

УДК 533.5.013.4:539.3

ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ТРУБЕ

ГАНИЕВ Р. Ф., МАЛЫХ Ю. Б., УКРАИНСКИЙ Л. Е.

Устойчивости течения в жесткой трубе посвящено большое количество исследований [1]. В настоящее время подавляющее большинство авторов как теоретических, так и экспериментальных работ делают вывод о том, что течение Пуазейля в круглой жесткой трубе линейно устойчиво. Однако все реальные трубы обладают упругими свойствами, исследование влияния которых проведено не столь детально. Для некоторых выборочных значений параметров, характеризующих упругую трубу, показано наличие неустойчивости течения Пуазейля в трубе по отношению к бесконечно малым осесимметричным возмущениям [2]. При этом использовались граничные условия, не учитывающие немалый градиент скорости невозмущенного течения вблизи стенки трубы.

Ниже приведены результаты численного исследования линейной устойчивости течения Пуазейля в круглой упругой трубе по отношению к трехмерным возмущениям в виде бегущих волн, распространяющихся вдоль системы (рассмотрены азимутальные моды возмущений с номерами 0, 1, 2, 3, 4 и 5). Показано, что упругие свойства трубы могут существенно влиять на спектр линейной устойчивости. Для осесимметричных возмущений обнаружена неустойчивость, существующая при числах Рейнольдса, больших 200, лишь для труб, модуль упругости которых существенно меньше модулей упругости распространенных на практике материалов. Неустойчивость к возмущениям второй азимутальной моды иного характера. Для чисел Рейнольдса, больших единицы, она имеет место в более жестких трубах, чем предыдущая. Кроме того, по мере увеличения числа Рейнольдса она возможна и для более жестких труб.

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости по бесконечной вязкоупругой трубе. Поле скоростей жидкости и давление в ней будем описывать уравнениями Навье — Стокса и несжимаемости

$$C \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{\text{Fr}} \mathbf{F}, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{Re} = \frac{UR}{\nu}, \quad C = \frac{R}{UT}, \quad \text{Fr} = \frac{U^2}{RF}$$

где U — значение невозмущенной скорости жидкости на оси течения, R — радиус недеформированной трубы (масштаб длины), ν и ρ_0 — вязкость и плотность жидкости, $\mathbf{F}$ — внешняя массовая сила, t , $\mathbf{V}$ и P — безразмерные время, скорость жидкости и давление с масштабами T , U , ρ_0 , U^2 соответственно. Масштаб времени T определяется ниже.

На подвижной поверхности трубы, смачиваемой жидкостью, должны выполняться условия прилипания, а также соотношения между напряжениями, возникающими в стенке трубы при ее деформации, и напряжениями в жидкости. Эти условия определяют совместно с условиями на оси трубы и на бесконечности нелинейную краевую задачу для уравнений (1.1) относительно неизвестных функций $\mathbf{V}$, P , $\mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ — безразмерный (с масштабом R) вектор перемещений поверхности трубы.

При определении напряжений на стенке трубы использовалась моментная теория тонких пологих оболочек в рамках гипотез Кирхгофа — Лява

в предположении, что труба однослойная постоянной толщины, а материал, из которого она изготовлена, однородный, изотропный и линейно-вязкоупругий, подчиняющийся соотношениям модели Фойгта. Принималось, что с внешней стороны трубы приложены постоянные усилия закрепления. Усилия, приложенные к стенке трубы со стороны жидкости, вычислялись через компоненты тензора напряжений в жидкости на подвижной поверхности соприкосновения с трубой и кинематические характеристики деформации трубы.

Ниже ограничимся случаем, когда внешние массовые силы $\mathbf{F}$, приложенные к жидкости, и усилия закрепления оболочки таковы, что упомянутая выше нелинейная краевая задача допускает стационарное решение, которое в цилиндрических координатах (r, θ, z) с осью z , совпадающей с осью недеформированной трубы, имеет вид

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 = \{0, 0, V_{0z}\}, P = P_0 = \text{const}, \mathbf{u} = 0 \quad (1.2)$$

$$V_{0z} = 1 - r^2$$

Это решение соответствует течению Пуазейля по круглой неподвижной трубе постоянного поперечного сечения.

Рассмотрим бесконечно малые возмущения движения, описываемого решением (1.2). Положим

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{v}, P = P_0 + p, \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (1.3)$$

где $\mathbf{v}$, p , $\mathbf{u}$ — возмущения скорости, давления и перемещения стенок соответственно.

Подставляя (1.3) в уравнение и граничные условия нелинейной краевой задачи и пренебрегая нелинейными относительно возмущений членами, получаем линейную краевую задачу для бесконечно малых возмущений, решение которой будем искать в виде моногармонических бегущих волн

$$\begin{aligned} v(r, \theta, z, t) &= \omega(r) e^{i\kappa}, p(r, \theta, z, t) = \pi(r) e^{i\kappa} \\ u(r, \theta, z, t) &= \Omega e^{i\kappa}, \kappa = \alpha(z - t) + m\theta \end{aligned} \quad (1.4)$$

где ω , π , Ω — комплексные амплитуды возмущений скорости жидкости, давления и перемещения стенки трубы, α и m — продольное и азимутальное волновые числа, i — мнимая единица. В правых частях равенств (1.4) следует брать действительные части комплексных чисел.

Возмущения (1.4) могут быть затухающими, периодическими по времени либо нарастающими в зависимости от масштаба времени T . Если в качестве T выбрано действительное число, то возмущения нейтральны, если комплексное с отрицательной мнимой частью, то нарастающие, если комплексное с положительной мнимой частью, то убывающие.

Подставляя (1.4) в уравнение линейной краевой задачи, получаем уравнения для амплитуд ω , π

$$\begin{aligned} \omega_r' &= -\frac{1}{r} \omega_r - \frac{im}{r} \omega_\theta - i\alpha \omega_z \\ \omega_\theta'' &= -\frac{2im}{r^2} \omega_r - \left(a + \frac{1}{r^2}\right) \omega_\theta - \frac{1}{r} \omega_\theta' + \frac{im}{r} \text{Re } \pi \\ \omega_z'' &= \text{Re } V_{0z}' \omega_r + a \omega_z - \frac{1}{r} \omega_z' + i\alpha \text{Re } \pi \\ i\alpha \text{Re } \pi' &= -i\alpha a \omega_z + \frac{\alpha m}{r^2} \omega_\theta + \alpha^2 \omega_z' + \frac{\alpha m}{r} \omega_\theta' \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$a = i\alpha \operatorname{Re}(V_{z0} - C) + \frac{m^2}{r^2} + \alpha^2,$$

где штрих означает дифференцирование по r .

Амплитуды бесконечно малых перемещений стенки трубы Ω однозначно связаны линейными соотношениями, вытекающими из условий прилипания, с амплитудами бесконечно малых возмущений скорости ω жидкости при $r=1$. С помощью этих соотношений можно исключить Ω из граничных условий. Преобразованные таким образом граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{i}{\alpha} a_2 \omega_r(1) + a_3 \omega_\theta(1) + a_4 \omega_z(1) - \omega_z'(1) &= 0 \\ \frac{i}{\alpha} a_5 \omega_r(1) + (a_6 - 1) \omega_\theta(1) + a_4 \omega_z(1) - \omega_\theta'(1) &= 0 \\ \frac{i}{\alpha} a_8 \omega_r(1) + a_9 \omega_\theta(1) + a_7 \omega_z(1) - i\alpha \operatorname{Re} \pi(1) &= 0 \\ a_1 &= \rho \operatorname{Re} \delta \left\{ -h \frac{4\alpha^2 + 3m^2}{3} + i \left[\alpha C - \frac{2\alpha^2 + m(1 - v_0)}{2M^2 C \alpha} \right] \right\} \\ a_2 &= -\alpha^2 - \frac{3V_{z0}''(1) + \rho \operatorname{Re} \delta (2\alpha^2 C + 4\alpha^2 V_{z0}'(1) + 3m^2 V_{z0}(1)) h}{3C} + \\ &+ i h \rho \operatorname{Re} \left[\alpha V_{z0}'(1) - \frac{\alpha (V_{z0}'(1) - C v_0)}{M^2 C^2} - \frac{m^2 (1 - v_0) V_{z0}'(1)}{2\alpha M^2 C^2} \right] \\ a_3 &= a_4 = -i \delta \rho m \operatorname{Re} \frac{1 + v_0}{2M^2 C} - \frac{h}{3} \alpha \delta \rho m \operatorname{Re} \\ a_5 &= -m\alpha + i \delta \rho m \operatorname{Re} \frac{C^{-1/2} (1 + v_0) V_{z0}'(1)}{M^2 C} + \frac{h \alpha \delta \rho m \operatorname{Re}}{3} \left(4 - \frac{V_{z0}'(1)}{C} \right) \\ a_6 &= 2 - \frac{h \delta \rho \operatorname{Re}}{3} (\alpha^2 + 4m^2) + i \delta \rho \operatorname{Re} \left[\alpha C - \frac{2m^2 + (1 - v_0) \alpha^2}{M^2 C^2} \right] \\ a_7 &= 2\alpha^2 - i \alpha \delta \rho \operatorname{Re} \frac{v_0}{M^2 C^2} + \frac{2}{3} h \alpha^2 \delta \rho \operatorname{Re} \\ a_8 &= \alpha^2 \left\{ -2 + h \delta \rho \operatorname{Re} \left[\frac{\delta^2}{9} (\alpha^2 + m^2)^2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \frac{V_{z0}'(1)}{C} \right] + \frac{V_{z0}'(1)}{C} \right\} + \\ &+ i \alpha \delta \rho \operatorname{Re} \left\{ -\alpha^2 C + \frac{[1 + \delta^2 (\alpha^2 + m^2) / 12] C - v_0 V_{z0}'(1)}{M^2 C^2} \right\} \\ a_9 &= 2m\alpha - \frac{4}{3} h \operatorname{Re} \rho \delta \alpha m - i \operatorname{Re} \rho \delta \frac{m}{M^2 C} \\ h &= \frac{\eta}{\rho}, \quad M = U \sqrt{\frac{\rho_0 \rho (1 - v_0^2)}{E}} \end{aligned} \quad (1.6)$$

где ρ , δ , η — безразмерные плотность (масштаб ρ_0), толщина (масштаб R) и динамическая вязкость (масштаб $\rho_0 U R$) трубы соответственно, v_0 и E — коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала трубы.

Граничные условия для амплитуд скорости на оси течения имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_r(0) = \omega_\theta(0) = \omega_z'(0) &= 0 \quad (m=0) \\ \omega_r(0) + i \omega_\theta(0) = \omega_z(0) = \omega_\theta'(0) &= 0 \quad (m=1) \\ \omega_r(0) = \omega_\theta(0) = \omega_z(0) &= 0 \quad (m \geq 2) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Задачу устойчивости формулируем следующим образом. При заданных характеристиках оболочки, а также при фиксированных Re , α , m найти значения параметра $C = c_r + ic_i$, при которых краевая задача (1.5) — (1.7) имеет ненулевое решение. Так как, согласно (1.1), C однозначно связано с масштабом времени T , то мнимая часть найденных значений C определяет, согласно (1.4), устойчивость. Отрицательным значениям c_i соответствуют затухающие бесконечно малые возмущения, а положительным — нарастающие.

2. Методика численного интегрирования. Для численного решения краевой задачи (1.5), (1.6), (1.7) использовалась методика, успешно примененная ранее при исследовании задач гидродинамической устойчивости [1, 3].

Характеристическая функция вычислялась методами дифференциальной прогонки и исключения. Первый из них как наиболее экономичный использовался при массовых расчетах, а второй, как правило, для контроля. Сокращение интервала интегрирования не проводилось.

Корни характеристической функции находились методом Ньютона. В отличие от задачи об устойчивости течения Пуазейля в жесткой трубе характеристическая функция может иметь в ряде случаев близко расположенные корни, что требует весьма точного выбора начального приближения для метода Ньютона. Поэтому в этих случаях для отделения корней использовался метод контурного интегрирования [4], а также прямое вычисление значений характеристической функции на прямоугольной сетке с малым шагом.

При нахождении собственных значений для системы с податливой оболочкой существенно использовалась их непрерывная зависимость от параметра упругости M , фигурирующего в коэффициентах граничных условий (1.6). Как нетрудно заметить, этот параметр представляет собой отношение скорости жидкости на оси трубы в невозмущенном течении к скорости звука в материале оболочки. В случае абсолютно жесткой трубы $M=0$. Однако величина M входит в знаменатель ряда коэффициентов граничных условий (1.6). Таким образом, случай абсолютно жесткой трубы является особым для краевой задачи с граничным условием (1.6). Поэтому для случая $|M^2 C| < 1$ граничные условия при $r=1$ использовались в форме соотношений разрешенных относительно амплитуд возмущений скорости, которые не содержат указанных особенностей.

Уравнения (1.5) краевой задачи имеют сингулярность при $r=0$. Поэтому граничные условия (1.3) ставились, как и в работе [3], не при $r=0$, а при $r=r_0 \ll 1$. Значение r_0 выбиралось из того условия, чтобы при уменьшении r_0 в 2 раза собственные значения не изменяли трех значащих цифр.

Для отладки программ собственные значения, полученные для частного случая $M=0$, сравнивались с полученными в [5] при помощи представления решения краевой задачи в виде ряда по ортогональным функциям. Для исследуемых азимутальных мод возмущений получено совпадение двух — трех значащих цифр.

Нахождение собственных значений для системы с податливой оболочкой осуществлялось как продолжение по непрерывности собственных значений системы с абсолютно жесткой оболочкой при изменении параметра M от нуля до любого конечного значения. Такие продолжения могут быть сделаны, исходя из любого собственного значения системы с абсолютно жесткой оболочкой, которые являются непрерывными функциями волнового числа возмущений α и числа Рейнольдса Re [1].

Как показали расчеты, в ряде случаев продолжения, полученные исходя из собственных значений, соответствующих различным значениям α и Re , приводят к несовпадающим распределениям собственных значений при одних и тех же ненулевых значениях параметра M . Детальное кропотливое исследование таких случаев позволило установить, что они имеют место тогда, когда контур, по которому строились непрерывные продолжения на плоскости $\{\alpha, M\}$, либо $\{Re, M\}$, охватывает точку слияния собственных значений. Существование таких изолированных точек при конечных значениях параметров существенно отличает рассматриваемую задачу от задачи для систем с жесткими оболочками. Сходимость используемых методов вблизи точек слияния собственных значений ухудшается. Поэтому контуры для построения продолжений собственных значений по непрерывности выбирались таким образом, чтобы обходить указанные точки и их малые окрестности.

3. Результаты расчетов. При исследовании изучалось влияние податливости стенок трубы на собственные значения задачи линейной устойчивости. Расчеты проводились для первых шести азимутальных мод возмущений. Существенного влияния параметра упругости M на спектральные кривые третьей, четвертой и пятой моды возмущений по сравнению с соответствующими модами возмущений системы с абсолютно жесткими оболочками обнаружено не было. Все они для значений M от 0 до 100

практически совпадают и хорошо согласуются с аналогичными кривыми, приведенными в [3]. Поэтому здесь они не приводятся.

Наиболее детальный анализ был проделан для осесимметричных возмущений ($m=0$). Было проведено исследование влияния податливости стенки трубы на первые четыре собственных значения системы с абсолютно жесткой оболочкой, пронумерованных в порядке убывания их мнимых частей при $\alpha < 10^{-4}$. Расчеты проводились для волновых чисел α , лежащих в интервале 10^{-4} —400 при $Re=5000$.

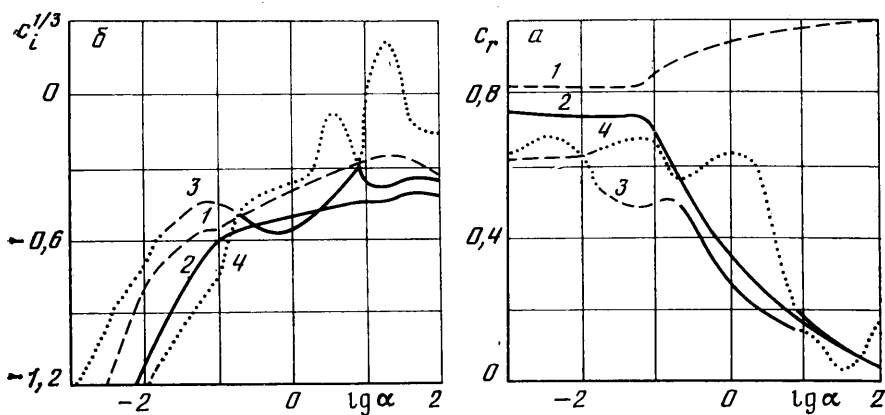
При выбранной в настоящей работе системе нумерации собственных значений первое и третье собственное значение соответствуют таким осесимметричным возмущениям, у которых ненулевыми являются лишь азимутальные составляющие векторов скорости жидкости и перемещения оболочки, а продольные и поперечные компоненты отсутствуют. Поэтому в дальнейшем будем называть их азимутальными. Второе и четвертое собственное значения, напротив, соответствуют осесимметричным возмущениям с ненулевыми продольными и поперечными компонентами и нулевыми азимутальными. Будем называть их продольно-поперечными.

Изменение параметра упругости M в широких пределах от 0 до 100, что существенно перекрывает диапазон упругостей реальных материалов при умеренных скоростях течения жидкости, слабо влияет на спектральные кривые, соответствующие азимутальным возмущениям. Неустойчивости для них обнаружено не было.

Для продольно-поперечных возмущений структура собственных значений над плоскостью параметров $\{\alpha, M\}$ имеет весьма сложное строение. Они образуют систему бесконечного числа листов, одни из которых (ниже собственные значения, образующие эти листы, называются жидкостными) пересекают плоскость $M=0$ по спектральным кривым системы с абсолютно жесткой оболочкой, а действительные части других (ниже соответствующие собственные значения называются оболочечными) неограниченно возрастают при стремлении M к нулю. Существование оболочечных собственных значений свидетельствует о том, что для систем с податливыми оболочками существуют возмущения, фазовые скорости которых подобно фазовым скоростям возмущений, распространяющимся по сухой оболочке, неограниченно возрастают при затвердевании оболочки. Таких возмущений не может существовать в системах с абсолютно жесткими оболочками, так как для их фазовых скоростей должно выполняться неравенство $0 < c_r < 1$ [6].

При изменении параметра M , которое соответствует переходу от систем с абсолютно жесткими к системам с более податливыми оболочками, спектральные кривые жидкостных собственных значений сначала практически не изменяются, т. е. листы собственных значений близки к цилиндрическим поверхностям. Затем происходит деформация спектральных кривых: листы искривляются, отклоняясь от цилиндрических поверхностей. При дальнейшем увеличении M возникают точки пересечения листов жидкостных собственных значений между собой, а затем и точки пересечения листов жидкостных и оболочечных собственных значений. Для значений M , превосходящих те, при которых возникают кратные собственные значения, становится возможным, выбрав на плоскости $\{\alpha, M\}$ контур, охватывающий кратное собственное значение, перейти путем непрерывного обхода контура с одного листа на другой. При достаточно больших значениях M возникают собственные значения, мнимые части которых становятся положительными, т. е. в системе возникает неустойчивость.

Иллюстрация изменения спектральных кривых по мере увеличения параметра упругости M для данного случая осесимметричных продольно-поперечных возмущений приводится на фиг. 1, а, б. Кривые 1 и 2 представляют собой спектральные зависимости для систем с абсолютно жест-



Фиг. 1

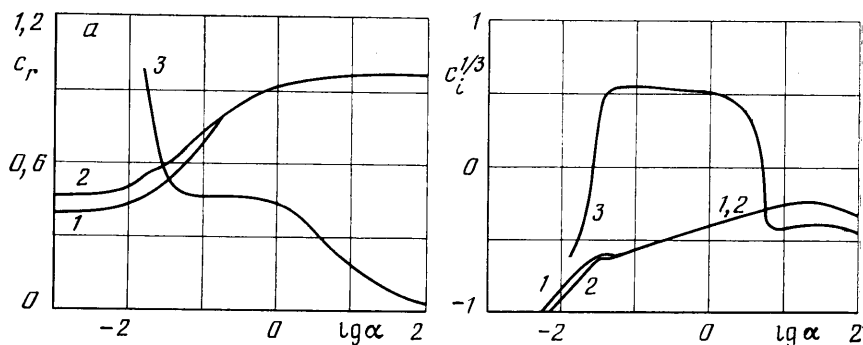
кой оболочкой соответственно для второго и четвертого осесимметричных собственных значений.

Кривые 3, 4 построены путем непрерывного продолжения четвертого собственного значения спектра устойчивости системы с абсолютно жесткой оболочкой по прямым $\alpha=1$ и $12,5$ соответственно от $M=0$ до $M=1,5$ и дальнейшего продолжения по прямой $M=1,5$ для всех рассматриваемых значений α . Пунктирные участки кривых 3 и 4 соответствуют таким собственным значениям, принимая которые за начальные условия, непрерывным переходом по прямым $\alpha=\text{const}$ при $M \rightarrow 0$ получаем значения с кривой 1. Сплошные участки — таким собственным значениям, исходя из которых аналогичным способом получаем собственные значения кривой 2. Точками отмечены такие собственные значения, действительные части которых при непрерывном изменении M от $1,5$ до 0 при $\alpha=\text{const}$ неограниченно возрастают.

Анализ поведения кривых 3 и 4 показывает, что внутри прямоугольника $1 < \alpha < 12,5$; $0 < M < 1,5$ на плоскости $\{\alpha, M\}$ имеется кратное собственное значение, являющееся точкой пересечения листов жидкостных и оболочечных собственных значений. Внутри прямоугольника $0,1 < \alpha < 1$; $0 < M < 1,5$ имеется кратное собственное значение, являющееся точкой пересечения двух листов жидкостных собственных значений, а внутри прямоугольника $0,01 < \alpha < 0,1$; $0 < M < 1,5$ — кратное собственное значение, являющееся точкой пересечения листа жидкостного собственного значения с оболочечным листом.

В области второго максимума кривой 3 при $10 < \alpha < 35$ мнимая часть собственных значений становится положительной, т. е. имеет место неустойчивость по отношению к бесконечно малым осесимметричным продольно-поперечным возмущениям. Этот факт коренным образом отличает систему с податливой оболочкой от системы с абсолютно жесткой оболочкой. Существенным представляется то обстоятельство, что потеря устойчивости для осесимметричных возмущений происходит по оболочечному собственному значению, действительная часть которого при увеличении жесткости оболочки неограниченно возрастает.

Для неосесимметричных возмущений с азимутальными волновыми числами $m=1$ и 2 , спектральные кривые при $\text{Re}=5000$ строились в два этапа: сначала путем непрерывного продолжения собственных значений по параметру M от 0 до 100 при двух фиксированных значениях α , затем с помощью непрерывных продолжений по α при фиксированном значении $M=100$. Расчеты проводились для каждого азимутального волнового числа для четырех первых собственных значений, пронумерованных, как указывалось выше.



Фиг. 2

Для второго, третьего и четвертого собственных значений, соответствующих неосесимметричным возмущениям для $m=1$, влияние параметра упругости оказалось незначительным. Лишь для первой радиальной моды была обнаружена точка слияния с оболочечным корнем. Однако неустойчивости обнаружено не было.

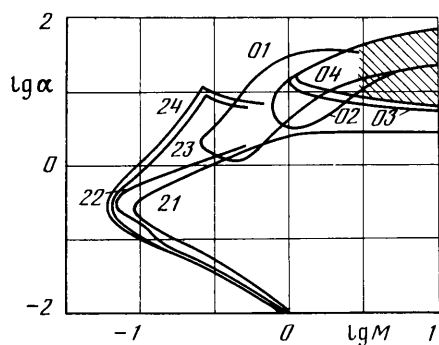
При рассмотрении неосесимметричных возмущений, соответствующих второй азимутальной моде ($m=2$), также было установлено, что наибольшее влияние параметр упругости оказывает на первое собственное значение. Причем оказалось, что при непрерывном продолжении собственного значения в области длинноволновых возмущений при $\alpha=\text{const}$ его мнимая часть становится положительной при значении параметра упругости $M \approx 63,1$. На фиг. 2, а, б представлены спектральные кривые, полученные описанным способом, исходя из первого собственного значения для возмущений с азимутальным волновым числом $m=2$. Кривая 1 представляет собой спектральную кривую для $M=0$, а кривые 2 и 3 — для $M=100$. Кривая 2 получена при «отходе» от системы с абсолютно жесткой оболочкой в области коротковолновых возмущений, а кривая 3 — в области длинноволновых возмущений. В данном случае также имеет место слияние собственных значений.

Области неустойчивости, обнаруженные для осесимметричных продольно-поперечных возмущений, а также для неосесимметричных с азимутальным волновым числом $m=2$, существенно зависят от параметров оболочки и числа Рейнольдса Re невозмущенного течения. С уменьшением параметра упругости M они сужаются и исчезают. Для анализа влияния, оказываемого упругостью оболочки на неустойчивость, были построены границы области неустойчивости на плоскости $\{\alpha, M\}$ для нескольких значений чисел Re . Кривые $m1-m4$ на фиг. 3 представляют собой границы областей неустойчивости для $Re=1, 10, 2500, 5000$ соответственно, причем первая цифра нумерации кривых совпадает с азимутальным волновым числом. Как видим, во всех случаях границы области неустойчивости представляют собой петлеобразные кривые. Области неустойчивости расположены внутри петель. «Носики» границ определяют те наименьшие значения параметра упругости, при которых в системе возможна неустойчивость для данного значения числа Re .

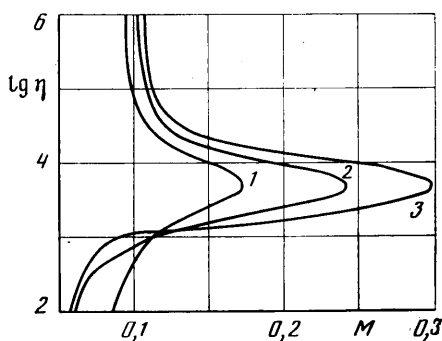
Рассмотрим области неустойчивости по отношению к осесимметричным возмущениям.

При уменьшении чисел Re их «носики» смещаются вниз и влево (фиг. 3), т. е. неустойчивость появляется в системах со все более жесткими оболочками (при фиксированном значении U), причем длины волн неустойчивых возмущений все более увеличиваются. Механизм этой неустойчивости, по-видимому, связан с процессом перекачки энергии от потока к стенкам оболочки посредством вязких напряжений.

При увеличении чисел Re области неустойчивости деформируются,



Фиг. 3



Фиг. 4

сужаются и сдвигаются вправо в области, соответствующие системам с более податливыми оболочками. Расчеты, проведенные вплоть до $Re=10^6$, показали, что все области неустойчивости для $Re>5000$ охватывают область, прилежащую к верхней части кривой 04 на фиг. 3. Следовательно, для точек этой области можно с большой вероятностью предположить, что механизм неустойчивости невязкий. Он обусловлен консервативным переносом энергии от потока к оболочке посредством давления подобно тому, как это имеет место при неустойчивости Кельвина — Гельмгольца [7], а вязкие напряжения здесь играют вспомогательную роль. Для остальных точек областей неустойчивости по отношению к осесимметричным возмущениям, незаштрихованным на фиг. 3, неустойчивость вязкая. С ростом числа Re она исчезает.

Случай для неосесимметричных возмущений существенно отличается от рассматриваемого выше тем, что неустойчивость возможна только в системах, для которых параметр упругости M превосходит определенное положительное значение $M_0>0,04$. Даже при малых значениях чисел Re неустойчивость имеет место лишь в системах с достаточно податливыми оболочками. С ростом Re носики областей неустойчивости передвигаются справа налево, приближаясь к своему предельному значению M_0 . Расчеты проводились до значений $Re=2 \cdot 10^6$. Следует отметить, что для значений чисел Re , соответствующих экспериментально наблюдаемому переходу ламинарного течения в жестких трубах в турбулентное ($Re=2300$ [8]), неустойчивость по отношению к неосесимметричным возмущениям имеет место в системах с существенно более жесткими оболочками, чем неустойчивость по отношению к осесимметричным возмущениям. Подчеркнем, однако, что даже случай неустойчивости к неосесимметричным возмущениям осуществим лишь в системах, оболочки которых изготовлены из чрезвычайно податливого материала, например из резины.

Расчеты зависимостей собственных значений от чисел Re при возрастании последних показали, что в окрестности носиков границы областей неустойчивости по отношению к неосесимметричным возмущениям мнимые части собственных значений становились положительными и монотонно возрастающими. При достижении значений $Re=2 \cdot 10^6$ они практически переставали изменяться. Следовательно, механизм неустойчивости для значений параметров из окрестности носиков границ неустойчивости, по-видимому, является невязким. Этим данный случай также существенно отличается от случая осесимметричных возмущений, где невязкая неустойчивость проявляется лишь для систем со сверхгибкими оболочками ($M \sim 10$).

Отметим, что все приведенные выше результаты были получены для фиксированных значений всех параметров оболочки, за исключением параметра упругости M . Значения остальных безразмерных параметров, таких, как плотность, коэффициент Пуассона, внутренняя вязкость мате-

риала оболочки, а также ее толщина, принимались следующими: $\rho=10$; $\nu_0=0,3$; $\eta=0$; $\delta=0,01$. Изменение этих значений параметров оказывает определенное влияние на неустойчивость. Приведем некоторые результаты исследований, относящихся к этому вопросу.

Увеличение толщины, допустимое рамками теории тонких оболочек, а также плотности материала оболочки приводит к расширению областей устойчивости. Соответствующие расчеты проводились для чисел Re , лежащих в диапазоне 1000–5000. Что касается влияния внутренней вязкости, то оно оказалось несколько сложнее. Для осесимметричных возмущений обнаружено, что увеличение η может способствовать устойчивости системы. Для неосесимметричных возмущений при $m=2$ установлено, что существует диапазон значений η , при котором «носки» нейтральных кривых в плоскости $\{\alpha, M\}$ при $\alpha=0,23$ (фиг. 4), построенных при $\eta=0$, существенно сдвигаются вправо, т. е. имеет место расширение областей устойчивости. Соответствующие зависимости M от η при фиксированных значениях остальных параметров приведены на фиг. 4. Кривым 1–3 соответствуют значения чисел $Re=1000, 2000, 2600$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
2. Garg V. K., Rouleau W. T. Stability of Poiseuille flow in a thin elastic tube.— *Phys. Fluids*, 1974, v. 17, № 6, p. 1103–1108.
3. Вильгельми Т. А., Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость течения в круглой трубе.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1973, № 1, с. 20–24.
4. Лутовинов В. М. О методе локализации собственных значений и одной задаче линейной теории гидродинамической устойчивости.— *Уч. зап. ЦАГИ*, 1971, т. 2, № 2, с. 76–80.
5. Salwen H., Grosch Ch. E. The stability of Poiseuille flow in a pipe of circular cross-section.— *J. Fluid Mech.*, 1972, v. 54, № 1, p. 93–112.
6. Yih Chia-Shun. Wave velocity in parallel flows of viscous fluid.— *J. Fluid Mech.*, 1973, v. 58, № 4, p. 703–708.
7. Benjamin T. B. The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows.— *J. Fluid Mech.*, 1963, v. 16, № 3, p. 436–450.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.X.1985