

УДК 532.51.013.4

## ДИССИПАТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ

КОЛЫХАЛОВ П. И.

Исследована вязкая диссипативная неустойчивость двух течений, обладающих при отсутствии диссипации непрерывным спектром нейтрально-устойчивых возмущений. Для тангенциального разрыва в плавно стратифицированной жидкости установлены диапазоны волновых чисел, в которых вязкость приводит к дестабилизации потока. Сдвиговое течение со скоростью в переходном слое, линейно зависящей от координаты, обладает непрерывным спектром нейтральных мод даже в случае нестратифицированной жидкости. При наличии вязкости в одном из слоев с постоянной скоростью одна из ветвей спектра становится неустойчивой. При одинаковой вязкости выше и ниже слоя сдвига диссипация приводит только к затуханию возмущений.

**1. Постановка задачи.** В теории гидродинамической устойчивости представляет интерес изучение течений с кусочно-линейным профилем скорости. Наибольшее число результатов получено для течений типа тангенциального разрыва и сдвиговых течений с линейным переходным слоем (см. обзоры в [1-3])

$$u(z) = u \operatorname{sgn}(z), \quad u = \text{const} \quad (1.1)$$

$$u(z) = u \operatorname{sgn}(z), \quad |z| > L; \quad u(z) = uz/L, \quad |z| < L \quad (1.2)$$

В решениях для подобных течений часто появляются нейтрально-устойчивые моды со спектром фазовой скорости  $c = c(k)$ , непрерывным по волновому вектору  $k$ .

Для течения в поле тяжести с профилем скорости (1.1) это хорошо известные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей разной плотности или излучательные моды для плавно стратифицированной жидкости. (Стратификация всюду предполагается устойчивой.) Излучательные моды описывают внутренние волны, уходящие от тангенциального разрыва в обе стороны. Фазовая скорость этих волн вдоль оси  $z$  равна [4]

$$c = \pm u \sqrt{\frac{M^2}{2} - 1} \quad (1.3)$$

$$c = 0 \quad (1.4)$$

$$M = \frac{N}{ku}; \quad N^2 = -g \frac{\rho'}{\rho} = \text{const}$$

Здесь  $N$  — частота Брента — Вайсяля,  $\rho$  — невозмущенная плотность. Решение (1.3) справедливо для  $M < 2$  и при  $M \rightarrow 0$  переходит в решение Кельвина — Гельмгольца. Решение (1.4) справедливо при  $M > 1$  и не имеет аналогов в нестратифицированной жидкости. При конечной толщине разрыва выражения (1.3), (1.4) дают первый член разложения  $c(k)$  по  $kL$ , а следующий член дает неустойчивую поправку для (1.4) в диапазоне  $1 < M < \sqrt{2}$  и для (1.3) в диапазоне  $\sqrt{2} < M < 2$  (см. [5]). Ниже изучена не-

устойчивость течения с профилем (1.1) и  $N = \text{const}$  и продемонстрировано, что эффекты вязкости в некоторых диапазонах волновых чисел также приводят к дестабилизации излучательных мод.

Для течения нестратифицированной жидкости с профилем скорости (1.2) нейтрально-устойчивые возмущения существуют при достаточно больших волновых числах  $kL \gtrsim 0,64$  [1]

$$c = \pm u \sqrt[4]{\frac{(1-2kL)^2 - e^{-4kL}}{4k^2 L^2}} \quad (1.5)$$

Если гравитационные волны в стратифицированной жидкости имеют наглядный физический смысл [6], то решение (1.5) представляется несколько странным, тем более что в решениях уравнений Орра — Зоммерфельда не обнаружено указаний на существование таких возмущений [7]. Последнее обстоятельство ставит под сомнение реальность существования нейтральных мод (1.5), так как, согласно правилу Ландау — Линя, нейтральные решения имеют смысл только как предел неустойчивых возмущений. Легко продемонстрировать тем не менее, что (1.5) есть корректное длинноволновое приближение для решения с профилем скорости гладким, но с быстро меняющейся производной ( $u'' \gg ku'$ ), подобно тому как неустойчивость Кельвина — Гельмгольца есть корректное длинноволновое приближение для решений с непрерывным профилем скорости [8].

В данной работе установлено существование неустойчивости для течения с линейным переходным слоем при наличии вязкости в полубесконечных слоях с постоянной скоростью. Существенно, что в симметричном случае  $v(z > L) = v(z < -L)$  неустойчивости нет и вязкость приводит только к затуханию возмущений. Таким образом, решение (1.5) есть предел  $v \rightarrow 0$  неустойчивого решения для несимметричного (в указанном смысле) течения и вполне приемлемо с точки зрения принципа Ландау — Линя.

**2. Основные соотношения.** Рассмотрим в линейном приближении двумерные возмущения вида  $f(z) \exp[ik(x-ct)]$ , наложенные на плоскопараллельный поток стратифицированной жидкости с профилем скорости  $V_x = u(z)$  и постоянной величиной частоты Брента — Вайсяля  $N = \sqrt{-g\rho'/\rho}$ . Поведение возмущений скорости вдоль оси  $z$  описывается в приближении Буссинеска хорошо известным уравнением Орра — Зоммерфельда — Тейлора — Гольдштейна

$$(u-c)v'' + \left[ \frac{N^2}{u-c} - k^2(u-c) - u'' \right] v = -\frac{iv}{k} (v^{iv} - 2k^2 v'' + k^4 v) \quad (2.1)$$

В случае  $u = \text{const}$  решение уравнения (2.1) имеет вид

$$v = \sum_{j=1}^4 A_j \exp(\lambda_j kz) \quad (2.2)$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt[4]{1 - \mu + \frac{\mu^2}{r}}; \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt[4]{1 + r + \mu}$$

$$r = \frac{iW}{kv}; \quad \mu = \left( \frac{N}{kW} \right)^2; \quad W = u - c$$

Ветвь корня в (2.2) будем выбирать так, что  $\text{Real}(\sqrt[4]{\quad}) > 0$ . При этом решения должны экспоненциально затухать при  $z \rightarrow \pm\infty$ . Считая вязкость достаточно малой, разложим  $\lambda$  по степеням параметра  $r$ , модуль которого по порядку величины есть число Рейнольдса, построенное по длине волны возмущения  $\text{Re} = u/kv \sim |r|$

$$\lambda_{1,2} \approx \pm \sqrt[4]{1 - \mu} \left\{ 1 + \frac{\mu^2}{1 - \mu} \frac{1}{2r} \right\} + O(r^{-2}), \quad \lambda_{3,4} \approx \pm \sqrt[4]{r} \left\{ 1 + \frac{1 + \mu}{2r} \right\} + O(r^{-3/2}) \quad (2.3)$$

Решение (2.2) следует дополнить условиями в точках разрыва скорости или ее производной. Первые два условия очевидны: непрерывность на разрыве смещений вдоль оси  $z$  ( $\xi_z = iv/kW$ ) и  $zz$  компоненты тензора напряжений  $p_{zz} = -p + 2\rho v(\partial v/\partial z)$ . Если вязкость с одной стороны от разрыва равна нулю, то на разрыве  $zx$  компонента тензора напряжений  $p_{zx} = -i\rho v(kv + k^{-1}v')$  должна обращаться в нуль. Для тангенциального разрыва скорости в случае ненулевой вязкости с двух сторон будем предполагать существование бесконечно тонкого невязкого переходного слоя, тогда  $p_{zz} = 0$  на разрыве. Это, видимо, единственное разумное предположение, использовано, например, в [9], где дается также обоснование непротиворечивости рассмотрения задачи устойчивости тангенциального разрыва в вязкой жидкости. Отметим в связи с этим, что течения с профилем скорости (1.1) или (1.2) удовлетворяют уравнениям Навье — Стокса, а следовательно, рассмотрение поставленных задач проясняет свойства уравнения (2.1), даже если с физической точки зрения эти задачи — всего лишь модели для описания реальных течений.

Из системы линеаризованных уравнений Навье — Стокса [3] нетрудно получить выражения для  $p_{zz}$

$$p_{zz} = \frac{i\rho}{k} \left\{ Wv' - u'v + ikv \left( \frac{v''''}{k^2} - 3v' \right) \right\} \quad (2.4)$$

В областях  $u' = 0$  перепишем (2.4) в удобном для вычислений виде

$$p_{zz} = \frac{i}{k} \rho W v \varphi = -\rho \xi_z W^2 \varphi, \quad \varphi = \frac{v'}{v} - \frac{kv}{iW} \frac{k^{-2} v'''' - 3v'}{v}$$

Условие  $p_{zz} = 0$  в точке разрыва позволяет определить решение с точностью до одной свободной константы

$$v = A \left\{ \exp \left( \mp \sqrt{1 - \mu_{\pm} + \frac{\mu_{\pm}^2}{r}} kz \right) - \frac{2 - \mu_{\pm} + \mu_{\pm}^2/r}{2 + r_{\pm} + \mu_{\pm}} \exp(\mp \sqrt{1 + r_{\pm} + \mu_{\pm}} kz) \right\}$$

Здесь верхний знак соответствует решениям, затухающим при  $z \rightarrow +\infty$ , нижний — при  $z \rightarrow -\infty$ . Не представляется труда вычислить с точностью до величины  $\sim r^{-1}$  функцию  $\varphi$

$$\varphi = \mp k \sqrt{1 - \mu_{\pm}} \left( 1 + \frac{h_{\pm}}{r_{\pm}} \right), \quad h_{\pm} = 4 + \frac{\mu_{\pm}^2}{2(1 - \mu_{\pm})}$$

Величины  $\sim \sqrt{r^{-1}}$  взаимно уничтожаются, и член  $h/r \sim \text{Re}^{-1}$  описывает влияние малой вязкости. Поскольку всюду ниже вязкие поправки не равны нулю в этом приближении, то учет следующих членов при малой вязкости ( $\text{Re} \gg 1$ ) не даст новых эффектов.

**3. Неустойчивость тангенциального разрыва.** Для профиля скорости (1.1) и постоянного значения частоты Брента — Вайсяля условия непрерывности  $\xi_z$  и  $p_{zz}$  дают дисперсионное соотношение

$$W_+^2 \sqrt{1 - \mu_+} \left( 1 + \frac{h_+}{r_+} \right) + W_-^2 \sqrt{1 - \mu_-} \left( 1 + \frac{h_-}{r_-} \right) = 0$$

$$W_{\pm} = \pm u - c; \quad \mu_{\pm} = \left( \frac{N}{kW_{\pm}} \right)^2; \quad r_{\pm} = \left( \frac{kv}{iW_{\pm}} \right)^{-1} \quad (3.1)$$

Отметим, что при рассмотрении (3.1) нужна особая осторожность при работе с корнями (так, например, в случае  $c \rightarrow 0$  при  $M < 1$  получим  $\sqrt{1 - \mu_+} = \sqrt{1 - \mu_-}$ , но при  $M > 1$   $\sqrt{1 - \mu_+} = -\sqrt{1 - \mu_-}$ ). Перепишем (3.1) в виде

$$D(c) = F(c); \quad D(c) = W_+^2 \sqrt{1 - \mu_+} + W_-^2 \sqrt{1 - \mu_-}$$

$$F(c) = - \frac{W_+^2 \sqrt{1 - \mu_+}}{r_+} h_+ - \frac{W_-^2 \sqrt{1 - \mu_-}}{r_-} h_-$$

Невязкое ( $v_{\pm}=0$ ) решение (1.3) (1.4) соответствует условию  $D(c_0)=0$ . Предполагая отклонения  $\delta c=c-c_0$  малыми, получим

$$\delta c = \frac{F(c)}{\partial D/\partial c}; \quad c=c_0 \quad (3.2)$$

Из соотношения (3.2) можно получить некоторые результаты работ [9–11]. Для симметричной моды (1.4) выражение (3.2) дает

$$\delta c = -ik \frac{v_+ + v_-}{4} \frac{M^4 - 8M^2 + 8}{2 - M^2} \quad (3.3)$$

Значение  $\delta c$  дает неустойчивость в диапазонах  $4 - 2\sqrt{2} < M^2 < 2$ ,  $M^2 > 4 + 2\sqrt{2}$ .

При  $M^2 < 1$  симметричная мода  $c_0=0$  не удовлетворяет дисперсионному уравнению  $D(c_0)=0$ , а при  $2 < M^2 < 4 + 2\sqrt{2}$  поправка  $\delta c$  дает затухающие возмущения. Затухающие излучательные решения соответствуют неограниченному возрастанию возмущений при  $z \rightarrow \infty$  и в линейной задаче, по-видимому, смысла не имеют.

Для несимметричной моды (1.3) соотношение (3.2) дает

$$\delta c = ik \left\{ \frac{v_+ + v_-}{4} + c \frac{v_+ - v_-}{4} \right\} \frac{M^4 - 16M^2 + 32}{(4 - M^2)(M^2 - 2)} \quad (3.4)$$

В этом случае диссипативная неустойчивость имеет место в диапазоне  $2 < M^2 < 8 - 4\sqrt{2} \approx 2,4$ . При  $M^2 < 2$  (1.3) дает неустойчивость при нулевой вязкости и вязкость приводит к некоторому уменьшению инкремента неустойчивости. При  $M^2 > 4$  решение (3.4) смысла не имеет, так как (1.3) не удовлетворяет дисперсионному уравнению.

Особый интерес представляет точка  $M^2=2$ , где соотношения (3.2), (3.3), (3.4) неприменимы. Разложив  $D(c)$  в окрестности точки  $M^2=2$ ,  $c=0$ , получим дисперсионное соотношение в виде

$$c^3 + (1 - 1/2 M^2) u^2 c = 1/2 i k u^3 (v_+ + v_-) = i k v u^3 \quad (3.5)$$

При  $M^2 < M_*^2 = 2 - 6(kv/2)^{2/3}$  все корни уравнения (3.5) чисто мнимые и два из них неустойчивые ( $\text{Im } c > 0$ ), а третий имеет отрицательную мнимую часть. В точке  $M^2 = M_*^2$  неустойчивые корни сливаются и при  $M^2 > M_*^2$  приобретают ненулевые действительные части, т. е. симметричные возмущения превращаются в бегущие волны. При этом один из корней уравнения (3.5) остается чисто мнимым для всех  $M^2$ .

Соотношения (1.3), (1.4), (3.3), (3.4) и исследование точки бифуркации  $M = \sqrt{2}$  позволяют проследить поведение корней в плоскости  $\{\text{Im } c, M\}$  и в комплексной плоскости  $c$  (фигура). При  $v \rightarrow 0$  участки  $D_1, D_2, E, F$  описываются симметричной нейтральной модой (1.4), а участки  $A, B, C_1, C_2, C_3, C_4$  — решением (1.3). Ветвь  $BEF$  соответствует при  $v_+ = v_-$  чисто мнимым значениям  $c$ .

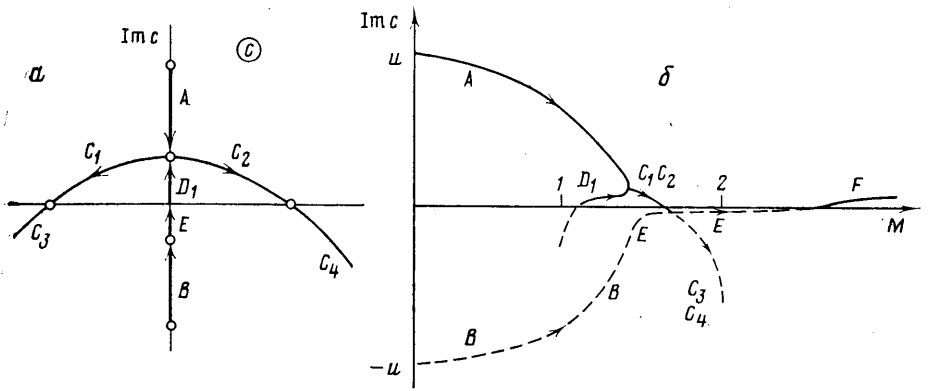
4. Течение с линейным переходным слоем. Рассмотрим теперь течение нестратифицированной жидкости с профилем скорости (1.2), предполагая, что вязкость отлична от нуля в областях  $|z| > L$ . В области  $|z| < -L$  вязкость равна нулю, и решение уравнения (2.1) и выражение для тензора напряжений имеют вид

$$v_{\pm} = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}, \quad p_{zz} = \frac{i}{k} \rho \{Wv' - u'v\} \quad (4.1)$$

Сшивая решение (4.1) с вязкими решениями в областях  $|z| > L$ , получим дисперсионное соотношение

$$c^2 + 2ik(v_+ + v_-)c = c_0^2 + i \frac{u}{L} (v_+ - v_-) (1 - 2kL - e^{-4kL}) \quad (4.2)$$

$$c_0^2 = u^2 \frac{(1 - 2kL)^2 - e^{-4kL}}{4k^2 L^2}$$



В симметричном случае ( $v_+ = v_- = v$ ) решение уравнения (4.2) отличается от невязких решений  $c = \pm \sqrt{c_0^2}$  наличием стабилизирующих поправок ( $\text{Im } c < 0$ ) для всех значений  $kL$ . Однако при достаточно большом нарушении симметрии  $v_+ \neq v_-$  в области  $kL \approx 0,64$  у одной из ветвей нейтрального решения (1.5) появляется положительная мнимая добавка, соответствующая диссипативной неустойчивости. Для примера приведем решения в случае, когда вязкость отлична от нуля только в нижнем полупространстве ( $z < -L$ ) и достаточно мала ( $kv \ll u/kL$ )

$$c \approx -ikv \pm \sqrt{c_0^2 - i \frac{v}{uL} u^2 (1 - 2kL - e^{-4kL})} \quad (4.3)$$

$$c \approx \pm \sqrt{c_0^2} - ikv \left\{ 1 + \frac{1 - 2kL - e^{-4kL}}{\pm 2kL \sqrt{c_0^2 / u^2}} \right\} \quad (4.4)$$

Соотношение (4.4) получено из (4.3) в предположении  $|c_0| \gg kv$ , т. е.  $kL$  достаточно далеко от критического значения  $k_*L \approx 0,64$ . Для малых значений  $e^{-4kL}$

$$c_{1,2} \approx \pm \sqrt{c_0^2} + ikv \frac{4kL - 1}{2(2kL - 1)^2} e^{-4kL}; \quad -\sqrt{c_0^2} - 2ikv \quad (4.5)$$

Из (4.5) видно, что диссипативная неустойчивость проявляется на том возмущении, фазовая скорость которого больше и критическая точка  $c = u(z_*)$  этого возмущения находится ближе к невязкому полупространству  $z > L$ . Для случая  $v_- = 0$  критическая точка невязкого возмущения, становящегося неустойчивым, расположена ближе к полупространству  $z < -L$ .

**5. Заключение.** Изложенные выше результаты можно последовательно описать на языке волн отрицательной энергии, подобно тому как это сделано в [9–12]. Энергия таких волн не инвариантна относительно выбора системы отсчета, в то время как факт неустойчивости, разумеется, не зависит от такого выбора [12]. Используемая в настоящей работе симметричная система координат удобна для вычислений, но затрудняет обнаружение потенциально неустойчивых волн отрицательной энергии; и такой анализ лучше проводить в системе координат, где скорость при  $z \rightarrow +\infty$  (или при  $z \rightarrow -\infty$ ) равна нулю. Легко убедиться, что в такой системе координат точки  $M = \sqrt{2}$  для течения стратифицированной жидкости с тангенциальным разрывом и  $k_*L = 0,64$  для сдвигового течения с линейным переходным слоем являются точками смены знака энергии в том смысле, как это изложено в [10, 13].

Во втором случае диссипативная неустойчивость имеет место при несимметричности (по вязкости) слоев  $z > L$  и  $z < -L$ , а в первом такая неустойчивость проявляется в полной мере и в симметричной ситуации. Заметим, что значительная часть неустойчивостей, связанных с волнами отрицательной энергии, обнаружена для несимметричных течений (например, [9, 11, 14]).

Существование волн отрицательной энергии и диссипативной неустойчивости в течениях несжимаемой жидкости с непрерывным, кусочно-линейным профилем скорости может привести к появлению ложных неустойчивых решений при попытках моделировать гладкий профиль скорости кусочно-линейным. Такого рода неожиданность может особенно неприятно проявиться при численных расчетах.

Результаты, полученные в п. 3, весьма похожи на результаты [5], где исследованы сдвиговые течения стратифицированной жидкости с профилем скорости, близким к

тангенциальному разрыву. Для некоторых волновых чисел конечная толщина разрыва приводит к тем же самым эффектам, что и вязкость. С точки зрения воли отрицательной энергии это объясняется тем, что в обоих случаях в этих диапазонах волновых чисел имеется сток энергии, приводящий к росту воли отрицательной энергии. Однако если в случае конечной толщины разрыва диссипативная функция знакопостоянна, то для вязких поправок  $F(c)$  меняет знак в точках  $M^2=4\pm 2\sqrt{2}$ ,  $8-4\sqrt{2}$ , что приводит к смене знака у инкремента неустойчивости.

Существуют глубокие аналогии в поведении невязких возмущений течений с профилем скорости, близким к тангенциальному разрыву в стратифицированной жидкости и в сжимаемом газе (ср. [5] и [15]). В п. 1 был введен параметр  $M=\sqrt{N}/ku$ , роль которого в стратифицированной жидкости аналогична роли числа Маха в сжимаемом потоке газа. Многие формулы, описывающие поведение возмущений, качественно (а иногда и количественно) дают одну и ту же картину, например: существуют две критические точки  $M_*=1$  и  $M_{**}=\sqrt{2}$ ; излучательная неустойчивость симметричной нейтральной моды имеет место при  $\sqrt{2}>M>1$  и отсутствует при  $M>\sqrt{2}$ . Эти аналогии обусловлены существованием в обоих случаях распространяющихся волн (внутренних или звуковых) и позволяют предположить наличие диссипативной неустойчивости в течении газа с тангенциальным разрывом в профиле скорости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Маслоу С. А. Неустойчивости и переход в сдвиговых течениях.— В кн.: Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984. с. 218–270.
2. Триггон Д. Дж., Дэвис П. А. Неустойчивости в геофизической гидродинамике.— В кн.: Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984, с. 271–316.
3. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 350 с.
4. Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.
5. Drazin P. G., Zatorska M. B., Banks W. H. H. On the normal modes of parallel flow of inviscid stratified fluid. Pt 2. Unbounded flow with propagation at infinity.— J. Fluid Mech., 1979, v. 95, № 4, p. 681–705.
6. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
7. Esch R. E. The instability of a shear layer between two parallel streams.— J. Fluid Mech., 1957, v. 3, № 3, p. 289–303.
8. Drazin P. G., Howard L. N. Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid.— Adv. Appl. Mech., v. 9, New York – London: Acad. Press, 1966, p. 1–89.
9. Островский Л. А., Степанянц Ю. А. Нелинейная стадия сдвиговой неустойчивости в стратифицированной жидкости конечной глубины.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 4, с. 63–70.
10. Cairns R. A. The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flow.— J. Fluid Mech., 1979, v. 92, № 1, p. 1–14.
11. Лесников В. П. О неустойчивости стратифицированной жидкости, обусловленной капиллярно-гравитационной волной с отрицательной энергией.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 1, с. 94–97.
12. Островский Л. А., Степанянц Ю. А., Цимринг Л. Ш. Взаимодействие внутренних волн с течениями и турбулентностью в океане.— В кн.: Нелинейные волны: Самоорганизация. М.: Наука, 1983, с. 204–239.
13. Уизем Д. Б. Волны с дисперсией и вариационные принципы.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Мир, 1977, с. 151–180.
14. Островский Л. А., Цимринг Л. Ш. Излучение внутренних волн отрицательной энергии сдвиговым течением.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1981, т. 17, № 7, с. 766–768.
15. Blumen W., Drazin P. G., Billings D. F. Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. Pt 2.— J. Fluid Mech., 1975, v. 71, № 2, p. 305–316.

Москва

Поступила в редакцию  
29.XI.1985