

УДК 532.72

О НЕСТАЦИОНАРНОМ МАССООБМЕНЕ КАПЛИ (ПУЗЫРЯ) В ТРЕХМЕРНОМ СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

ПОЛЯНИН А. Д., ШЕВЦОВА В. М.

В приближении диффузионного пограничного слоя получено точное аналитическое решение задачи о нестационарном конвективном массообмене сферической капли (пузыря) с произвольным трехмерным линейным деформационным сдвиговым потоком, невозмущенное поле скоростей которого задается симметричным тензором сдвига. Определена зависимость среднего числа Шервуда от времени и числа Пекле.

Важно отметить, что до сих пор в литературе отсутствовали конкретные примеры точного интегрирования уравнений трехмерного нестационарного диффузионного пограничного слоя. В [1, 2] исследовались задачи о стационарном массообмене твердой сферической частицы [1] и капли [2] в трехмерном деформационном сдвиговом потоке. В [3] рассматривалась нестационарная диффузия к капле в установившемся осесимметричном потоке с градиентом скорости на бесконечности. Подробное изложение результатов и методов, а также достаточно полная библиография по этому вопросу приведены в [4].

1. Некоторые задачи трехмерного нестационарного диффузионного пограничного слоя. Аналог функции тока. Рассмотрим нестационарную конвективную диффузию к поверхности капли (пузыря) произвольной формы, обтекаемой ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости; излагаемый ниже метод пригоден также для анализа процессов конвективного массо- и теплообмена частиц с идеальной жидкостью.

Будем полагать, что в начальный момент времени $t_* = 0$ концентрация вне капли была постоянна и равна C_∞ , а при $t_* > 0$ на поверхности капли происходит полное поглощение растворенного в жидкости вещества (т. е. реализуется диффузионный режим реакции, что соответствует нулевому значению концентрации на поверхности капли). Как обычно, считаем, что число Пекле $Pe = aU/D$ велико; здесь a — характерный размер капли, например радиус, U — характерная скорость потока, D — коэффициент диффузии. Поле течения для простоты предполагается установившимся и известным из решения соответствующей стационарной гидродинамической задачи.

Для анализа в диффузионном пограничном слое введем локальную ортогональную криволинейную систему безразмерных координат ξ, η, λ , связанную с поверхностью капли и линиями тока [2, 4]. Пусть вектор нормали к поверхности капли определяет направление орта e_ξ . Направление вектора скорости жидкости в этой же точке поверхности капли задает направление орта e_η . Орт e_λ перпендикулярен одновременно e_ξ и e_η . В такой системе координат для вектора скорости жидкости справедливо представление $v = \{v_\xi, v_\eta, 0\}$. Для конкретности далее считаем, что поверхность капли определяется значением $\xi = 0$.

В диффузионном пограничном слое введем вспомогательную функцию ψ как решение системы

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = v_\eta \sqrt{\frac{g^\circ}{g_{\eta\eta}^\circ}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -v_\xi \sqrt{\frac{g^\circ}{g_{\xi\xi}^\circ}}; \quad g = g_{\xi\xi} g_{\eta\eta} g_{\lambda\lambda} \quad (1.1)$$

где $g_{\xi\xi}$, $g_{\eta\eta}$, $g_{\lambda\lambda}$ — компоненты метрического тензора; здесь и далее индекс градус сверху означает, что соответствующие величины берутся на поверхности капли при $\xi=0$. Тогда уравнение неразрывности $\text{div } \mathbf{v}=0$, которое совпадает с условием интегрируемости системы (1.1), удовлетворяется автоматически.

Функция ψ является трехмерным аналогом функции тока; в плоском и осесимметричном случаях она совпадает с обычной функцией тока.

В безразмерных переменных в криволинейной системе координат ξ , η , λ уравнение нестационарного диффузионного пограничного слоя, а также соответствующие начальные и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g^\circ}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial c}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial c}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{g_{\xi\xi}^\circ} \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} \quad (1.2)$$

$$t=0, c=1; \xi=0, c=0; \xi \rightarrow \infty, c \rightarrow 1 \quad (1.3)$$

$$c=C/C_\infty, t=Ut_*/a, \text{Re}=aU/D$$

Здесь C — концентрация, g° и $g_{\xi\xi}^\circ$ — известные функции, зависящие только от двух криволинейных координат η и λ .

При выводе уравнения (1.2), как обычно, пренебрегалось диффузионным переносом вещества вдоль поверхности капли по сравнению с переносом по нормали и учитывались лишь старшие члены разложения компонент метрического тензора при $\xi \rightarrow 0$; кроме того, использовалась связь компонент вектора скорости жидкости с аналогом функции тока (1.1).

Учитывая условие непротекания жидкости через поверхность капли, для составляющих скорости жидкости при $\xi \rightarrow 0$ имеем $v_\xi = \xi O(1)$, $v_\eta = O(1)$. Поэтому в силу (1.1) для аналога функции тока в пограничном слое справедливо следующее представление:

$$\psi = \xi f(\eta, \lambda) \quad (1.4)$$

Для простоты ниже считается, что в рассматриваемой области течения выполняется неравенство $f \geq 0$ ($\xi \geq 0$).

Отметим, что третья криволинейная координата λ входит в уравнение (1.2) лишь параметрически, поэтому в дальнейшем зависимость используемых в работе функций от λ часто не указывается.

2. Метод решения. В уравнении диффузионного пограничного слоя (1.2) перейдем от переменной ξ к новой переменной ζ по формуле

$$\zeta = \sqrt{\text{Re}} \psi \quad (2.1)$$

где функция ψ определяется выражением (1.4). В результате получим

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{f}{\sqrt{g^\circ}} \frac{\partial c}{\partial \eta} = \frac{f^2}{g_{\xi\xi}^\circ} \frac{\partial^2 c}{\partial \zeta^2} \quad (2.2)$$

Распределение концентрации ищем в виде

$$c = c(\zeta, \tau) \quad (2.3)$$

где $\tau = \tau(t, \eta, \lambda)$ — новая временно-подобная переменная, которая находится далее в процессе решения задачи. Подставляя (2.3) в уравнение (2.2), имеем

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{f}{\sqrt{g^\circ}} \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \right) \frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{f^2}{g_{\xi\xi}^\circ} \frac{\partial^2 c}{\partial \zeta^2} \quad (2.4)$$

Потребуем, чтобы функция τ удовлетворяла следующему линейному уравнению в частных производных первого порядка с дополнительным

условием:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{f}{\sqrt{g^0}} \frac{\partial \tau}{\partial \eta} = \frac{f^2}{g_{\xi\xi}^0} \quad (2.5)$$

$$t=0, \quad \tau=0 \quad (2.6)$$

Тогда уравнение (2.4) приводится к стандартному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} \quad (2.7)$$

Начальные и граничные условия для уравнения (2.7) следуют из (1.3) с учетом соотношений (1.4), (2.1), (2.6) и имеют вид

$$\tau=0, \quad c=1; \quad \xi=0, \quad c=0; \quad \xi \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 1 \quad (2.8)$$

Решение задачи (2.7), (2.8) хорошо известно

$$c = \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right), \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi_0}} \int_0^x \exp(-x^2) dx \quad (2.9)$$

Найдем теперь зависимость $\tau = \tau(t, \eta)$ из уравнения (2.5), которое эквивалентно следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dt}{1} = \frac{\sqrt{g^0} d\eta}{f} = \frac{g_{\xi\xi}^0}{f^2} d\tau \quad (2.10)$$

Интегрируя первые два и последние два уравнения (2.10), получаем первые интегралы

$$t - \int \frac{\sqrt{g^0}}{f} d\eta = C_1, \quad \tau - \int \frac{\sqrt{g^0}}{g_{\xi\xi}^0} f d\eta = C_2 \quad (2.11)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Поэтому общее решение уравнения (2.5) имеет вид (Φ — произвольная функция)

$$\tau = \int \frac{\sqrt{g^0}}{g_{\xi\xi}^0} f d\eta + \Phi \left(t - \int \frac{\sqrt{g^0}}{f} d\eta \right)$$

Явный вид функции Φ устанавливается с помощью условия (2.6). В результате для переменной τ получим следующее выражение:

$$\tau = \int_{\tau(\omega)}^{\eta} \frac{\sqrt{g^0}}{g_{\xi\xi}^0} f d\eta, \quad \omega = t - \int \frac{\sqrt{g^0}}{f} d\eta \quad (2.12)$$

где функция $T = T(\omega)$ находится из равенства

$$T \left(- \int \frac{\sqrt{g^0}}{f} d\eta \right) = \eta \quad (2.13)$$

Используя выражения (1.4), (2.1), (2.9), для безразмерного локального диффузионного потока на поверхность капли имеем

$$i = \frac{1}{\sqrt{g_{\xi\xi}^0}} \left(\frac{\partial c}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = \frac{\sqrt{\operatorname{Pe}} f(\eta, \lambda)}{\sqrt{\pi g_{\xi\xi}^0(\eta, \lambda)} \tau(t, \eta, \lambda)} \quad (2.14)$$

Для безразмерного полного диффузионного потока на поверхность капли $S = \{\xi=0, \eta^- \leq \eta \leq \eta^+, 0 \leq \lambda \leq \Lambda\}$ получим

$$I = \int_S j dS = \int_0^{\Lambda} \int_{\eta^-}^{\eta^+} j \sqrt{g_{\eta\eta}^0 g_{\lambda\lambda}^0} d\eta d\lambda = \sqrt{\frac{\operatorname{Pe}}{\pi}} \int_0^{\Lambda} \int_{\eta^-}^{\eta^+} \frac{\sqrt{g^0} f d\eta d\lambda}{g_{\xi\xi}^0 \sqrt{\tau}} \quad (2.15)$$

В двумерном случае ($\partial/\partial\lambda=0$) формулы (2.14), (2.15) переходят в результаты [4].

3. Формулы для вычисления новых переменных и диффузионных потоков в сферической системе координат. Обычно исходная информация о поле течения позволяет непосредственно получить лишь распределение скоростей жидкости вблизи капли в некоторой ортогональной фиксированной системе координат ξ, θ, φ , неподвижно связанной только с ее поверхностью (и не связанной с линиями тока). Поэтому в общем случае трехмерного поля течения необходимо предварительно решить вспомогательную задачу об определении описанной ранее криволинейной системы координат ξ, η, λ и найти разложение аналога функции тока вблизи поверхности капли (1.4); после этого уже можно использовать формулы (2.9), (2.15), (2.16) для расчета основных характеристик нестационарного массопереноса.

Покажем теперь, как вычисляются диффузионные потоки и функции f и τ для капли (пузыря) сферической формы в случае трехмерного обтекания. Будем считать, что известны тангенциальные составляющие вектора скорости жидкости вблизи поверхности капли

$$v_\theta = v_\theta(\theta, \varphi), \quad v_\varphi = v_\varphi(\theta, \varphi) \quad (r \rightarrow 1) \quad (3.1)$$

при записи которых использована безразмерная сферическая система координат r, θ, φ , связанная с центром капли. В рассматриваемом случае координата ξ и компоненты метрического тензора (при $\xi=0$) даются формулами

$$\xi = r - 1; \quad g_{\xi\xi} = 1, \quad g_{\theta\theta} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta \quad (3.2)$$

Искомые ортогональные криволинейные координаты $\eta = \eta(\theta, \varphi)$ и $\lambda = \lambda(\theta, \varphi)$ по определению должны удовлетворять соотношениям

$$\mathbf{v}_\tau = \text{const } \nabla \eta, \quad (\mathbf{v}_\tau \cdot \nabla \lambda) = 0$$

$$\mathbf{v}_\tau = \mathbf{e}_\theta v_\theta + \mathbf{e}_\varphi v_\varphi, \quad \nabla = \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Отсюда для η и λ имеем следующие уравнения в частных производных первого порядка:

$$v_\varphi \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{\sin \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.3)$$

$$v_\theta \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.4)$$

Зависимость искомых криволинейных координат η и λ от сферических координат θ и φ будет определяться первыми интегралами характеристических уравнений

$$v_\theta d\theta = -\sin \theta v_\varphi d\varphi \quad (3.5)$$

$$v_\varphi d\theta = \sin \theta v_\theta d\varphi \quad (3.6)$$

которые соответствуют (3.3) и (3.4).

Считая теперь известными функции $\eta = \eta(\theta, \varphi)$ и $\lambda = \lambda(\theta, \varphi)$, используем то, что квадрат длины на поверхности капли сохраняется при переходе от старой θ, φ к новой η, λ системе координат

$$d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 = g_{\eta\eta} d\eta^2 + g_{\lambda\lambda} d\lambda^2, \quad \left(d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} d\varphi, \quad d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} d\varphi \right) \quad (3.7)$$

Из равенства (3.7) с учетом (3.3), (3.4) после некоторых преобразований получаем искомые выражения для метрических коэффициентов $g_{\eta\eta}$ и $g_{\lambda\lambda}$

$$g_{\eta\eta} = \frac{v_\theta^2}{v^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right)^{-2} = \sin^2 \theta \frac{v_\varphi^2}{v^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right)^{-2}, \quad v^2 = v_\theta^2 + v_\varphi^2$$

$$g_{\lambda\lambda} = \frac{v_\varphi^2}{v^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right)^{-2} = \sin^2 \theta \frac{v_\theta^2}{v^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \right)^{-2} \quad (3.8)$$

Подставляя теперь выражение (1.4) в первое уравнение (1.1), с учетом равен-

ства $v_\eta = |v^\circ|$ находим функцию f , которая задает аналог функции тока

$$f = v \frac{\sqrt{g^\circ}}{\sqrt{g_{\eta\eta}^\circ}}, \quad v = v_\eta = \sqrt{v_\theta^2 + v_\varphi^2} \quad (3.9)$$

В интегралах, которые определяют временно-подобную переменную τ (2.12) и фигурируют в формулах (2.11)–(2.15), следует перейти от переменной интегрирования η к сферической координате θ (или φ), используя следующие соотношения, справедливые при $\lambda = \text{const}$:

$$\sqrt{g_{\eta\eta}^\circ} d\eta = \frac{v}{v_\theta} d\theta = \sin \theta \frac{v}{v_\varphi} d\varphi \quad (3.10)$$

Формулы (3.10) выводятся из (3.7) с учетом того обстоятельства, что на интегральных кривых характеристического обыкновенного дифференциального уравнения (3.6), соответствующего уравнению в частных производных (3.4), выполняется равенство $\lambda = \text{const}$.

Используя выражения (3.8)–(3.10), для интегралов в (2.12) имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{g^\circ}}{f} d\eta &= \int \frac{\sqrt{g_{\eta\eta}^\circ}}{v} d\eta = \int \frac{d\theta}{\{|v_\theta|\}_\lambda} = \int \left\{ \frac{\sin \theta}{|v_\varphi|} \right\}_\lambda d\varphi \\ \int \frac{\sqrt{g^\circ}}{g_{\xi\xi}^\circ} f d\eta &= \int v_{g\lambda}^\circ \sqrt{g_{\eta\eta}^\circ} d\eta = \int \sin^2 \theta \left\{ |v_\theta| \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \right)^{-2} \right\}_\lambda d\theta = \\ &= \int \left\{ \sin \theta |v_\varphi| \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right)^{-2} \right\}_\lambda d\varphi \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь запись $\{F\}_\lambda d\varphi$ (или $\{F\}_\lambda d\theta$) в подынтегральных выражениях означает, что функция $F(\theta, \varphi)$ при помощи зависимости $\lambda = \lambda(\theta, \varphi)$ записана в переменных λ и φ (или λ и θ) и при интегрировании λ считается как параметр.

Якобиан, соответствующий переходу от координат η, λ к θ, φ , вычисляется по формулам

$$\frac{\partial(\eta, \lambda)}{\partial(\theta, \varphi)} = \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}^\circ}} \frac{v}{v_\theta} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} = - \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}^\circ}} \frac{v}{v_\varphi} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}$$

Переходя в подынтегральном выражении (2.15) к сферическим координатам θ, φ с учетом соотношений (3.4), (3.8), (3.9), получим следующие формулы для расчета интегрального диффузионного потока на поверхность капли:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{\text{Pe}}{\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sqrt{g^\circ} f}{g_{\xi\xi}^\circ \sqrt{\tau}} \left| \frac{\partial(\lambda, \eta)}{\partial(\theta, \varphi)} \right| d\theta d\varphi = \\ &= \sqrt{\frac{\text{Pe}}{\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{v}{\sqrt{\tau}} g_{\lambda\lambda}^\circ \sqrt{g_{\eta\eta}^\circ} \left| \frac{\partial(\eta, \lambda)}{\partial(\theta, \varphi)} \right| d\theta d\varphi = \\ &= \sqrt{\frac{\text{Pe}}{\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta |v_\theta|}{\sqrt{\tau}} \left| \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \right|^{-1} d\theta d\varphi = \sqrt{\frac{\text{Pe}}{\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta |v_\varphi|}{\sqrt{\tau}} \left| \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right|^{-1} d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (3.12)$$

Таким образом, процедура вычисления наиболее важной характеристики процесса массопереноса — интегрального потока (или среднего числа Шервуда) — производится в четыре этапа. Сначала определяются компоненты скорости жидкости на поверхности капли (3.1). Далее находится общее решение характеристического уравнения (3.6), заменяя в котором произвольную постоянную интегрирования на λ , получаем зависимость $\lambda = \lambda(\theta, \varphi)$. На третьем этапе вычисляется переменная τ (2.12) с учетом выражений (2.13), (3.11) (напомним, что подынтегральные вы-

ражения в (3.11) должны быть предварительно записаны только через координату λ и ту переменную, по которой ведется интегрирование). На последнем этапе производится непосредственное вычисление диффузионного потока с помощью любого двойного интеграла из (3.12).

Проиллюстрируем теперь, как используются полученные выше результаты для решения конкретных задач нестационарного трехмерного диффузионного пограничного слоя.

4. Нестационарный массоперенос к сферической капле в произвольном деформационном сдвиговом потоке. Рассмотрим нестационарную диффузию к сферической капле (пузырю) в произвольном установившемся линейном деформационном сдвиговом потоке, невозмущенное поле скоростей которого на бесконечности имеет вид

$$r \rightarrow \infty, v_i = E_{ij}x_j + o(1); \quad E_{ij} = E_{ji} \quad (E_{11} + E_{22} + E_{33} = 0) \quad (4.1)$$

где v_i и E_{ij} — безразмерные компоненты скорости и тензора сдвига (способ нормировки которых будет указан далее), записанные в декартовой системе координат, связанной с центром капли; здесь и далее по повторяющимся индексам i и j ($i, j = 1, 2, 3$) ведется суммирование. Равенство суммы диагональных элементов тензора нулю является следствием условия несжимаемости жидкости $\operatorname{div} v = 0$; симметрия компонент тензора сдвига относительно перестановки индексов i и j соответствует отсутствию вращательной составляющей скорости жидкости вдали от капли.

В стоксовом приближении решение гидродинамической задачи об установившемся обтекании сферической капли деформационным сдвиговым потоком (4.1) дается выражением [5]

$$v_i = E_{ij}x_j \left(1 - \frac{\beta}{\beta+1} \frac{1}{r^5} \right) - \frac{5}{2} E_{jkh} x_i x_j x_k \left(\frac{\beta+2/3}{\beta+1} \frac{1}{r^5} - \frac{\beta}{\beta+1} \frac{1}{r^7} \right) \quad (4.2)$$

где β — отношение вязкостей капли и окружающей жидкости (значение $\beta=0$ соответствует газовому пузырю), $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$.

Симметричный тензор E путем надлежащего поворота системы координат всегда может быть приведен к диагональному виду с компонентами E_1, E_2, E_3 . Диагональные элементы E_m ($m=1, 2, 3$) определяют интенсивности растягивающего (сжимающего) движения вдоль главных осей тензора E . Значения E_m являются корнями кубического уравнения $\det \|E_{ij} - \delta_{ij} E_m\| = 0$. Симметричный тензор сдвига имеет три скалярных инварианта

$$J_1 = E_{ij} \delta_{ij} = E_1 + E_2 + E_3 = 0, \quad J_2 = (E_{ij} E_{ij})^{1/2} = (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2)^{1/2},$$

$$J_3 = |\det \|E_{ij}\||^{1/2} = |E_1 E_2 E_3|^{1/2} \quad (4.3)$$

которые остаются неизменными при любых поворотах (с отражениями) исходной декартовой системы координат. Ввиду несжимаемости жидкости $J_1 = 0$, поэтому только два диагональных элемента из трех будут независимыми.

Далее декартову систему координат, связанную с главными осями тензора сдвига, обозначаем X_1, X_2, X_3 (фиг. 1) и для определенности считаем, что $E_1 \geq E_2 \geq 0, E_3 < 0$.

В сферической системе координат r, θ, φ , связанной с главными осями тензора сдвига, тангенциальные составляющие вектора скорости жидкости (4.2) на поверхности капли (при $r=1$) имеют вид

$$v_\theta = \frac{1}{4(\beta+1)} \sin 2\theta [-3E_3 + (E_1 - E_2) \cos 2\varphi], \quad v_\varphi = \frac{1}{2(\beta+1)} \sin \theta \sin 2\varphi (E_2 - E_1) \quad (4.4)$$

Видно, что поле течения трехмерно при $E_2 \neq E_1$. Следует отметить, что решение нестационарной задачи о массообмене сферической капли в

осесимметричном сдвиговом потоке, т. е. при $E_1 = E_2 = -E_3/2$ в (4.4), было получено в [3, 4].

Используя формулы (3.12), получим зависимость среднего числа Шервуда $Sh = I/(4\lambda)$ от времени. Будем считать, что сначала концентрация во всем потоке (4.2) была одинаковой, а затем на поверхности капли стала протекать реакция в диффузионном режиме. Для этого используем процедуру, описанную в конце п. 3.

Характеристическое уравнение (3.6), определяющее зависимость искривленной координаты λ от сферических координат θ, φ , с учетом (4.4), имеет вид

$$\frac{2 d\theta}{\sin 2\theta} = \frac{3E_3 + (E_2 - E_1) \cos 2\varphi}{(E_1 - E_2) \sin 2\varphi} d\varphi \quad (4.5)$$

Рассмотрим пока область течения в первом квадранте $0 \leq \theta, \varphi \leq \pi/2$.

Общее решение уравнения (4.5) может быть представлено в форме $\text{tg}^2 \theta \text{tg}^* \varphi \sin 2\varphi = C$, где $\kappa = 3E_3/(E_2 - E_1)$, а C — произвольная постоянная. Зависимость криволинейной координаты λ от θ и φ получаем, полагая в общем решении $C = \lambda$:

$$\lambda = \text{tg}^2 \theta \text{tg}^* \varphi \sin 2\varphi, \quad \kappa = 3(E_1 + E_2)/(E_1 - E_2) \quad (4.6)$$

Здесь при записи показателя κ была исключена третья компонента метрического тензора с помощью равенства (4.3) $E_3 = -E_1 - E_2$.

На фиг. 1 показано качественное поведение предельных линий тока на поверхности капли в первом квадранте $0 \leq \theta, \varphi \leq \pi/2$; величина новой переменной λ (4.6) изменяется в пределах от нуля до бесконечности.

Интегрируя характеристическое уравнение (3.5), (4.4)

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = \frac{\sin 2\varphi d\varphi}{\kappa + \cos 2\varphi}, \quad \kappa = 3 \frac{E_1 + E_2}{E_1 - E_2} \quad (4.7)$$

для другой криволинейной координаты η имеем

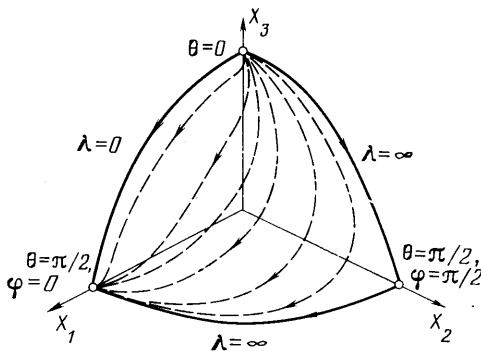
$$\eta = \sin^2 \theta (\kappa + \cos 2\varphi) \quad (4.8)$$

Перейдем теперь к вычислению интегралов, которые входят в выражение (2.12) для временно-подобной переменной τ . Для этого воспользуемся последними формулами в (3.11) и учтем равенство $\partial\lambda/\partial\theta = 4\lambda/\sin 2\theta$ (которое является следствием (4.6)). В результате получим

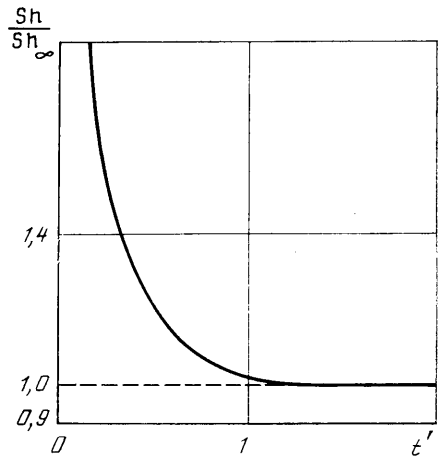
$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{g_0}}{f} d\eta &= \frac{\beta+1}{E_1 - E_2} \int \frac{2 d\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{\beta+1}{E_1 - E_2} \ln \text{tg} \varphi \\ \int \frac{\sqrt{g_0}}{g_{33}^0} f d\eta &= \frac{E_1 - E_2}{32\lambda^2(\beta+1)} \int_0^\varphi \{\sin^2 \theta \sin^2 2\theta\}_\lambda \sin 2\varphi d\varphi = \\ &= \frac{E_1 - E_2}{32(\beta+1)} \int_0^{\sin^2 \varphi} z^{(\kappa+1)/2} (1-z)^{\kappa-1} dz / \left[z^{(\kappa+1)/2} + \frac{\lambda}{2} (1-z)^{(\kappa-1)/2} \right]^3 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Используя эти выражения для переменной τ (2.12), имеем

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{E_1 - E_2}{32(\beta+1)} \int_{x(\omega)}^{\sin^2 \varphi} Q(z, \lambda) dz, \\ Q(z, \lambda) &= z^{(\kappa+1)/2} (1-z)^{\kappa-1} / \left[z^{(\kappa+1)/2} + \frac{\lambda}{2} (1-z)^{(\kappa-1)/2} \right]^3 \\ x(\omega) &= \left\{ 1 + \exp \left(2 \frac{E_1 - E_2}{\beta+1} \omega \right) \right\}^{-1} = \left\{ 1 + \text{ctg}^2 \varphi \exp \left(2 \frac{E_1 - E_2}{\beta+1} t \right) \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (4.10)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

При записи формул (4.10) было использовано обозначение $x(\omega) \equiv \sin^2 T(\omega)$ (см. выражения (2.12) и (2.13)) и учтено, что $\omega = -t - (\beta + 1)(E_1 - E_2)^{-1} \ln \operatorname{tg} \varphi$.

Вычисление среднего числа Шервуда $\operatorname{Sh} = I / (4\pi)$ проводится по формуле (2.15) при $\Lambda = \infty$, в подынтегральном выражении которой по первой переменной интегрирования сделаны последовательные преобразования $\eta \rightarrow \varphi \rightarrow \sin^2 \varphi$ с учетом соотношений (3.8)–(3.10) (аналогично тому, как вычисляется второй интеграл в (4.9)). Использовано также то, что интегральный диффузионный поток на рассматриваемую часть поверхности (фиг. 1) составляет $1/8$ от полного. Указанная процедура приводит к следующему выражению для среднего числа Шервуда:

$$\operatorname{Sh}(t') = \frac{\operatorname{Pe}_m^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}} \left\{ \frac{\sigma - 1}{[2(1 + \sigma + \sigma^2)]^{1/2}} \right\}^{1/2} \int_0^{\infty} \int_0^1 \frac{Q(x, \lambda) dx d\lambda}{\sqrt{\varepsilon(t', x, \lambda)}} \quad (4.11)$$

$$\varepsilon(t', x, \lambda) = \int_{p(x, t')}^x Q(z, \lambda) dz, \quad p(x, t') = \frac{x}{x + (1-x) \exp(2t')}$$

$$t' = \frac{E_1^* - E_2^*}{\beta + 1} t_*, \quad \operatorname{Pe}_m = \frac{a^2 J_2^*}{D(\beta + 1)}, \quad \sigma = \frac{E_2^*}{E_1^*}, \quad \kappa = 3 \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma}$$

$$J_2^* = (E_{ij}^* E_{ij}^*)^{1/2} = [2(E_1^{*2} + E_2^{*2} + E_3^{*2})]^{1/2}$$

Здесь индекс звездочка соответствует размерным величинам, функция Q определена в (4.10), а модифицированное число Пекле Pe_m введено по второму инварианту матрицы коэффициентов сдвига аналогично тому, как это делалось в [1, 2, 4].

При $t' \rightarrow \infty$ имеем $p \rightarrow 0$ и формулы (4.11) переходят в результаты [2, 4], соответствующие установившемуся режиму массопереноса.

На фиг. 2 показана рассчитанная численно по формуле (4.11) зависимость нормированного среднего числа Шервуда $\operatorname{Sh}/\operatorname{Sh}_\infty$ на сферическую каплю, обтекаемую плоским сдвиговым потоком при $E_2^* = 0$ (трехмерное поле течения, см. (4.4)). Здесь $\operatorname{Sh}_\infty = 0,615 \sqrt{\operatorname{Pe}_m}$ [4].

5. Приближенная формула для среднего числа Шервуда. В [6] была предложена следующая простая приближенная зависимость:

$$\frac{\operatorname{Sh}}{\operatorname{Sh}_\infty} = \sqrt{\operatorname{cth}(\pi \operatorname{Sh}_\infty^2 T)}, \quad T = \frac{Dt_*}{a^2} \quad (5.1)$$

позволяющая определять среднее число Шервуда в нестационарных задачах конвективного массо- и теплообмена каплей, частиц, пузырей с ламинарным установившимся потоком. В формуле (5.1) величина $Sh_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} Sh$, которая соответствует стационарному значению среднего числа Шервуда, считается известной.

Выражение (5.1) является точным (в приближении диффузионного пограничного слоя) для нестационарной диффузии к сферической капле в осесимметричном сдвиговом потоке ($E_1^* = E_2^*$); в случае массообмена сферической капли и твердой частицы в поступательном потоке погрешность формулы (5.1) составляет менее 3% [6].

В рассматриваемом случае нестационарного массообмена сферической капли (пузыря) в произвольном деформационном сдвиговом течении (4.1), (4.2) формулу (5.1) можно переписать следующим образом:

$$\frac{Sh}{Sh_\infty} = \sqrt{\text{cth} \left\{ \pi \frac{Sh_\infty^2 [2(1+\sigma+\sigma^2)]^{1/2}}{Pe_m (1-\sigma)} t' \right\}} \quad (5.2)$$

где безразмерное время t' и параметр σ определены в (4.11).

Сопоставление с расчетными данными, представленными на фиг. 2, показывает, что погрешность приближенной формулы (5.2) в случае плоского сдвига $\sigma=0$ составляет менее 1,5%.

Авторы благодарят Ю. С. Рязанцева и Л. А. Чудова за внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K. Mass transfer from a particle suspended in fluid with a steady linear ambient velocity distribution. — J. Fluid Mech., 1979, v. 95, № 2, p. 369–400.
2. Полянин А. Д. Трехмерные задачи диффузионного пограничного слоя. — ПМТФ, 1984, № 4, с. 71–81.
3. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Прядкин П. А., Рязанцев Ю. С. О нестационарном массообмене капли в потоке вязкой жидкости. — ПММ, 1978, т. 42, № 3, с. 441–449.
4. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука, 1985. 336 с.
5. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
6. Polyainin A. D., Dil'man V. V. New methods of the mass and heat transfer theory. 1. The method of asymptotic correction and the method of model equations and analogies. — Int. J. Heat Mass Transfer, 1985, v. 28, № 1, p. 25–43.

Москва

Поступила в редакцию
19.XII.1985