МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1986

УДК 532.6

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТРУКТУРИРОВАННЫХ ПЛЕНОК МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В ОТСУТСТВИЕ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

ЧЫОНГ ЗА БИНЬ

Предлагается феноменологическая теория равновесия тонких структурированных пленок магнитной жидкости, расположенных на поверхности другой немагнитной жидкости, в отсутствие внешнего магнитного поля. На основе предложенной теории рассматривается устойчивость полубесконечной плоской пленки магнитной жидкости. Полученный результат может служить качественным объяснением экспериментов, проведенных с тонкими пленками магнитной жидкости.

1. Тонкие пленки магнитной жидкости и их энергия. Общие методы построения моделей сплошных сред с учетом намагничивания и поляризации изложены в [1, 2]. В [3] из базового вариационного уравнения выведена система уравнений, описывающая поведение тонких ферромагнитных пленок. Несмотря на то что тонкие ферромагнитные пленки хорошо исследованы [4], физика тонких пленок магнитной жидкости [5, 6], расположенных на поверхности другой немагнитной жидкости, мало изучена.

В [7] приведены интересные экспериментальные наблюдения тонких пленок магнитной жидкости, которые получены нанесением небольшого количества магнитной жидкости на поверхность другой немагнитной жидкости так, чтобы все количество магнитной жидкости свободно растекалось по поверхности. С помощью микроскопа обнаружено, что в отсутствие внешнего магнитного поля поверхность пленки магнитной жидкости гофрированная. Вблизи границы пленки и свободной поверхности немагнитной жидкости образуются мелкие прямолинейные и расположенные перпендикулярно к краю пленки «складки». Расстояние между этими складками порядка 10^{-3} см.

Эти наблюдения удивительны, так как в обычных немагнитных пленках такие мелкие складки не наблюдаются, поскольку в немагнитных пленках не существует сил, которые могли бы уравновесить лапласовую силу [8], возникающую у мелких неровностей пленок. Наличие наблюдаемых складок должно быть связано с магнитной структурой, образованной внутри пленки магнитной жидкости в отсутствие внешнего магнитного поля. Это указывает на принципиальное различие между свойствами магнитной жидкости, находящейся в объемной и поверхностной фазах, и приближает свойства пленки магнитной жидкости к свойствам тонких ферромагнитных пленок [4].

Когда магнитная жидкость оказывается на поверхности другой жидкости, вполне возможно, что молекулы поверхностно-активных веществ (ПАВ), которые адсорбировались на ферромагнитных частицах, растекаются по свободной поверхности жидкости-подложки. При этом оставшиеся без адсорбционных слоев ПАВ ферромагнитные частицы образуют пленку, представляющую собой их плотную упаковку, со спонтанной намагниченностью. Однако подобные химико-физические процессы, протекающие в пленках магнитной жидкости, не являются предметом исследования данной работы. Ниже рассматривается лишь изотермическое равновесие пленок магнитной жидкости с заданной магнитной структурой.

Обозначим серединную поверхность пленки магнитной жидкости через Σ. Закон движения поверхности Σ в неподвижной декартовой системе координат x^i задается функциями (всюду считается, что латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, греческие — 1, 2)

$$x^i = r^i(\xi^\alpha, t)$$

Здесь ξ^α — лагранжевы координаты пленки, t — время.

Введем для пленки систему координат ξ^α, ξ, связанную с декартовой системой координат x^i формулами

$$x^i = r^i(\xi^\alpha, t) + \xi n^i$$

Здесь n^i — компоненты единичного вектора нормали к поверхности Σ, направленного в сторону воздуха, координата ξ изменяется в интервале $[-h, h]$, $2h$ — толщина пленки, которая считается постоянной.

Так же как и для некоторых тонких ферромагнитных пленок [4], примем, что в отсутствие внешнего магнитного поля в пленке магнитной жидкости существует вектор спонтанной намагниченности **M**. Для определенности рассмотрим случай, когда вектор **M** лежит в плоскости пленки и на ее границе перпендикулярен контуру, ограничивающему пленку. Вектор **M** удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$$

Будем считать, что свободная энергия рассматриваемой пленки F_Σ складывается из трех слагаемых: энергии поверхностного натяжения F_α, энергии магнитного дипольного взаимодействия ферромагнитных частиц F_M и упругой энергии F_e.

Энергия поверхностного натяжения F_α равна интегралу по поверхности Σ от поверхностного натяжения пленки α, которое при постоянной температуре считается неизменным

$$F_\alpha = \int_\Sigma \alpha \, d\Sigma$$

Упругие свойства пленки магнитной жидкости учитываются так же, как в теории тонких оболочек [9]. Геометрия поверхности пленки определяется первой и второй квадратичными формами, которые вычисляются по формулам

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial r^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial r_i}{\partial \xi^\beta}, \qquad b_{\alpha\beta} = n_i \frac{\partial^2 r^i}{\partial \xi^\alpha \, \partial \xi^\beta} \tag{1.1}$$

Мерой деформации пленки служат поверхностные тензоры, характеризующие ее растяжение и изгиб (индекс 0 относится к параметрам начального состояния при $t = t_0$)

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta 0}), \qquad B_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta 0}$$

Упругая энергия пленки состоит из энергии растяжения F_{exp} и энергии изгиба F_b

$$F_e = F_{\mathrm{exp}} + F_b = \int_{\Sigma_0} (f_{\mathrm{exp}} + f_b) \, d\Sigma$$

При этом выражения для плотности энергии растяжения f_{exp} и для плотности энергии изгиба f_b имеют вид (λ, μ — параметры Ламе)

$$f_{\mathrm{exp}} = 2\mu h [\gamma (A_\alpha^\alpha)^2 + A_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}], \qquad \gamma = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$$

$$f_b = \frac{2\mu h^3}{3} [\gamma (B_\alpha^\alpha)^2 + B_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta}]$$

Вычислим энергию магнитного дипольного взаимодействия ферромагнитных частиц в пленке Σ. Для этого заменим вектор спонтанной намагниченности **M** фиктивными магнитными зарядами [10]. Ясно, что при данной магнитной структуре магнитные заряды внутри пленки компенсируются и останутся лишь поверхностные магнитные заряды, расположенные на боковой поверхности пленки Σ_l. Таким образом, вычисление энергии магнитного дипольного взаимодействия F_M сводится к вычислению энергии взаимодействия системы поверхностных зарядов с плотностью

$\sigma=M$, распределенных на боковой поверхности Σ_l. Имеем [10]

$$F_м=\frac{1}{2}\int_{\Sigma_l}\int_{\Sigma_l'}\frac{\sigma\sigma'}{R}\,d\Sigma'\,d\Sigma=\frac{1}{2}\int_l\int_{-h}^{h}\int_{l'}\int_{-h}^{h}\frac{\sigma\sigma'}{R}\,d\xi'\,dl'\,d\xi\,dl \qquad (1.2)$$

Здесь R — расстояние между элементами поверхностных зарядов $\sigma d\Sigma$ и $\sigma' d\Sigma'$, контур l — пересечение срединной Σ и боковой Σ_l поверхностей.

Будем рассматривать случай, когда характерный размер пленки L гораздо больше ее толщины h: $L\gg h$. В этом случае можно провести осреднение в интеграле (1.2) по толщине пленки и привести его к более простой форме — сумме линейного и двойного интегралов по контуру l. Для этого сначала разобьем интеграл

$$\int_{l'}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\frac{\sigma\sigma'}{R}\,d\xi\,d\xi'\,dl' \qquad (1.3)$$

на две части, в которых $R>\Delta$ и $R<\Delta$, где Δ — некоторая длина, удовлетворяющая условию $L\gg\Delta\gg h$. При этом условии область интегрирования, в которой $R<\Delta$, можно считать прямоугольником, а распределение поверхностного заряда σ внутри нее однородным, так что часть интеграла (1.3) по этой области приближенно равна

$$\sigma^2(l)\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\int_{l-\Delta}^{l+\Delta}\frac{1}{\sqrt{(\xi-\xi')^2+(l-l')^2}}\,dl'\,d\xi'\,d\xi=$$

$$=2\sigma^2(l)\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\ln\left(\frac{\Delta+\sqrt{(\xi-\xi')^2+\Delta^2}}{|\xi-\xi'|}\right)d\xi'\,d\xi\approx2\sigma^2(l)\left(4h^2\ln\frac{2\Delta}{2h}+6h^2\right)\approx$$

$$\approx4h^2\left[\int_{\Delta>r>h}\frac{\sigma(l)\sigma(l')}{r}\,dl+3\sigma^2(l)\right] \qquad (1.4)$$

Здесь r — расстояние между элементами dl и dl' контура l.

В области интегрирования, в которой $R>\Delta$, расстояние R между элементами $d\Sigma$ и $d\Sigma'$ поверхности Σ_l можно приближенно заменить расстоянием r между элементами dl и dl' контура l.

Часть интеграла (1.3) по этой области равна

$$\int_{l'}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}{}_{R>\Delta}\frac{\sigma\sigma'}{R}\,d\xi\,d\xi'\,dl'\approx4h^2\int_{\substack{l'\\ r>\Delta}}\frac{\sigma\sigma'}{r}\,dl \qquad (1.5)$$

Подставляя выражения (1.4) и (1.5) в интеграл (1.3), получим

$$\int_{l'}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\frac{\sigma\sigma'}{R}\,d\xi\,d\xi'\,dl'\approx4h^2\left[\int_{\substack{l'\\ r>\Delta}}\frac{\sigma\sigma'}{r}\,dl'+3\sigma^2(l)\right] \qquad (1.6)$$

С учетом соотношения (1.6) можно переписать выражение для энергии магнитного дипольного взаимодействия в виде

$$F_м=\frac{1}{2}\int_l\left(\int_{l'}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\frac{\sigma\sigma'}{R}\,d\xi\,d\xi'\,dl'\right)dl\approx2h^2\left(\int_l\int_{\substack{l'\\ r>h}}\frac{\sigma\sigma'}{r}\,dl'\,dl+3\int_l\sigma^2(l)\,dl\right) \qquad (1.7)$$

Энергия свободной поверхности жидкости-подложки F_{Σ^*} равна интегралу от ее поверхностного натяжения α^* по этой поверхности (всюду звездочкой обозначены параметры, относящиеся к свободной поверхности жидкости-подложки)

$$F_{\Sigma^*}=\int\limits_{\Sigma^*}\alpha^*\,d\Sigma$$

Будем интересоваться лишь возмущениями, характерная длина которых гораздо меньше капиллярной постоянной $\sqrt{\alpha/\rho g}$, где ρ — плотность жидкости-подложки, g — ускорение силы тяжести. В силу этого можно не учитывать потенциальную энергию жидкости в поле тяжести и считать, что свободная энергия всей системы F складывается из свободной энергии пленки F_Σ и свободной энергии поверхности жидкости-подложки F_{Σ^*}

$$F=F_\Sigma+F_{\Sigma^*}$$

При отсутствии внешнего магнитного поля и внешних воздействий равновесное положение системы определяется из вариационного принципа

$$\delta F=0 \tag{1.8}$$

Варьирование следует проводить с условием сохранения поверхностного заряда

$$\delta(\sigma dl)=0 \tag{1.9}$$

Положение равновесия будет устойчиво в том случае, когда свободная энергия всей системы F имеет минимум.

2. Уравнение равновесия пленок магнитной жидкости. Устойчивость их плоской поверхности. Рассмотрим пленку магнитной жидкости, недеформированная поверхность которой занимает полуплоскость. Возьмем систему координат x, y, z так, чтобы недеформированной поверхности пленки соответствовала полуплоскость $z=0$, $y\geqslant 0$. Лагранжевы координаты ξ^α выберем совпадающими с координатами x, y.

Ясно, что взаимодействие поверхностных зарядов σ выражается в тенденции к разбеганию их друг от друга, т. е. энергия магнитного дипольного взаимодействия ферромагнитных частиц представляет собой фактор неустойчивости. Наоборот, энергия поверхностного натяжения и упругая энергия пленки — факторы устойчивости, стремящиеся вернуть возмущенную систему к ее первоначальному недеформированному состоянию. Таким образом, равновесие и устойчивость системы определяются соотношением этих факторов. В рамках линейной теории бесконечных малых деформаций, найдем условия потери устойчивости данной системы.

Условие нерастекания пленки магнитной жидкости по поверхности жидкости-подложки в недеформированном состоянии приводит к равенству [8]

$$\alpha=\alpha^* \tag{2.1}$$

Предположим, что при деформации пленки выполняются следующие неравенства (ΔF_M — изменение F_M):

$$F_{\text{exp}}\gg\Delta F_M,\quad \Delta F_M\gg F_b \tag{2.2}$$

Выполнение неравенств (2.2) возможно благодаря тому, что энергия растяжения F_{exp} пропорциональна h, энергия магнитного дипольного взаимодействия $F_M\sim h^2$, энергия изгиба $F_b\sim h^3$.

Допущения (2.2) существенно упрощают задачу, поскольку первое неравенство (2.2) позволяет исключить из рассмотрения плоские деформации пленки, а второе — пренебречь энергией изгиба F_b при исследовании поперечных перемещений пленки.

Обозначим вертикальное перемещение точек плоской поверхности пленки (жидкости) $w(w^*)$, его вариацию — $\delta w(\delta w^*)$. Тогда из формул (1.5) следуют выражения для компонентов метрики поверхности пленки

$a_{\alpha\beta}$ и жидкости $a_{\alpha\beta}^*$ ($\delta_{\alpha\beta}$ — двумерный символ Леви — Чивита)

$$a_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}+\frac{\partial w}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial w}{\partial\xi^\beta},\qquad a_{\alpha\beta}^*=\delta_{\alpha\beta}+\frac{\partial w^*}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial w^*}{\partial\xi^\beta}$$

С учетом условий (1.9), (2.1), (2.2) из уравнения (1.8) следует, что равновесное положение рассматриваемой системы является стационарной точкой следующего функционала ($a=\det\|a_{\alpha\beta}\|$, $a^*=\det\|a_{\alpha\beta}^*\|$):

$$F=\int\limits_{\Sigma_0}\alpha\sqrt{a}\,dx\,dy+\int\limits_{\Sigma_0^*}\alpha\sqrt{a^*}\,dx\,dy+$$
$$+2h^2M^2\left[\iint\limits_{|x-x'|>h}\frac{dx\,dx'}{\sqrt{(x-x')^2+(w-w')^2}}+3\int\frac{dx}{\sqrt{1+(\partial w/\partial x)^2}}\right]\qquad(2.3)$$

Проводя варьирование функционала (2.3), в силу произвольности вариаций δw, δw^* получим в линейном приближении следующую систему уравнений равновесия и граничных условий:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0\quad(y\geqslant0),\qquad\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}=0\quad(y\leqslant0)\qquad(2.4)$$
$$\frac{\partial w^*}{\partial y}\to0\quad(y\to-\infty),\qquad\frac{\partial w}{\partial y}\to0\quad(y\to\infty)$$
$$w=w^*,\qquad\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w^*}{\partial y}\right)+4h^2M^2\times$$
$$\times\left(\int\limits_{|x-x'|>h}\frac{w(x)-w(x')}{|x-x'|^3}dx'-3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0\quad(y=0)$$

Очевидно, что система уравнений (2.4) допускает нулевое решение, т. е. плоская поверхность пленки и жидкости есть равновесное положение системы.

Ищем ненулевое решение системы уравнений (2.4) в виде

$$w=\varepsilon\exp(-ky)\cos kx,\qquad w^*=\varepsilon\exp(ky)\cos kx\qquad(2.5)$$

Подставляя выражения (2.5) в (2.4), убеждаемся, что первые два уравнения системы (2.4) и граничные условия при $y\to\infty$ удовлетворяются тождественно, а последнее граничное условие системы (2.4) дает уравнение для определения числа k ($\mathrm{ci}(x)$ — интегральный косинус)

$$\alpha k-2h^2M^2\left[\frac{1}{h^2}-\frac{\cos kh}{h^2}+\frac{k\sin kh}{h}-k^2\,\mathrm{ci}(kh)-\frac{3}{2}k^2\right]=0\qquad(2.6)$$

В силу условия $L\gg h$ следует ограничение на область изменения числа k:

$$kh\ll1\qquad(2.7)$$

Разлагая слагаемые в уравнении (2.6) в ряд по малому параметру kh, получим (C — постоянная Эйлера)

$$\alpha-2h^2M^2k[(3-C)-\ln(kh)]=0\qquad(2.8)$$

Уравнение (2.8) показывает, что существует некоторое значение спонтанной намагниченности M_c, начиная с которого уравнение (2.8) имеет решение. Таким образом, при $M<M_c$ существует только единственное равновесное положение системы, соответствующее плоской поверхности пленки и жидкости, а при $M>M_c$ имеется дополнительное отличное от плоского недеформированного состояния равновесное положение системы вида (2.4). Данная ситуация подобна так называемому безразличному равновесию для упругих стержней. Это означает, что при $M<M_c$ недеформированной плоской поверхности пленки и жидкости соответствует устойчивое равновесное положение системы, а при $M>M_c$ плоская поверхность пленки теряет устойчивость. Для описания поведения системы после потери устойчивости линейная теория непригодна.

Можно показать, что знак правой части уравнения (2.8) совпадает со знаком второй вариации функционала (2.3) относительно возмущений вида (2.5); он положителен при $M<M_c$ и отрицателен в обратном случае. Следовательно, при $M>M_c$ плоская поверхность пленки и жидкости перестает быть экстремалью функционала энергии (2.3) и система теряет устойчивость.

Если считать, что область изменения числа k ограничивается условием $kh\leqslant\delta\ll1$, то критическое значение спонтанной намагниченности выражается в виде

$$M_c=\sqrt{\frac{\alpha}{2h\delta[(3-C)-\ln\delta]}} \tag{2.9}$$

При значениях параметров $\alpha\sim30$ дин/см, $\delta\sim6\pi\cdot10^{-2}$, $h\sim3\cdot10^{-5}$ см критическое значение намагниченности имеет порядок 800 Гс. Можно объяснить достижимость критического значения M_c таким образом. Намагниченность насыщения магнитной жидкости, использованной в эксперименте [7], равна 100 Гс. Если размер ферромагнитных частиц с оболочкой ПАВ в 2 раза больше размера частиц без оболочки ПАВ, то намагниченность пленки при плотной упаковке ферромагнитных частиц без оболочки ПАВ достигает порядка $\sim100\cdot2^3$ Гс.

Аналогичный результат по устойчивости пленки магнитной жидкости можно получить и в том случае, когда вектор спонтанной намагниченности **M** однородно распределен по пленке и направлен перпендикулярно ее поверхности.

В [7] отмечено, что гофрированная поверхность у пленок, изготовленных из магнитной жидкости с малой объемной намагниченностью насыщения, не наблюдается. Этот экспериментальный факт связан, по-видимому, с тем, что намагниченность таких пленок меньше критической M_c и плоская поверхность пленки соответствует устойчивому положению равновесия.

Автор благодарит Л. И. Седова и В. В. Гогосова за полезное обсуждение и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976, 535 с.
2. *Гогосов В. В., Васильева Н. Л., Тактаров Н. Г., Шапошникова Г. А.* Уравнения гидродинамики поляризирующихся и намагничивающихся многокомпонентных и многофазных сред. Разрывные решения. Исследование разрывных решений со скачком магнитной проницаемости. М.: Изд-во МГУ, 1975. 47 с.
3. *Чыонг За Бинь.* Об одной модели тонких упругих ферромагнитных пленок.— В сб.: Современные проблемы электрогидродинамики. М.: Изд-во МГУ, 1984, с. 145–149.
4. *Сухy Р.* Магнитные тонкие пленки. М.: Мир, 1967. 422 с.
5. *Тактаров Н. Г.* О движении поверхностных монослоев намагничивающейся жидкости.— Магнитная гидродинамика, 1978, № 3, с. 134–135.
6. *Gogosov V. V., Naletova V. A., Taktarov N. G., Chyong Za Binh, Shaposhnikova G. A.* Surface phenomena in ferrohydrodynamics. Acta Astronautica, 1980, v. 7, p. 489–497.
7. *Тактаров Н. Г.* О структурированных пленках намагничивающихся поверхностно-активных веществ.— Магнитная гидродинамика, 1982, № 4, с. 28–32.
8. *Адамсон А.* Физическая химия поверхностей. М.: Мир, 1979. 568 с.
9. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
10. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.

Ханой

Поступила в редакцию
25.VI.1985