

УДК 533.6.011.55:536.24

**ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА  
НЕРАВНОМЕРНЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ГАЗА**

ПИЛЮГИН Н. Н., ТАЛИПОВ Р. Ф.

Закономерности теплообмена при взаимодействии недорасширенных сверхзвуковых струй газа с препятствиями и затупленными телами исследовались, например, в [1–3]. Аналогичные задачи о неравномерном обтекании тел возникают при их движении за другими телами, однако закономерности теплообмена в этом случае изучены пока мало [4–8]. Установлено, что при определенном числе Рейнольдса и параметрах неравномерности течения в лобовой части затупленного тела возникает зона возвратно-циркуляционного течения. Однако условия перехода к отрывному течению не определены.

В данной работе представлено автомодельное решение уравнений вязкого ударного слоя вблизи критической линии при сверхзвуковом обтекании осесимметричного затупленного тела, расположенного за другим телом, и на его основе предложен критерий безотрывного обтекания. Изучено влияние неравномерности и числа Рейнольдса на величину отхода скачка, конвективный тепловой поток и сопротивление трения затупленного тела.

1. Рассматривается стационарное течение в ударном слое между отошедшей ударной волной и поверхностью затупленного осесимметричного тела. Параметры набегающего потока задаются формулами [5, 6]

$$V(z) = 1 - a \exp(-bz^2), \quad p_1(z) = \text{const}$$

$$\rho_1(z) = B / \left[ 1 + C \left( 1 - \frac{V^2}{(1-a)^2} \right) \right], \quad B = 1 + C \left\{ 1 - \frac{1}{(1-a)^2} \right\} \quad (1.1)$$

Здесь  $VV_\infty$ ,  $\rho_1\rho_\infty$ ,  $p_1\rho_\infty V_\infty^2$  — соответственно скорость, плотность и давление газа в набегающем потоке,  $R_0z$  — расстояние от оси симметрии потока,  $R_0$  — радиус кривизны обтекаемого тела в носке,  $V_\infty$ ,  $\rho_\infty$  — скорость и плотность газа при  $z \rightarrow \infty$ . Параметры  $a$ ,  $b$  и  $C$  определяют профили скорости и энтальпии поперек потока.

В дальнейшем рассматривается дальний след ( $p_1(z) = \text{const}$ ), так что основной параметр неравномерности  $a$  удовлетворяет условию  $a \ll 1$ . Течение в ударном слое описывается уравнениями Навье — Стокса. На скачке уплотнения используются обобщенные соотношения Рэнкина — Гюгонио, а на теле — обычные условия прилипания. В задаче имеются два малых параметра — отношение плотностей  $\varepsilon = B/\rho_\infty$  до и после скачка на оси симметрии и обратное число Рейнольдса, вычисленное по параметрам за скачком уплотнения. Числа Рейнольдса предполагаются умеренными, так что отношение  $k = (\text{Re } \varepsilon)^{-1}$  остается конечным. Система уравнений движения в тонком ударном слое в переменных Дородницына  $x$ ,  $\eta$  и  $W$  имеет вид [9, 10]

$$\eta = \int_0^y \rho dy, \quad W = \rho v + u \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u r_w) + \frac{\partial}{\partial \eta} (W r_w) = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + W \frac{\partial u}{\partial \eta} = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\begin{aligned} \kappa u^2 &= \frac{\partial p}{\partial \eta}, & m_0 &= \frac{\mu \rho}{\varepsilon \text{Re}}, & \text{Pr} &= \frac{C_p \mu_0}{\lambda}, & \text{Re} &= \frac{\rho_\infty V_\infty R}{\mu_0} \quad (1.2) \\ u \frac{\partial H}{\partial x} + W \frac{\partial H}{\partial \eta} &= m_0 \left[ \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( u \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] \\ H &= h + u^2, & h &= \frac{p}{\rho}, & \varepsilon &= \frac{\gamma - 1}{2\gamma}, & \kappa &= \frac{1}{R} \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей,  $\text{Re}$ ,  $\text{Pr}$  — числа Рейнольдса и Прандтля,  $xR_0$ ,  $\varepsilon yR_0$  — координаты, связанные с поверхностью тела,  $R_0$  — характерная длина,  $uV_\infty$ ,  $\varepsilon V_\infty v$  — составляющие скорости вдоль координат  $x$  и  $y$ ,  $p\rho_\infty V_\infty^2$  — давление,  $\rho\rho_\infty/\varepsilon$  — плотность,  $hV_\infty^2/2$  — энтальпия,  $\mu\mu_0$  — вязкость,  $r_w R_0$  — расстояние от поверхности тела до оси;  $\kappa$  — кривизна поверхности тела;  $\mu_0$  — коэффициент вязкости на оси симметрии за скачком,  $C_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности. Число Прандтля  $\text{Pr}$  и произведение  $\mu\rho$  считаются постоянными.

В уравнении количества движения системы опущен член  $\varepsilon \partial p / \partial x$ , который «необходимо учитывать лишь в тонком подслое вблизи поверхности тела» [11].

Модифицированные соотношения Рэнкина — Гюгонио на ударной волне в приближении тонкого ударного слоя имеют вид

$$\begin{aligned} W_s &= u_s \left( \rho_s \frac{dy_s}{dx} + \frac{d\eta}{dx} \right) - \rho_1 V \sin \beta, \\ u_s &= V \cos \beta, & \rho_s &= \rho_1 V^2 \sin^2 \beta, \\ \rho_1 V \sin \beta (H_1 - H_s) &= m_0 \left( \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial h_s}{\partial \eta} + 2u_s \frac{\partial u_s}{\partial \eta} \right) \\ H_1 &= h_1 + V^2, & H_s &= h_s + u_s^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\beta$  — угол между касательной к образующей скачка и осью симметрии,  $y = y_s(x)$  — уравнение образующей ударной волны,  $1/2 h_1 V_\infty^2$  — энтальпия в набегающем потоке.

На поверхности тела ставятся обычные условия прилипания  $\eta = 0$ ,  $u = W = 0$ ,  $h = h_w$ , где  $h_w$  — безразмерная энтальпия стенки.

2. Автомодельное решение задачи ищется в соответствии с видом граничных условий в форме разложений по степеням  $x$  [11]

$$\begin{aligned} W &= -f_0(\eta) + f_2(\eta)x^2 + \dots, & p &= p_0(\eta) - p_2(\eta)x^2 + \dots \\ u &= u_1(\eta)x + \dots, & h &= h_0(\eta) - h_2(\eta)x^2 + \dots \end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в систему (1.2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , для функций  $f_0$ ,  $p_2$ ,  $u_1$  и  $h_0$  получим систему уравнений с граничными условиями на теле и на скачке

$$\begin{aligned} 2u_1 - f_0' &= 0, & u_1^2 - f_0 u_1' - m_0 u_1'' &= 0 \\ u_1^2 \kappa + p_2' &= 0, & f_0 h_0' + \frac{m_0}{\text{Pr}} h_0'' &= 0 \\ \eta &= 0, & f_0 = u_1 &= 0, & h_0 &= h_w \\ \eta = \eta_s &= \int_0^{y_s(x)} \rho dy, & f_0(\eta_s) &= B(1-a) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
 u_1(\eta_s) &= (1-a) \frac{\kappa}{\kappa_s} - \frac{m_0}{B(1-a)} u_1'(\eta_s), \quad p_0(\eta_s) = B(1-a)^2 \\
 p_2(\eta_s) &= -B(1-a)^2 \left[ \frac{2ab(1+C)}{1-a} - \frac{\kappa_s^2}{\kappa^2} \right] \\
 h_0(\eta_s) &= \frac{h_\infty}{B} - \frac{m_0}{Pr(1-a)B} h_0'(\eta_s) + (1-a)^2
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Отметим, что граничные условия ставятся на неизвестной границе  $\eta = \eta_s$ . Неизвестным остается и отношение  $\kappa/\kappa_s = \sigma$ . В случае равномерного обтекания осесимметричных тел часто полагают  $\sigma = 1$  [11].

Согласно формулам из [11], при равномерном сверхзвуковом обтекании  $\sigma \approx 1,3$  при  $\gamma_\infty = 1,4$ . В то же время при обтекании сферически затупленного тела неравномерным потоком отношение  $\sigma$  уменьшается с увеличением параметра  $a$  [4, 5]. Поэтому при обтекании сферического затупления можно полагать  $\sigma = 1$ . В дальнейшем будем предполагать, что  $\sigma$  постоянно и определяется по эмпирическим формулам [11]. Решение системы (2.1) с граничными условиями (2.2) имеет вид

$$\begin{aligned}
 f_0(\eta) &= \frac{B(1-a)}{\Delta^2} \eta^2, \quad \Delta = \eta_s = \frac{B}{2\sigma} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4m_0\sigma}{B^2(1-a)}} \right] \\
 u_1(\eta) &= \frac{B(1-a)}{\Delta^2} \eta, \quad p_0(\eta) = B(1-a)^2 = \text{const} \\
 p_2(\eta) &= -\frac{\kappa B^2(1-a)^2}{3\Delta} \left[ \frac{\eta^3}{\Delta^3} - 1 \right] - \frac{B\kappa}{\sigma^2} (1-a)^2 \left[ \frac{\sigma^2 2ab(1+C)}{1-a} - 1 \right] \\
 \frac{h_0 - h_w}{h_\infty/B + (1-a)^2 - h_w} &= \frac{\gamma^{1/2}(t)}{\gamma^{1/2}(\omega) + \omega^{-2/3} e^{-\omega}}, \quad t = \omega \frac{\eta^3}{\Delta^3} \\
 \gamma^{1/2}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{t^{n+1/3}}{n+1/3}, \quad \omega = \frac{Pr B(1-a)}{3m_0}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

где  $\gamma^{1/2}$  — гамма-функция [10]. В случае обтекания сферы ( $\kappa = 1$ ) разложение газодинамических функций можно проводить по  $\sin x$  и  $\cos x$ , как это сделано в [10]. Если положить в приведенном решении  $a = 0$  и  $\sigma = 1$ , то получим формулы работы [10], если в них дополнительно считать  $\sin x \approx x$  и  $\cos x \approx 1$ .

Характерной особенностью неравномерного обтекания данного типа является возможность возникновения замкнутой возвратно-циркуляционной зоны за ударной волной в окрестности критической точки. Образование зоны предшествует смещение максимального значения давления с оси симметрии в область присоединения потока и образование области малых скоростей около критической точки — «застойной зоны» [4–6].

На фиг. 1 приведены значения давления на теле  $p(\eta = 0) = p_w$ , рассчитанного по формулам (2.3), при равномерном  $a = 0$  (кривая 1) и неравномерном потоке (кривая 2 —  $a = 0,03$ ,  $C = 3,0$ , кривая 3 —  $a = 0,05$ ,  $C = 3,0$ ). Отметим, что неравномерность приводит к возникновению градиента давления на теле, направленного в критическую точку.

На основе решения (2.3) можно исследовать поведение продольного градиента давления на поверхности тела. Возвратно-циркуляционная зона тела при неравномерном обтекании образуется после изменения знака  $\partial^2 p / \partial x^2 \Big|_{\eta=0}$ . Параметры  $a$ ,  $b$ ,  $C$ , при которых заведомо нет отрыва, определяются из условия

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \Big|_{\eta=0} = 0 \tag{3.1}$$

Подставляя в (3.1) решение (2.3), получим  $p_2(\eta = 0) = 0$ .

Из этого условия, используя разложение при  $a \ll 1$ , находим такое критическое значение  $a_*$ , меньше которого осуществляется безотрывное течение в ударном слое

$$a_* = \frac{^{3/2}(1+\alpha)\sigma^{-2} + \sigma\kappa}{3b(1+C)(1+\alpha) + q}, \quad q = \frac{2m_0\sigma^2\kappa(1+4C)}{(1+\alpha)\alpha}, \quad \alpha = \sqrt{1+4m_0\sigma} \quad (3.2)$$

На фиг. 2 приведена зависимость  $a_*$  от параметра  $m_0$ , связанного с числом Рейнольдса, при  $\sigma=1$  (кривая 1) и  $\sigma=1,3$  (кривая 2) для  $\kappa=1$ ,  $b=7,2$ ,  $C=3$ . Стрелкой указана область безотрывного течения.

Используя зависимость  $a$ ,  $b$  и  $C$  от расстояния между телами  $x_1$  [12] и формулу (3.2), можно найти расстояние  $x_1$ , начиная с которого реализуется безотрывное обтекание тела.

Физический отход скачка уплотнения на оси симметрии, определяющий толщину вязкого ударного слоя с учетом уравнения состояния и формул (2.3) представлен в виде

$$\delta = \int_0^{\Delta} \frac{d\eta}{\rho} = \frac{2\Delta}{\rho_0} \left\{ h_w + (H_\infty - h_w) \frac{3\omega e^\omega I_2(\omega)}{1 + 3\omega e^\omega I_1(\omega)} \right\}$$

$$I_1(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\omega^n}{3n+1}, \quad H_\infty = \frac{h_\infty}{B} + (1-a)^2 \quad (3.3)$$

$$I_2(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\omega^n}{(3n+1)(3n+2)}, \quad \omega = \frac{\text{Pr} B(1-a)\Delta}{3m_0}$$

Отметим, что с ростом неравномерности наблюдается увеличение отхода скачка. Увеличение вязкости  $m_0$  приводит к уменьшению отхода скачка. Функции  $I_1$  и  $I_2$  исследованы в [10]. Локальный коэффициент теплообмена в критической точке определяется по формуле

$$C_H = \frac{2q_w}{\rho_\infty V_\infty^3} = \frac{m_0}{\text{Pr}} \frac{\partial h}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{(H_\infty - h_w) e^\omega B(1-a)}{1 + I_1(\omega) 3\omega e^\omega} \quad (3.4)$$

При больших значениях  $\omega$  формула (3.4) принимает вид

$$C_H = \frac{(H_\infty - h_w) B(1-a)}{2,68\omega^{2/3}} \quad (3.5)$$

На фиг. 3 приведены значения  $C_H$  в зависимости от параметра  $a$  при  $\text{Pr}=0,7$ ,  $h_w/H_\infty=0,15$ . Кривые 1, 2 соответствуют  $\text{Re}=50$  и значениям параметра  $C=1,8$  и  $3,0$ . Кривые 3, 4 соответствуют параметру  $\text{Re}=100$  и тем же значениям параметра  $C$ . Тепловой поток в критическую точку убывает с ростом параметра  $a$ . При  $a < 0,05$  влияние параметра  $C$  на коэффициент теплообмена  $C_H$  мало. Увеличение  $\text{Re}$  ведет к уменьшению тепловых потоков в критическую точку.

Местный коэффициент трения в окрестности критической точки можно представить в виде

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho_\infty V_\infty^2} = 2m_0 \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{2m_0 B(1-a)}{\Delta^2} \quad (3.6)$$

Отметим, что с ростом  $\text{Re}$  величина  $C_f$  уменьшается пропорционально  $\text{Re}^{-1}$ .

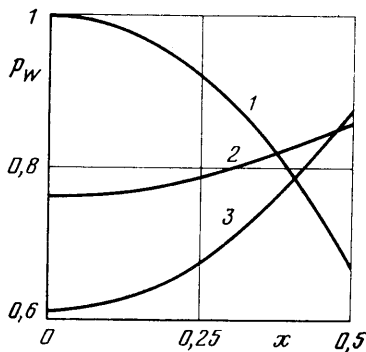
Коэффициент давления  $C_p$ , вычисленный на основе формул (2.3), будет равен

$$C_p = \frac{2p(0)}{\rho_\infty V_\infty^2} = 2B(1-a)^2 \left\{ 1 - \left[ \frac{\kappa B}{3\Delta} + \frac{1}{\sigma^2} - \frac{2ab(1+C)}{1-a} \right] x^2 \right\} \quad (3.7)$$

Если в этих формулах использовать разложение  $\sin x \approx x$ ,  $\cos x \approx 1 - x^2/2$ ,  $x \approx \theta$  и свернуть формулы, то можно вычислить суммарный коэффициент сопротивления по формуле

$$C_x = 2 \int_0^{\theta_N} C_p(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta + 2 \int_0^{\pi/2} C_f \sin^2 \theta d\theta \quad (3.8)$$

Здесь  $\theta_N$  — угол на сфере, где давление обращается в нуль (так называемая ньютоновская точка отрыва). Величина  $\theta_N$  находится по формуле (3.7) из условия  $C_p = 0$



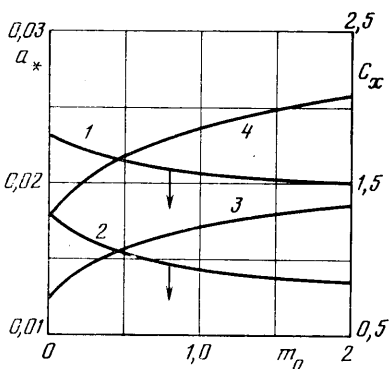
Фиг. 1

$$\theta_N = \arcsin \left[ \frac{B}{3\Delta} + 1 - \frac{2ab(1+C)}{1-a} \right]^{-1/2}$$

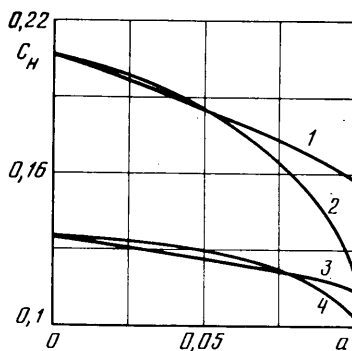
Видно, что положение точки равенства нулю давления на сфере зависит от  $m_0$  и от параметров неравномерности потока  $a$ ,  $b$ ,  $C$ . Вычисление интегралов в (3.8) дает

$$C_x = \frac{B(1-a)^2 \Delta}{1/3 B + \Delta - 2ab\Delta(1+C)(1-a)^{-1}} + \frac{m_0 B(1-a)}{\Delta^2} \quad (3.9)$$

При  $m_0 \rightarrow \infty$  эти соотношения переходят к соответствующим формулам свободно-



Фиг. 2



Фиг. 3

молекулярного течения, а при  $a \rightarrow 0$ ,  $C \rightarrow 0$  — к формулам равномерного обтекания из [10]. На фиг. 2 приведена зависимость  $C_x = C_x(m_0, a)$ , рассчитанная по формуле (3.9) при  $b=7,2$  и  $C=3,0$ . Кривая 3 на этом рисунке соответствует  $a=0$  (равномерное обтекание), 4 —  $a=0,01$ . Видно, что увеличение неравномерности набегающего потока приводит к увеличению коэффициента сопротивления  $C_x$ .

В заключение авторы благодарят И. Г. Еремейцева за полезные замечания и Г. А. Тирского за обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Антохин В. М., Герасимов Ю. И., Жохов В. А., Хомутский А. А. Тепловое воздействие свободно расширяющейся струи газа на плоскую преграду. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 4, с. 119–126.
2. Головачев Ю. П., Леонтьева Н. В. Вязкий ударный слой перед затупленным телом в неравномерном сверхзвуковом потоке. Препринт № 751. Л.: ФТИ АН СССР, 1982. 21 с.

3. Еремейцев И. Г., Пилюгин Н. Н. Трение и теплообмен в ламинарном и турбулентном пограничных слоях при обтекании осесимметричных тел неоднородным сверхзвуковым потоком.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 4, с. 65–72.
4. Головачев Ю. П., Леонтьева Н. В. Численное исследование обтекания затупленного тела, расположенного в области сверхзвукового следа. Препринт № 918. Л.: ФТИ АН СССР, 1984. 35 с.
5. Головачев Ю. П., Леонтьева Н. В. Циркуляционное течение у лобовой поверхности сферы, обтекаемой сверхзвуковым потоком тупа следа.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 3, с. 143–148.
6. Lin T. C., Reeves B. L., Siegelman D. Blunt-body problem in nonuniform flowfields.— AIAA Journal, 1977, v. 15, № 8, p. 1130–1137.
7. Кудрявцев В. Н., Черкез А. Я., Шилов В. А. Исследование сверхзвукового обтекания двух разделяющихся тел.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 2, с. 91–99.
8. Хлебников В. С. Осесимметричное обтекание пары тел сверхзвуковым потоком газа.— Уч. зап. ЦАГИ, 1978, т. 9, № 6, с. 108–114.
9. Cheng H. K. The blunt-body problem in hypersonic flow at low Reynolds number.— Inst. Aerospace Sci., Paper, 1963, № 63–92, 100 p.
10. Магомедов К. М. Гиперзвуковое обтекание тупых тел вязким газом.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 2, с. 45–56.
11. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
12. Пилюгин Н. Н., Тихомиров С. Г., Чернявский С. Ю. Приближенный метод расчета параметров воздуха и интенсивности излучения в дальнем следе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 6, с. 165–175.

Москва

Поступила в редакцию  
5.II.1986