta=1$ процесс натекания осуществляется постепенно и не столь радикально. По мере увеличения угла смачивания α величина критического объема растет.

В пользу достоверности полученных результатов свидетельствует то, что они удовлетворяют принципу двойственности [1].

Проведенное исследование оставляет открытым вопрос о влиянии несесимметричных возмущений на равновесную форму. Возможно, для его решения окажется полезным применить итерационно-разностный подход к задаче равновесия в несесимметричной постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюнцов А. Д. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
2. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюнцов А. Д. Гидромеханика невесомости: некоторые нерешенные проблемы. - В кн.: Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости. М.: Наука, 1982, с. 53-59.
3. Берковский Б. М., Полевилов В. К. О численном моделировании разрушения односвязных осесимметричных форм магнитной жидкости. - Магнит. гидродинамика, 1983, № 4, с. 60-66.
4. Полевилов В. К. Итерационно-разностный метод расчета равновесных форм свободной поверхности жидкости. - В кн.: 3-й Всесоюз. семинар по гидромеханике и тепломассообмену в невесомости. Тез. докл. Черногоровка, 1984, с. 100-103.
5. Полевилов В. К., Денисенко В. М. Численное исследование равновесных форм капли, вращающейся в гравитационном поле. - Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1, Физика, математика и механика, 1985, № 2, с. 37-41.

Минск

Поступила в редакцию
17.X.1985

УДК 532.517.4

ПРЕДЕЛЬНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ В ТЕОРИИ ЗАКРУЧЕННЫХ СТРУЙ

КОРОБКО В. И., ШАШМИН В. К., ШУЛЬМАН З. П.

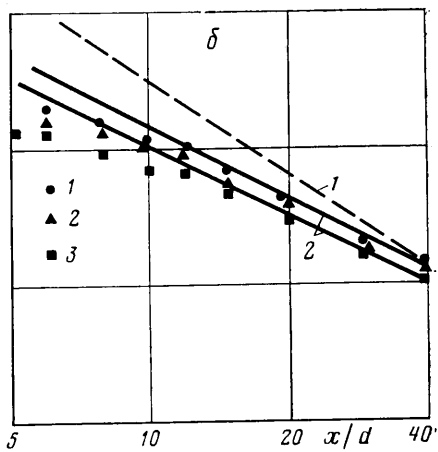
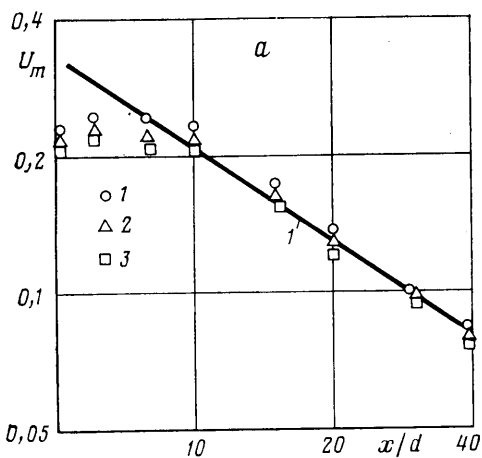
Закрученные струи вязкой несжимаемой жидкости характеризуются двумя интегральными характеристиками - количеством движения K и моментом количества движения L [1]. Параметр течения $\Omega=L/(KR)$ (R - радиус сопла) определяет законы изменения гидродинамических характеристик струи. На основе уравнений пограничного слоя при $\Omega \ll 1$ в предположении более быстрого убывания в сечении струи тангенциальной составляющей скорости w по сравнению с радиальной скоростью v в [1] определены предельные автомодельные решения для $w \sim x^{-2}$ и давления $P \sim x^{-4}$. При $\Omega \ll 1$ параметры струи определяются количеством движения K , поэтому выражение для осевой скорости u , полученное ранее [2], соответствует осесимметричной незакрученной струе. При замене молекулярной вязкости ν на турбулентную $\epsilon = \text{const}$, построенное решение применимо для турбулентной закрученной струи в области слабой закрутки ($\Omega \ll 1$).

Для осесимметричной слабозакрученной струи ($\Omega \ll 1$) в спутном потоке получены следующие приближенно автомодельные законы [3] (они выполняются в области течения $u \ll u_\infty$):

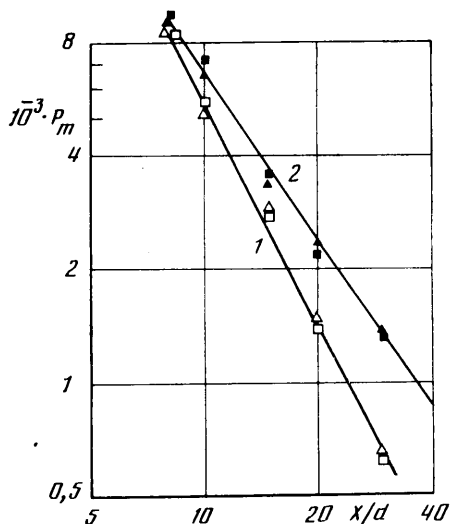
$$l \sim x^{1/2}, \quad u \sim x^{-3/2}, \quad w \sim x^{-1}, \quad P \sim x^{-2}$$

где l - ширина струи, u - осевая составляющая скорости, w - тангенциальная составляющая скорости (закрутка), P - избыточное давление в струе.

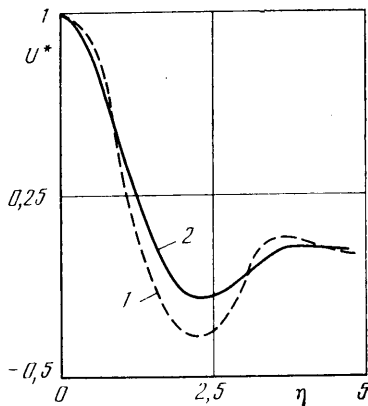
Для расчета турбулентных закрученных струй в области течения $\Omega \ll 1$ разработаны интегральные методы [4]. Экспериментальные исследования [5] закрученных струй при умеренной и сильной закрутке показали, что законы изменения характеристик течения отличаются от теоретических результатов [1, 3], полученных для слабой закрутки. В публикуемой работе рассмотрены предельные автомодель-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ные законы для закрученных струй при $\Omega \gg 1$ и получены распределение скорости и давления в сечениях струй.

1. Закрученная струя в спутном потоке. Рассмотрим область течения $u \ll u_\infty$, $\Omega \gg 1$, где параметры струи определяются моментом количества движения L . Предельные автомодельные законы имеют вид [6]

$$l \sim x^{1/2}, \quad u \sim x^{-1/2}, \quad w \sim x^{-3/4}, \quad P \sim x^{-3/2} \quad (1.1)$$

Влияние момента количества движения L замедлило темп расширения струи и падения скорости. На фиг. 1 и 2 представлены изменения осевой скорости $u_m = (u - u_\infty)/u_0$ и давления $P_m = 2(P - P_\infty)/\rho u_0^2$ вдоль оси исследованных струй. Закрученные струи формировались шнековыми завихрителями, диаметр сопла $d = 10,5$ мм. Сопла с завихрителем размещались в рабочей части аэродинамической трубы ($D = 1000$ мм). Измерения проводились шаровым зондом с диаметром головки 4 мм. Исследовались закрученные струи при постоянной среднерасходовой скорости истечения из сопла $u_0 = 74$ м/с и трех значениях спутности потока ($1-3 - u_\infty = 10, 15$ и 19 м/с). На фиг. 1, а и 2 (линия 1) прямые линии соответствуют предельным автомодельным законам слабозакрученных струй ($\Omega = L/KR < 1$) для скорости $u \sim x^{-1/2}$ и давления $P \sim x^{-2}$, точки отвечают результатам измерений ($1-3 - \Omega = 0,65, 0,66$ и $0,67$). На фиг. 1, б и 2 (линия 2) прямыми линиями показаны предельные автомодельные законы сильнозакрученных струй ($\Omega > 1$) для скорости $u \sim x^{-3/2}$ и давления $P \sim x^{-3/2}$ ($1-3 - \Omega = 1,11; 1,14$ и $1,19$). Штриховой линией на фиг. 1, б нанесен закон изменения скорости при $\Omega \ll 1$. Из фиг. 1, 2 видно, что изменение параметра течения Ω

повлияло на законы затухания характеристик струи далеко вниз по потоку. Закрутка затухает быстрее, чем осевая скорость, поэтому предельные законы, справедливые для $\Omega \gg 1$, должны переходить в предельные законы для $\Omega \ll 1$

$$l \sim x^{1/2} \Rightarrow x^{1/2}, \quad u \sim x^{-1/2} \Rightarrow x^{-1/2}, \quad w \sim x^{-3/2} \Rightarrow x^{-1}, \quad P \sim x^{-3/2} \Rightarrow x^{-2} \quad (1.2)$$

Рассмотрим распределение в сечении струи составляющих скорости и давления при $\Omega \gg 1$. Для закрученных течений в предположении локального баланса между порождением и диссипацией турбулентной энергии формула Прандтля для турбулентной вязкости примет вид [7]

$$\tau_{xr} = \varepsilon \rho \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \tau_{r\theta} = \varepsilon \rho r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{r} \right), \quad \varepsilon = l_1^2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{r} \right) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (1.3)$$

Уравнение движения [5] для закрученной струи в спутном потоке и соответствующие граничные и интегральные условия запишем в виде

$$\begin{aligned} (u_\infty + u) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xr}}{\partial r} + \frac{\tau_{xr}}{r} \right) \\ (u_\infty + u) \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{vw}{r} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial r} &= \rho \frac{w^2}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (ru) + \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial r} = v = w = 0 \quad (r=0); \quad u \rightarrow 0, \quad P \rightarrow 0, \quad w \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \quad (1.5)$$

$$2\pi\rho \int_0^\infty \left(u_\infty(u - u_\infty) + \frac{P}{\rho} \right) r dr = K, \quad 2\pi\rho \int_0^\infty (u - u_\infty) w r^2 dr = L$$

В автомодельных переменных $X=x$, $\eta=r x^{-1/2}$ задача (1.3)–(1.5) имеет следующее решение для параметров струи

$$\begin{aligned} u &= \alpha \exp\left(-\frac{1}{8}\eta^2\right) X^{-1/2}, \quad w = \gamma\eta \exp\left(-\frac{1}{8}\eta^2\right) X^{-3/2}, \\ \frac{P}{\rho} &= -2\gamma^2 \exp\left(-\frac{1}{4}\eta^2\right) X^{-3/2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Постоянные α , γ определяются из интегральных условий (1.5), а влияние давления на профиль скорости можно проанализировать методом возмущений [8]. Построение обобщенного автомодельного решения, справедливого во всей области изменения Ω и переходящего в предельные автомодельные решения при $\Omega \ll 1$ и $\Omega \gg 1$ (формулы (1.2)), позволит оценить протяженность зоны влияния Ω на характеристики течения.

2. Для закрученной струи в спутном потоке с избыточным количеством движения $K=0$ возможно существование такого режима течения, что во всей области течения характеристики струи определяются моментом количества движения L . Рассмотрим это на примере ламинарной струи. Имеем

$$\begin{aligned} (u_\infty + u) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ (u_\infty + u) \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{vw}{r} &= v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial r} &= \rho \frac{w^2}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (ru) + \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Граничные и интегральные условия имеют вид (1.5), только $K=0$. Автомодельные переменные и решения, удовлетворяющие граничным и интегральным условиям, находятся методом [9]

$$X=x, \quad \eta=r(vx/u_\infty)^{-1/2}, \quad w = u_\infty \gamma \eta \exp\left(-\frac{1}{4}\eta^2\right) X^{-3/2}$$

$$P = \rho u_\infty^2 \gamma^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \eta^2\right) X^{-3}, \quad u = \frac{1}{4} u_\infty \gamma^2 (f_1(\eta) \ln X + f_2(\eta)) X^{-3} \quad (2.2)$$

$$f_1(\eta) = \left(4 - 2\eta^2 + \frac{1}{4} \eta^4\right) \exp\left(-\frac{1}{8} \eta^2\right),$$

$$f_2(\eta) = \beta f_1(\eta) + f_1(\eta) \int_0^{\frac{1}{2}\eta^2} \frac{e^{-t}-1}{2t} dt - \left(1 - \frac{1}{4} \eta^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \eta^2\right) - (6 - \eta^2) \exp\left(-\frac{1}{4} \eta^2\right)$$

Здесь γ , β — постоянные, значение γ определяется из интегрального условия постоянства момента количества движения, а β — из решения уравнения для следующего приближения. На фиг. 3 представлено изменение избыточной скорости $u^* = (u_\infty - u)/(u_\infty - u_m)$ при $x/d = 20$ и 30 (кривые 1 и 2). Для осевой скорости характерно появление второй области положительного избытка скорости в сечении струи. Экспериментальные исследования [10] турбулентной закрученной струи, формируемой винтом, показали аналогичный вид профиля осевой скорости. Профиль скорости непрерывно деформируется от сечения к сечению струи [10], что также характерно для ламинарной струи (формула (2.2)). Для турбулентной закрученной струи [10] структура профиля скорости определяется уже не величиной центробежных сил, уравновешенных радиальным перепадом давления, а величиной нормальных напряжений, возникающих в таких течениях, т. е. анизотропией турбулентной вязкости. Следовательно, анализ турбулентного течения не возможен при помощи модели Прандтля и необходимо привлечение моментных уравнений для турбулентных напряжений.

3. Для турбулентной затопленной струи в области $\Omega \gg 1$ получим предельные автомодельные законы, используя идеи [6]. При $\Omega = L/KH \gg 1$ развитие закрученной струи определяется моментом количества движения L , а количество движения K не играет существенной роли. Из теории размерности получили: $L/(\rho w^2 x^3) = f(\Omega)$, т. е. $w \sim x^{-3/2}$. Из условия сохранения количества движения K , момента количества движения L , избыточного теплосодержания Q и уравнения для давления P следует:

$$l \sim x^{3/4}, \quad u \sim x^{-3/4}, \quad P \sim x^{-3}, \quad \Delta T \sim x^{-3/4}, \quad w \sim x^{-3/2} \quad (3.1)$$

Тангенциальная составляющая скорости затухает быстрее осевой, и параметр течения Ω будет уменьшаться вниз по потоку. Законы изменения характеристик струи (3.1) непрерывно трансформируются в законы, справедливые для слабозакрученной области ($\Omega \ll 1$)

$$l \sim x^{3/4} \Rightarrow x, \quad u \sim x^{-3/4} \Rightarrow x^{-1}, \quad w \sim x^{-3/2} \Rightarrow x^{-2} \quad (3.2)$$

$$P \sim x^{-3} \Rightarrow x^{-4}, \quad \Delta T \sim x^{-3/4} \Rightarrow x^{-1}$$

Рассмотрим распределение составляющих скорости и давления при $\Omega \gg 1$ в сечении струи. Из (1.3) следует, что турбулентная вязкость $\varepsilon = kx^{-1/4}$, тогда как в области $\Omega \ll 1$ она постоянная. Уравнения движения и неразрывности для турбулентной закрученной струи и соответствующие граничные и интегральные условия запишутся в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \tau_{xr} \right)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{vw}{r} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} \right) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{w^2}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (ru) + \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial r} = v = w = 0 \quad (r=0); \quad u \rightarrow 0, \quad P \rightarrow 0, \quad w \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \quad (3.4)$$

$$2\pi\rho \int_0^\infty \left(u^2 + \frac{P}{\rho} \right) r dr = K, \quad 2\pi\rho \int_0^\infty uwr^2 dr = L$$

В автомодельных переменных $X = x$, $\eta = rx^{-3/4}$ задача (3.3), (3.4) в области $\Omega \gg 1$

имеет следующее решение:

$$u = 2\alpha^2 X^{-3/4} \zeta^{-2}, \quad w = \alpha \gamma \eta X^{-3/4} \zeta^{-2}$$

$$P/\rho = -2/3 \gamma^2 X^{-3} \zeta^{-3}, \quad \zeta = 1 + 1/16 \alpha^2 \eta^2$$

Постоянные α , γ определяются из интегрального условия (3.4), а влияние давления на профиль скорости можно проанализировать методом возмущений [8]. Измерения параметров потока в пределах 100 калибров [5] показали справедливость предельного закона (3.1) далеко вниз по потоку при начальной умеренной и сильной закрутке Ω .

Из предельных автомодельных законов для закрученных струйных течений и сравнений с экспериментами следует, что параметр Ω существенно влияет на гидродинамические характеристики течения. Важно отметить, что имеющиеся экспериментальные данные по характеристикам струй при начальном значении $\Omega > 1$ описываются далеко вниз по потоку предельными законами для параметра $\Omega \gg 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью.— ПММ, 1953, т. 17, вып. 1, с. 3–16.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969, 742 с.
3. Бушмарин О. Н. Закрученная струя в спутном потоке жидкости той же плотности.— Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1955, № 176, с. 115–136.
4. Гинесский Л. С. Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиностроение, 1969, 400 с.
5. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н., Смирнова И. П. Турбулентное смешение газовых струй. М.: Наука, 1974, 272 с.
6. Reynolds A. Similarity in swirling wakes and jets.— J. Fluid Mech., 1962, v. 14, № 2, p. 241–243.
7. Хинце И. О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
8. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
9. Коробко В. И., Шашмин В. К., Шульман З. П. Развитие ламинарных струйных течений с нулевым избыточным импульсом.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 3, с. 27–33.
10. Шец, Якубовский. Экспериментальное исследование турбулентного следа за тонкими телами, снабженными двигателем.— Ракетная техника и космонавтика, 1975, т. 13, № 12, с. 30–39.

Новополоцк,
Минск

Поступила в редакцию
20.V.1985

УДК 532.529:536.24

ОБ АНАЛОГИИ РЕЙНОЛЬДСА В ЗАПЫЛЕННОМ ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

АГРАНАТ В. М.

Рассматривается неизотермическая задача Блазиуса для газозвеси на основе уравнений квазиравновесного двухфазного ламинарного пограничного слоя [1–3]. Получены приближенные аналитические формулы для коэффициентов трения и теплообмена и дана оценка рамок их применимости, обобщена на случай запыленного квазиравновесного ламинарного пограничного слоя аналогия Рейнольдса между процессами трения и конвективного теплообмена [4].

Рассмотрим продольное стационарное обтекание полубесконечной гладкой непроницаемой пластины с неизменной температурой поверхности T_w вязким теплопроводным потоком газозвеси с постоянными вдали от пластины давлением газа p_∞ , скоростью и температурой газа и частиц u_∞ , T_∞ и плотностью частиц $\rho_{s\infty}$. С использованием обычных допущений конденсации запыленного газа [3] и теории однофазного пограничного слоя при вынужденном конвективном несжимаемом течении вдоль пластины [4] движение газозвеси в пристеночной области в условиях малого динамического и теплового скольжения фаз (при $x' \gg l_u$, l_t , где x' — продольная координата, а l_u , l_t — длины динамической и тепловой релаксации частиц [3]) можно описать в соответствии с [1–3] при помощи следующей краевой задачи:

$$f''' + (1+\kappa)ff'' = 0, \quad \theta'' + (1+\chi\gamma)\text{Pr}\theta' = 0$$

$$\eta = 0: \quad f = f' = \theta = 0; \quad \eta \rightarrow \infty: \quad f' = \theta = 1 \quad (1)$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad \chi = \frac{\rho_{s\infty}}{\rho^0}, \quad \gamma = \frac{c_s}{c_p}, \quad \theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}$$