

УДК 532.22:519.6

**ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ
В ТОРОИДАЛЬНОМ СОСУДЕ ПРИ НЕВЕСОМОСТИ**

БУДНИК А. М., ПОЛЕВИКОВ В. К.

Рассмотрена осесимметричная задача об эволюции свободной поверхности жидкости по мере заполнения емкости тороидальной формы при невесомости. Эта задача была названа в числе актуальных задач гидромеханики невесомости [1, 2]. Однако ее решение получить не удавалось из-за отсутствия эффективного метода. В работе применен итерационно-разностный подход, предложенный в [3-5] для расчета одно- и двухсвязных осесимметричных фигур равновесия.

Рассмотрим частично заполненный жидкостью тор с радиусом R окружности меридиана и радиусом a осевой окружности. Радиус R примем за единицу длины и сформулируем осесимметричную задачу о равновесной форме жидкости в безразмерных переменных. Для этого введем безразмерные цилиндрические координаты z и r так, чтобы начало координат совпадало с центром тора, а ось z являлась его осью симметрии. Обозначим через s безразмерную длину дуги искомой линии, растущую в направлении, оставляющем жидкость справа, а через τ — безразмерную длину дуги меридиана, отсчет которой ведется от вершины тора против часовой стрелки. Поверхность тора, таким образом, определяется параметрическими уравнениями

$$z = \varphi(\tau) = \cos \tau, \quad r = \psi(\tau) = \delta - \sin \tau$$

$$\delta = a/R, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi$$

Пусть одна из линий контакта соответствует $s=0$, $\tau=\tau_0$, а другая — $s=s_1$, $\tau=\tau_1 \geq \tau_0$.

В предположении осевой симметрии конфигурация свободной поверхности описывается некоторой парой параметрических функций $z(s)$, $r(s)$, которые в условиях равновесия и отсутствия силы тяжести удовлетворяют уравнениям [1] и граничным условиям на линиях контакта при заданном угле смачивания α

$$(rz')' = \frac{1}{2} C (r^2)', \quad r'' = z' \left(\frac{z'}{r} - C \right) \quad (0 \leq s \leq s_1) \quad (1)$$

$$C = \frac{2}{r^2(s_1) - r^2(s_0)} [r(s_1)z'(s_1) - r(0)z'(0)] \quad (2)$$

$$z(0) = \cos \tau_0, \quad r(0) = \delta - \sin \tau_0 \quad (3)$$

$$z'(0) = -\sin(\alpha + \tau_0), \quad r'(0) = -\cos(\alpha + \tau_0)$$

$$z(s_1) = \cos \tau_1, \quad r(s_1) = \delta - \sin \tau_1 \quad (4)$$

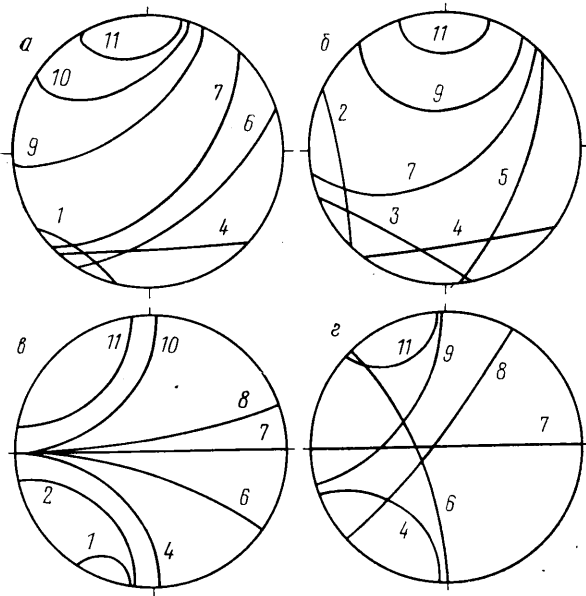
$$z'(s_1) = \sin(\alpha - \tau_1), \quad r'(s_1) = -\cos(\alpha - \tau_1)$$

Одним из параметров задачи служит коэффициент заполнения v , равный отношению объема жидкости к объему тора. Пользуясь формулой для объема тела вращения, получим дополнительное уравнение

$$v = \frac{1}{\pi \delta} \left(\int_0^{s_1} zr r' ds - \int_{\tau_0}^{\tau_1} \varphi \psi \psi' d\tau \right) \quad (5)$$

требующееся для замкнутой постановки задачи.

Задача решалась численно методом сеток. Расчетная область $0 \leq s \leq s_1$ покрывалась равномерной сеткой из 101 узла. Дифференциальные уравнения и краевые условия аппроксимировались со вторым порядком, как в [3-5]. Применялась ите-



Фиг. 1

рациональная процедура совместного решения всех разностных уравнений, которая конструктивно мало отличалась от алгоритмов [3-5]. Существенно, что на каждой итерации производился пересчет приближенных значений τ_0 , τ_1 и s_1 по явным формулам

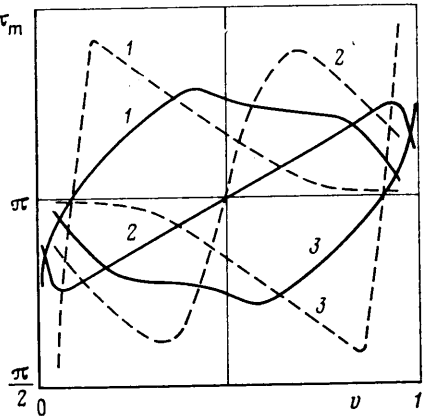
$$\tau_0 = 2 \arccos \frac{\delta - r(0)}{\sqrt{2(1 - z(0))}}, \quad \tau_1 = \tau_0 + 2\pi v - \frac{2}{\delta} \int_0^{s_1} z r r' ds + z(0) [\delta - r(0)] -$$

$$- z(s_1) [\delta - r(s_1)] + \frac{2}{3\delta} [z^3(0) - z^3(s_1)], \quad s_1 = \int_0^{s_1} \sqrt{(z')^2 + (r')^2} ds$$

в правых частях которых использовались приближения с предыдущей итерации, интегралы вычислялись по правилу Симпсона, а производные во внутренних узлах заменялись центральными разностями. Эти формулы вытекают соответственно из условий (3), соотношения (5) и тождества $(z')^2 + (r')^2 = 1$. Для разностных аналогов уравнений (1) рассматривались две итерационные схемы — вида [3] и вида [4, 5]. Большинство вариантов задачи просчитывалось при нескольких начальных приближениях.

Итерации точно реагируют на неустойчивость равновесного состояния [3, 5], так что если итерационный процесс сходился, то только к решению, которое устойчиво относительно осесимметричных возмущений. Предпринятое варьирование начальных приближений и самой конструкции итерационной схемы призвано застраховать от возможной ошибки при таком способе выявления устойчивых равновесных форм.

Влияние коэффициента заполнения v рассматривалось при $\alpha = 45, 90, 135^\circ$, $\delta = 1$ и 5. В результате подробных расчетов выяснилось, что при каждом наборе α, δ, v ($0 < v < 1$) имеется два устойчивых решения, симметричных друг другу относительно экваториальной плоскости $z=0$. Даже если в качестве начального итерационного приближения бралось какое-либо третье решение задачи (1)–(5) (например, прямая $z=1-s$, $r=1$ при $\alpha=90^\circ$, $\delta=1$, $v=1/2 - 2/\pi \approx 0.29$), при счете оно рано или поздно разрушалось и итерации сходились к одному из упомянутых двух решений.



Фиг. 2

На фиг. 1 показана эволюция равновесной формы при добавлении жидкости; $a - \delta=1, \alpha=45^\circ$, $b - \delta=5, \alpha=45^\circ$, $c - \delta=1, \alpha=90^\circ$, $d - \delta=5, \alpha=90^\circ$; кривые I-II соответствуют значениям $v=0,01; 0,05; 0,07; 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 0,6; 0,8; 0,9; 0,95$; ось симметрии z расположена слева от рисунков. Фигура 2 описывает смещение средней точки смачиваемого участка меридиана тора $\tau_m=(\tau_0+\tau_1)/2$ при изменении v , где кривая I соответствует $\alpha=45^\circ$, 2 - 90° , 3 - 135° , сплошные линии - $\delta=1$, штриховые - $\delta=5$. При малых v жидкость примыкает к стенке на промежутке $0 < \tau < \tau_1$, близком к оси z . Рост v приводит к довольно сложным перемещениям смачиваемой дуги меридиана. Однако существует критический объем, при достижении которого наблюдается натекание жидкости на удаленный от оси участок $\tau < \tau < 2\tau_1$. При $\delta=5$ это происходит в виде резкого поворота равновесной линии на угол более 90° , в то время как в предельном случае $\delta=1$ процесс натекания осуществляется постепенно и не столь радикально. По мере увеличения угла смачивания α величина критического объема растет.

В пользу достоверности полученных результатов свидетельствует то, что они удовлетворяют принципу двойственности [1].

Проведенное исследование оставляет открытым вопрос о влиянии несимметричных возмущений на равновесную форму. Возможно, для его решения окажется полезным применить итерационно-разностный подход к задаче равновесия в несимметричной постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюнцов А. Д. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
2. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюнцов А. Д. Гидромеханика невесомости: некоторые нерешенные проблемы. - В кн.: Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости. М.: Наука, 1982, с. 53-59.
3. Берковский Б. М., Полевилов В. К. О численном моделировании разрушения односвязных осесимметричных форм магнитной жидкости. - Магнит. гидродинамика, 1983, № 4, с. 60-66.
4. Полевилов В. К. Итерационно-разностный метод расчета равновесных форм свободной поверхности жидкости. - В кн.: 3-й Всесоюз. семинар по гидромеханике и тепломассообмену в невесомости. Тез. докл. Черногоровка, 1984, с. 100-103.
5. Полевилов В. К., Денисенко В. М. Численное исследование равновесных форм капли, вращающейся в гравитационном поле. - Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1, Физика, математика и механика, 1985, № 2, с. 37-41.

Минск

Поступила в редакцию
17.X.1985

УДК 532.517.4

ПРЕДЕЛЬНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ В ТЕОРИИ ЗАКРУЧЕННЫХ СТРУЙ

КОРОБКО В. И., ШАШМИН В. К., ШУЛЬМАН З. П.

Закрученные струи вязкой несжимаемой жидкости характеризуются двумя интегральными характеристиками - количеством движения K и моментом количества движения L [1]. Параметр течения $\Omega=L/(KR)$ (R - радиус сопла) определяет законы изменения гидродинамических характеристик струи. На основе уравнений пограничного слоя при $\Omega \ll 1$ в предположении более быстрого убывания в сечении струи тангенциальной составляющей скорости w по сравнению с радиальной скоростью v в [1] определены предельные автомодельные решения для $w \sim x^{-2}$ и давления $P \sim x^{-4}$. При $\Omega \ll 1$ параметры струи определяются количеством движения K , поэтому выражение для осевой скорости u , полученное ранее [2], соответствует осесимметричной незакрученной струе. При замене молекулярной вязкости ν на турбулентную $\epsilon = \text{const}$, построенное решение применимо для турбулентной закрученной струи в области слабой закрутки ($\Omega \ll 1$).

Для осесимметричной слабозакрученной струи ($\Omega \ll 1$) в спутном потоке получены следующие приближенно автомодельные законы [3] (они выполняются в области течения $u \ll u_\infty$):

$$l \sim x^{1/2}, \quad u \sim x^{-3/2}, \quad w \sim x^{-1}, \quad P \sim x^{-2}$$

где l - ширина струи, u - осевая составляющая скорости, w - тангенциальная составляющая скорости (закрутка), P - избыточное давление в струе.

Для расчета турбулентных закрученных струй в области течения $\Omega \ll 1$ разработаны интегральные методы [4]. Экспериментальные исследования [5] закрученных струй при умеренной и сильной закрутке показали, что законы изменения характеристик течения отличаются от теоретических результатов [1, 3], полученных для слабой закрутки. В публикуемой работе рассмотрены предельные автомодель-