

УДК 533.6.011

НЕКОТОРЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ
АДИАБАТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С ПЛОСКОЙ
СИММЕТРИЕЙ

УСТИНОВ М. Д.

Предложен метод приближенного аналитического исследования одномерных адиабатических течений газа, являющихся произвольными малыми возмущениями простой волны. Получен класс точных решений, который, в частности, описывает течения, возникающие после сильного кратковременного удара по поршню, движущемуся под действием давления газа.

1. Одномерные (с плоской симметрией) адиабатические течения идеального и совершенного газа описываются известной системой уравнений [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p \rho^{-\gamma}}{\partial t} + u \frac{\partial p \rho^{-\gamma}}{\partial r} = 0 \quad (1.1)$$

где u , p , ρ — соответственно скорость, давление и плотность газа, r — геометрическая координата, t — время и $\gamma = \text{const} > 1$ — отношение удельных теплоемкостей.

Уравнения (1.1) позволяют ввести функции $\tau(r, t)$, $\xi(r, t)$ и $\eta(r, t)$, такие, что [2]

$$\begin{aligned} d\tau &= \rho dr - \rho u dt = m dy, & d\xi &= \rho u dr - (p + \rho u^2) dt = \\ &= -m a_0 dx, & d\eta &= u d\xi + (f v^{-1/2} u^2) d\tau = m a_0^2 dz \\ & & p &= v^{\gamma/(\gamma-1)}, f(\tau) = p^{1/\gamma} / [(\gamma-1)\rho] \end{aligned} \quad (1.2)$$

где m и a_0 — положительные константы, имеющие размерности соответственно ML^{-2} и LT^{-1} .

Нетрудно проверить [3], что функция $z(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\partial z}{\partial y} \right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \\ - \varphi(y) \left[\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] = 0 \quad \varphi(y) = m f'(\tau) / f(\tau) \end{aligned} \quad (1.3)$$

причем x , y и z — безразмерные переменные. Для изоэнтропического течения $\varphi(y) \equiv 0$.

Если течение газа является простой волной, т. е. всюду в области течения

$$u - \frac{2}{\gamma-1} a = - \frac{2}{\gamma-1} a_0, \quad f(\tau) = \text{const} \quad (1.4)$$

где a — локальная скорость звука и a_0 — скорость звука в покоящемся газе, то функция $z_*(x, y)$, описывающая это течение, удовлетворяет урав-

нению (1.3), а также дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка [3]

$$\left(\frac{\partial z_*}{\partial x}\right)^2 + \frac{4}{\gamma+1} \frac{\partial z_*}{\partial x} + \frac{4\gamma}{\gamma+1} \frac{\partial z_*}{\partial y} = \frac{4}{\gamma^2-1} \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) имеет полный интеграл

$$z_* = Ax + \frac{A^2-b}{a}y + B - \frac{2x}{\gamma+1}, \quad a = -\frac{4\gamma}{\gamma+1}, \quad b = \frac{8\gamma}{(\gamma-1)(\gamma+1)^2} \quad (1.6)$$

Варьируя постоянные A и B , находим общее решение $z_*(x, y)$ уравнения (1.5)

$$z_*(x, y) = Ax + \frac{A^2-b}{a}y - \Phi(A) - \frac{2x}{\gamma+1}, \quad x = -\frac{2A}{a}y + \Phi'(A) \quad (1.7)$$

где $\Phi(A)$ — произвольная функция, определяемая из граничных условий. Рассмотрим некоторые примеры.

I. *Центрированная простая волна разрежения.* Пусть в области $r > 0$ находится покоящийся газ, давление и плотность которого постоянны и равны p_0 и ρ_0 соответственно. В момент времени $t=0$ поршень, находящийся при $t \leq 0$ в сечении $r=0$, мгновенно приобретает скорость u_1 , причем $-2a_0/(\gamma-1) < u_1 < 0$. Течение газа в области, ограниченной линиями $r=a_0t$ и $r=(u_1+a_1)t$ в плоскости Ort , является простой волной (a_1 — скорость звука в зоне постоянного течения). Можно показать (принимая для определенности, что $x=y=z=0$ при $r=t=0$), что в этом случае $\Phi(A) = 0$, и

$$z_*(x, y) = \frac{\gamma x^2}{(\gamma+1)y} + \frac{2}{(\gamma^2-1)}y - \frac{2}{\gamma-1}x$$

II. *Движение поршня без начальной скорости под действием давления газа.* В этом примере поршень массой m на единицу площади сечения, находящейся при $t \leq 0$ в сечении $r=0$, начинает выталкиваться (при $t \geq 0$) без начальной скорости газом, находящимся в области $r > 0$ с теми же параметрами, что и в примере I. Нетрудно проверить, что в этом случае функции $z_*(x, y)$ и $\Phi(A)$ определяются равенствами (формула (2.1) работы [3])

$$z_*(x, y) = \frac{\gamma}{(\gamma+1)^2} \frac{[(\gamma+1)x+2]^2}{(\gamma+1)y+2\gamma} - \frac{2x}{\gamma+1} + \frac{2y}{\gamma^2-1} - \frac{2}{(\gamma+1)^2} \Phi(A) = \frac{1}{2} \left(A - \frac{2}{\gamma+1} \right)^2 \quad (1.8)$$

Рассматривая неизоэнтропические течения газа, являющиеся малыми возмущениями простой волны (1.4), будем искать решение основного уравнения (1.3) в виде

$$z(x, y) = z_*(x, y) + w(x, y) \quad (1.9)$$

где $z_*(x, y)$, описывающая простую волну (невозмущенное течение), определяется равенствами (1.7). Предполагая, что производные w малы по сравнению с соответствующими производными z_* , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z_*}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{\partial z_*}{\partial x} \right)^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\partial z_*}{\partial y} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + \left(\frac{\gamma+1}{\gamma} \frac{\partial z_*}{\partial x} \frac{\partial^2 z_*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z_*}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\partial^2 z_*}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} - \\ - \Phi(y) \left[\frac{\partial z_*}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_*}{\partial x} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

причем функция $\Phi(y)$ заранее неизвестна и находится с учетом гранич-

ных условий, определяющих возмущенное течение.

Введем характеристические переменные α и β , определяемые из уравнений

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \alpha}{\partial x} \left(\frac{3\gamma-1}{2\gamma} \frac{\partial z_*}{\partial x} - \frac{1}{\gamma} \right), \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x} \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{\partial z_*}{\partial x} + \frac{1}{\gamma} \right) \quad (1.11)$$

и преобразуем (1.10)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{3\gamma-1}{2\gamma} \left(\frac{4}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma} A \right)^{-1} \frac{dA}{d\beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\gamma\varphi(y)}{4(\gamma-1)\alpha_x\beta_x} = 0, \quad \alpha_x = \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \dots \quad (1.12)$$

Непосредственные вычисления показывают, что функция $A(x, y)$, определяемая вторым из равенств (1.7), постоянна вдоль характеристики $\beta = \text{const}$, т. е. $A = A(\beta)$. Это свойство вытекает также из того факта, что линии $\beta = \text{const}$, являющиеся в плоскости (x, y) прямыми линиями, представляют собой образы c_+ -характеристик плоскости (r, t) , вдоль которых газодинамические параметры (а следовательно, и A) постоянны, если течение является простой волной.

Общее решение (1.12)

$$w(\alpha, \beta) = F_2(\beta) + \left(\frac{4}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma} A \right)^{-1} \times \quad (1.13)$$

$$\times \left[F_1(\alpha) - \int d\alpha \int \frac{\gamma\varphi(y)}{4(\gamma-1)\alpha_x\beta_x} \left(\frac{4}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma} A \right)^\sigma d\beta \right], \quad \sigma = -\frac{3\gamma-1}{2(\gamma-1)}$$

где $F_1(\alpha)$ и $F_2(\beta)$ — произвольные функции. Связь между α , β и x, y получим, интегрируя уравнения (1.11). Без ограничения общности можно принять, что

$$\alpha = y \left(\frac{4}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma} A \right)^{\sigma+1} + \int \left(\frac{4}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma} A \right)^\sigma \Phi''(A) dA, \quad \beta = A \quad (1.14)$$

Функции F_1 , F_2 и φ , входящие в общее решение (1.13), находятся из граничных условий, определяющих возмущенное течение. Если w известна, то формулы (1.2), (1.7) и (1.9) позволяют найти газодинамические параметры, а также r и t как функции x и y .

В качестве примера рассмотрим задачу о движении поршня под действием давления газа (см. пример II) в предположении, что плотность ρ_0 покоящегося газа изменяется по закону

$$\rho_0(r) = \rho_* [1 + \varepsilon \psi(r)], \quad \psi(0) = 0$$

где ρ_* — плотность газа в сечении $r=0$, $\psi(r)$ — ограниченная функция r ($r \geq 0$) и ε — малый безразмерный параметр.

На характеристике l (являющейся передним фронтом звуковой волны, распространяющейся по покоящемуся газу с переменной скоростью, равной $(\gamma p_0/\rho_0)^{1/2}$), $u=0$, $p=p_0$, $\rho=\rho_0(r)$ и $dr = (\gamma p_0/\rho_0)^{1/2} dt$, и из (1.2) имеем

$$x = \frac{\rho_*}{m\gamma} \left[r + \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^r \psi(r) dr \right], \quad y = \frac{\rho_*}{m} \left[r + \varepsilon \int_0^r \psi(r) dr \right]$$

$$z = \frac{\rho_* r}{m\gamma(\gamma-1)}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \varphi(y) = -\varepsilon \psi'(r) \frac{m}{\rho_*} \quad (1.15)$$

На поршне [4]

$$y=0: \quad z = x^2/2 \quad (1.16)$$

При $\varepsilon=0$ течение газа в возмущенной области является простой волной и соответствующая ей функция $z_*(x, y)$ определяется первым из равенств (1.8). Формулы

(1.14) принимают вид

$$\alpha = \left(y + \frac{2\gamma}{\gamma+1} \right) \left[2 \frac{2y - (\gamma-1)x + 2}{(\gamma+1)y + 2\gamma} \right]^{\sigma+1}, \quad \beta = A = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{(\gamma+1)x + 2}{(\gamma+1)y + 2\gamma} \quad (1.17)$$

Функция $z_*(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям, полученным из (1.15) и (1.16) при $\varepsilon=0$. Граничные условия для $w(x, y)$ находим из (1.15) и (1.16) с учетом (1.8), (1.9) и (1.17). После несложных вычислений получим

$$x = \frac{1}{\gamma} y: \quad w = -\frac{h(y)}{\gamma-1}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\gamma h(y)}{(\gamma+1)y + 2\gamma}, \quad h(y) = \frac{\varepsilon \rho_*}{m\gamma} \int_0^r \psi(r) dr, \quad r = \frac{my}{\rho_*} \quad (1.18)$$

$$y=0: \quad w=0 \quad (1.19)$$

Линия $y=\gamma x$ является характеристикой уравнения (1.12). Поэтому при нахождении функций $F_1(\alpha)$ и $F_2(\beta)$, входящих в общее решение (1.13), достаточно удовлетворить условию (1.19), первому из условий (1.18) и второму условию (1.18) для $\partial w/\partial x$ в одной точке, например в точке $x=y=0$, которое, очевидно, выполняется. Окончательно приходим к следующему выражению для $w(x, y)$:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \frac{\varepsilon}{\gamma-1} \left(\frac{4}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma} A \right)^{-\sigma} \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{-\sigma} [h(\alpha'') - h(\alpha')] - \\ &- \frac{\varepsilon \gamma^2}{4(\gamma-1)} \left(\frac{4}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma} A \right)^{-\sigma} \int_{\alpha}^{\alpha_1} d\alpha \int_A^A h''(y) \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} y + 1 \right) dA \\ &\quad \alpha' = \alpha \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{\sigma+1} - \frac{2\gamma}{\gamma+1} \\ \alpha'' &= 2\gamma \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{\sigma+1} \frac{\alpha}{(\gamma+1)y + 2\gamma} - \frac{2\gamma}{\gamma+1}, \quad \alpha_1 = \frac{2\gamma\alpha}{(\gamma+1)y + 2\gamma} \end{aligned} \quad (1.20)$$

причем при вычислении внутреннего интеграла по A y определяется из (1.17)

$$y = \alpha \left(\frac{4}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma} A \right)^{-\sigma-1} - \frac{2\gamma}{\gamma+1}$$

В частном случае при $h(y) = -y^2/2\gamma$ (1.20) переходит в формулу (2.10) работы [3], дающую приближенное решение задачи при наличии постоянного начального градиента температуры.

Предположим, что функция $\psi(r)$ при изменении r от 0 до $+\infty$ изменяется произвольным образом от 0 до 1, т. е. параметр ε равен относительному изменению плотности при переходе от сечения $r=0$ в бесконечность. Покажем, что изменение предельной скорости при $t \rightarrow +\infty$ поршня, равной $-2a_0/(\gamma-1)$ при $\varepsilon=0$, пропорционально ε и не зависит от характера изменения функции $\psi(r)$.

На поршне ($y=0$) давление p уменьшается от p_0 до нуля (при $t \rightarrow +\infty$), т. е. переменная x изменяется от нуля до значения x_* , при котором

$$\left[\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right]_{y=0} = 0 \quad (1.21)$$

поскольку давление, как это следует из (1.2), пропорционально выражению в левой части (1.21). Линеаризация (1.21) с учетом (1.8) и (1.9) приводит к уравнению для нахождения предельного значения x_* на поршне

$$\frac{\gamma-1}{4\gamma} \left(\frac{2}{\gamma-1} - x \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (1.22)$$

Из (1.20) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} &= -\frac{\varepsilon}{\gamma-1} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} x \right) \{h'(\bar{\alpha}) - J(\bar{\alpha})\} \\ \bar{\alpha} &= \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} x \right)^{\sigma+1} - \frac{2\gamma}{\gamma+1} \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$J(\bar{\alpha}) = \int_0^{\bar{\alpha}} F(y, \bar{\alpha}) dy, \quad F(y, \bar{\alpha}) = h''(y) \left[\frac{(\gamma+1)y+2\gamma}{(\gamma+1)\bar{\alpha}+2\gamma} \right]^{-1/(\sigma+1)}$$

При $\varepsilon=0$ переменная x изменяется на поршне от 0 до $2/(\gamma-1)$. Следовательно, при нахождении x_* в рамках линейного приближения выражение в фигурных скобках в (1.23) можно заменить его предельным значением при $\bar{\alpha} \rightarrow +\infty$. Но $h'(+\infty) = \psi(+\infty)/\gamma = 1/\gamma$. Докажем, что $J(\bar{\alpha}) \rightarrow 0$ при $\bar{\alpha} \rightarrow +\infty$. В самом деле, для любого $\delta > 0$ существует $H > 0$, такое, что при $\bar{\alpha} > H$ $|h'(\bar{\alpha}) - h'(H)| < \delta$. Далее

$$J(\bar{\alpha}) = \int_0^H F(y, \bar{\alpha}) dy + \int_H^{\bar{\alpha}} F(y, \bar{\alpha}) dy$$

При $\bar{\alpha} \rightarrow +\infty$ первый интеграл стремится к нулю, так как $\sigma+1 < 0$. Применяя ко второму интегралу обобщенную теорему о среднем, получим

$$\left| \int_H^{\bar{\alpha}} F(y, \bar{\alpha}) dy \right| = \left| \int_H^{\bar{\alpha}} h''(y) dy \right| \left| \frac{(\gamma+1)s+2\gamma}{(\gamma+1)\bar{\alpha}+2\gamma} \right|^{-1/(\sigma+1)} < |h'(\bar{\alpha}) - h'(H)| < \delta$$

так как $H < s < \bar{\alpha}$.

Таким образом, (1.22) принимает вид

$$\left(\frac{2}{\gamma-1} - x \right) \left[\frac{\gamma-1}{4\gamma} \left(\frac{2}{\gamma-1} - x \right) - \frac{\varepsilon}{2\gamma} \right] = 0$$

т. е.

$$x_* = \frac{2}{\gamma-1} - \frac{2}{\gamma-1} \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

Следовательно, предельное (при $t \rightarrow +\infty$) значение скорости поршня

$$u_* = -a_0 \frac{\partial z_*}{\partial y} \Big|_{x=x_*, y=0} = -\frac{2a_0}{\gamma-1} + \frac{2a_0}{\gamma-1} \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

Уменьшение по абсолютной величине предельной скорости поршня не зависит, таким образом, от характера распределения начальной плотности, а определяется лишь ее значением на бесконечности (предполагается, что $\varepsilon > 0$, так как предельное значение x_* должно принадлежать интервалу $[0, 2/(\gamma-1)]$, определяющему область изменения x на поршне в простой волне).

Произвольные малые возмущения простой волны рассматривались и ранее (см., например, [4]). Однако предложенный выше метод имеет определенные преимущества.

2. Будем искать точное решение основного уравнения (1.3) в следующей форме:

$$z(x, y) = a(y)x + b(y)x^2 \quad (2.1)$$

Решения вида (2.1) позволяют строить течения, содержащие сильные ударные волны, вдоль которых x и z сохраняют постоянные значения [5], которые, очевидно, можно принять равными нулю. Если, кроме того, $a(0) = -1$, $b(0) = -0,5$, то решения (2.1) соответствуют течению газа в области между сильной ударной волной и поршнем, возникающему при движении поршня массы m (на единицу площади сечения) после кратковременного удара, в результате которого поршень приобретает мгновенно конечную скорость $u_0 > 0$ и движется при $t > 0$ под действием давления газа (при этом полагаем в (1.2) $a_0 = u_0$ и считаем первоначально покоящийся газ холодным). В этом случае, следовательно,

$$z(0, y) = 0, \quad y \geq 0, \quad z(x, 0) = x^2/2 - x, \quad x \geq 0 \quad (2.2)$$

Подстановка (2.1) в (1.3) приводит к системе уравнений

$$(b' + 2b^2)' - \frac{4a'}{a} (b' + 2b^2) = 0, \quad a'' + 4ab' - 4\frac{a'^2}{a} - 8a'b = 0$$

$$\varphi(y) = 2\frac{\gamma+1}{\gamma} b + 4\frac{a'}{a} \quad (2.3)$$

Интегрируя первое уравнение, получим

$$b' + 2b^2 = C_1 a^4, \quad C_1 = \text{const} \quad (2.4)$$

Первый случай: $C_1 = 0$. Уравнение (2.4) и второе из уравнений (2.3) интегрируются в элементарных функциях. После несложных выкладок найдем, что

$$z(x, y) = x[C_2 + C_3(1 + \alpha y)]^{-1/2} (1 + \alpha y)^{-1/2} + \frac{1}{2} \alpha x^2 (1 + \alpha y)^{-1} \quad (2.5)$$

где C_2, C_3 и α — произвольные постоянные.

Уравнение (1.3) инвариантно относительно преобразования подобия $z = kz', x = kx', y = ky'$. Поэтому без ограничения общности можно принять, что $\alpha = 1$. Кроме того, в силу второго из условий (2.2) имеем $C_2 + C_3 = -1$. Таким образом ($C_2 = -C$)

$$z(x, y) = a(y) + b(y)x^2, \quad a(y) = -(1 + Cy)^{-1/2} (1 + y)^{-1/2} \quad (2.6)$$

$$b(y) = \frac{1}{2} (y+1)^{-1}, \quad \frac{\rho_0'(y)}{\rho_0(y)} = \frac{2(1-2\gamma)}{\gamma-1} \frac{a'}{a} - 2\frac{\gamma+1}{\gamma-1} b$$

(уравнение для плотности $\rho_0(y)$ первоначально покоящегося газа получено с учетом известных условий на сильной ударной волне).

Граничные условия (2.2) выполняются при любом значении постоянной C . Интегрируя уравнение для плотности, получим

$$\rho_0(y) = \rho_* (1 + Cy)^{2(2\gamma-1)/3(\gamma-1)} (1 + y)^{(5\gamma-7)/3(\gamma-1)} \quad (2.7)$$

где ρ_* — плотность покоящегося газа в сечении $r=0$ (на поршне).

Используя (1.2) и (2.6), можно найти в параметрическом виде закон движения ударной волны

$$r = \frac{m}{\rho_{*0}} \int_0^y (1 + Cy)^{-2(2\gamma-1)/3(\gamma-1)} (1 + y)^{-(5\gamma-7)/3(\gamma-1)} dy,$$

$$t = \frac{2m}{(\gamma+1)\rho_* u_0} \int_0^y (1 + Cy)^{(1-3\gamma)/3(\gamma-1)} (1 + y)^{(5-3\gamma)/3(\gamma-1)} dy \quad (2.8)$$

При движении вдоль траекторий частиц газа в плоскости (r, t) $y = y_* = \text{const}$, а x возрастает от нуля на ударной волне до значения $x_* = x(y_*)$, которое определяется из условия, что давление газа $p(x_*, y_*) = 0$. Оказывается, что

$$x_* = \frac{3}{2(1-C)} (1 + Cy_*)^{1/2} (1 + y_*)^{1/2}, \quad 0 \leq x \leq x_* \quad (2.9)$$

Скорость газа в области между поршнем и ударной волной определяется равенством

$$u = -u_0 \frac{\partial z}{\partial x} = u_0 [(1 + Cy)^{-1/2} (1 + y)^{-1/2} + x(1 + y)^{-1}] \quad (2.10)$$

В частности, на поршне $y=0$ и

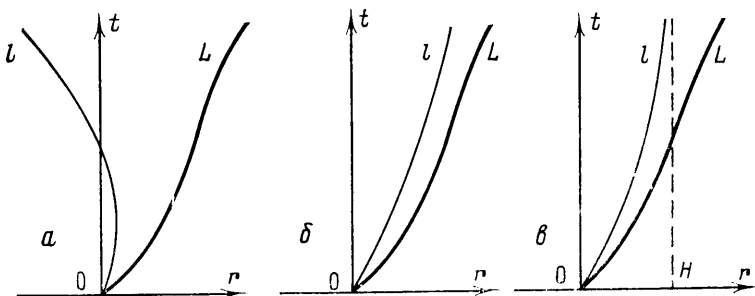
$$u = u_0(1-x), \quad 0 \leq x \leq x_*(0) = 3/2(1-C)$$

Рассмотрим следующие случаи: $C < 0$ и $C = 0$ (при $C > 0$ на конечном участке сосредоточена бесконечная масса газа, что физически невозможно).

I. $C = -1/h$, $h > 0$. Переменная y изменяется в интервале $[0, h]$. Анализ (2.7) и (2.8) показывает, что в начальный момент в области $0 \leq r < +\infty$ сосредоточена конечная масса газа (равная m на единицу площади сечения). При

$$h > 2(2\gamma - 1)/(5\gamma - 7) \text{ и } \gamma > 7/5 \quad (2.11)$$

плотность покоящегося газа сначала возрастает, а затем убывает до нуля (при $r \rightarrow +\infty$). Скорость ударной волны U уменьшается до момента, соответствующего $y = (2h - 1)/3$, а затем возрастает, причем $U(h) = +\infty$, $t(h) =$



$= +\infty$ (и ударная волна уходит в бесконечность). Таким образом, при выполнении условий (2.8) траектория ударной волны в плоскости (r, t) имеет точку перегиба. Скорость поршня, естественно, монотонно убывает, и ее предельное (при $t \rightarrow +\infty$) значение u_∞ определяется равенством

$$u_\infty = u_0(2 - h)/2(1 + h) \quad (2.12)$$

т. е. при $h > 2$ $u_\infty < 0$ (фигура, а). Если $h < 2$ и условия (2.11) выполнены, то предельная скорость u_∞ оказывается положительной (фигура, б). При $h = 2$ u_∞ обращается в нуль; при этом из (2.11) следует, что $\gamma > 2$, и анализ условий на поршне приводит к выводу, что поршень за бесконечный промежуток времени проходит конечный путь H (фигура, в), где

$$H = [2(\gamma - 1)m] / [(\gamma + 1)(\gamma - 2)\rho_*]$$

Если

$$0 < h < 2(2\gamma - 1)/(5\gamma - 7) \text{ и } \gamma > 7/5 \text{ или } h > 0 \text{ и } 1 < \gamma < 7/5 \quad (2.13)$$

то плотность покоящегося газа монотонно убывает в интервале $0 \leq y \leq h$.

Скорость ударной волны монотонно возрастает от $0,5(\gamma + 1)u_0$ до $+\infty$ (при $t \rightarrow +\infty$), если при выполнении (2.13) $h < 1/2$. Если же $h > 1/2$, то скорость ударной волны сначала уменьшается, а затем неограниченно возрастает. Предельная скорость поршня может быть как положительной, так и отрицательной, как это видно из (2.12). При $h = 2$, что возможно, если $1 < \gamma < 2$ и $\gamma \neq 7/5$, имеем $u_\infty = 0$. Однако путь, пройденный поршнем, оказывается бесконечным.

II. $C = 0$. Из (2.8) следует, что при $\gamma > 2$ в начальный момент $t = 0$ на конечном участке сосредоточена бесконечная масса газа. При $1 < \gamma < 2$ приходим после несложных преобразований к следующим выражениям плотности покоящегося газа $\rho_0(r)$, скорости ударной волны $U(t)$ и закона движения поршня $r(t)$:

$$\rho_0(r) = \rho_* \left[1 + \frac{2(2 - \gamma)\rho_*}{3(\gamma - 1)m} r \right]^{(5\gamma - 7)/2(2 - \gamma)}$$

$$U(t) = \frac{\gamma + 1}{2} u_0 \left[1 + \frac{(\gamma + 1)\rho_* u_0}{3(\gamma - 1)m} t \right]^{1 - \gamma}, \quad r = \frac{2m}{(\gamma + 1)\rho_*} \int_0^x (1 - w) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{2}{3}w\right)^{-1/(\gamma-1)} dw, \quad t = \frac{3(\gamma-1)m}{(\gamma+1)\rho_*u_0} \left[\left(1 - \frac{2}{3}x\right)^{-1/(\gamma-1)} - 1 \right].$$

В пределе при $\gamma \rightarrow 2$ начальная плотность газа распределена по экспоненциальному закону, а закон движения ударной волны является логарифмическим.

При $\gamma = 7/5$ начальная плотность ρ_0 постоянна и

$$\begin{aligned} \rho_0 = \rho_* = \text{const}, \quad U(t) &= \frac{6}{5} u_0 \left(1 + \frac{2\rho_*u_0}{m} t\right)^{-2/5} \\ r(t) &= \frac{5m}{6\rho_*} \left[-\frac{3}{2} - \frac{3}{5} \frac{\rho_*u_0}{m} t + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{2\rho_*u_0}{m} t\right)^{3/5} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Точное аналитическое решение для $\gamma = 7/5$ и $\rho_0 = \text{const}$, соответствующее (2.14), получено в [6] при рассмотрении задачи о движении газа под действием кратковременного импульса.

Второй случай: $C_1 \neq 0$. Полагая

$$\sigma = \frac{b'}{b^2} + 2, \quad \omega = b \frac{d\sigma}{db}, \quad a^4 = \frac{1}{C_1} \sigma b^2 \quad (a < 0) \quad (2.15)$$

приведем второе из уравнений (2.3) к уравнению Абеля второго рода

$$\frac{d\omega}{d\sigma} = \frac{(3\sigma - 14)\omega^2 + 16\sigma\omega + 4\sigma^2(\sigma - 2)}{4\sigma\omega(\sigma - 2)} \quad (2.16)$$

Для любого частного решения $\omega = \omega(\sigma)$ этого уравнения распределение начальной плотности определяется уравнением

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{d\sigma} = -\frac{2\gamma-1}{\gamma-1} \frac{\omega+2\sigma}{2\omega\sigma} - 2 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{1}{\omega(\sigma-2)} \quad (2.17)$$

а закон движения сильной ударной волны, возникающей после удара по поршню, находится в параметрическом виде

$$\frac{dr}{d\sigma} = \frac{m}{\rho_0 b \omega (\sigma - 2)}, \quad \frac{dt}{d\sigma} = -\frac{m}{(\gamma + 1) u_0 \rho_0 a b \omega (\sigma - 2)}$$

Если (σ_*, ω_*) — начальная точка взятой интегральной кривой уравнения (2.16), то нетрудно показать, что давление на поршне

$$p = \frac{\gamma+1}{2} \rho_* u_0^2 \psi(x), \quad \psi(x) = [1 + 2(a' - 1)x + (2b' + 1)x^2]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2.18)$$

$$a' = -(\sigma_* - 2)(\omega_* + 2\sigma_*)/8\sigma_*, \quad b' = (\sigma_* - 2)/4$$

Переменная x на поршне возрастает от нуля (в начальный момент $t=0$) до значения x_* , при котором p обращается в нуль.

Закон движения поршня находим, интегрируя соотношения $dr = u dt$, $p dt = m u_0 dx$, $u = u_0(1-x)$, полученные из (1.2) при $\tau = 0$

$$r = \frac{2m}{(\gamma+1)\rho_*} \int_0^x \frac{(1-w)dw}{\psi(w)}, \quad t = \frac{2m}{(\gamma+1)\rho_*u_0} \int_0^x \frac{dw}{\psi(w)}$$

Отметим в заключение, что траектории ударных волн в плоскости (r, t) , соответствующих интегральным кривым уравнения (2.16), пересекающим прямую $\omega = -2\sigma$, имеют точку перегиба, поскольку при переходе через эту прямую a' меняет знак, как это видно из (2.18).

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.
2. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.
3. Устинов М. Д. О движении поршня под действием давления газа при наличии начального градиента температуры. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 2, с. 177–180.
4. Gundersen R. The non-isentropic perturbation of arbitrary simple wave. — J. Math. and Mech., 1960, v. 9, № 2, p. 141–145.
5. Устинов М. Д. Приближенное решение неавтономной задачи о движении поршня после кратковременного удара. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 6, с. 167–171.
6. Жуков А. И., Каждан Я. М. О движении газа под действием кратковременного импульса. — Акуст. журн., 1956, т. 2, № 4, с. 352–357.

Минск

Поступила в редакцию
4.IV.1985