

УДК 532.59

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ И ЕГО ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ

ЯКИМОВ А. Ю., ЯКИМОВ Ю. Л.

Рассматривается плоское стационарное движение стратифицированной идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Учитывая, что параметр, характеризующий частицы жидкости, — ее плотность ρ_0 — постоянна вдоль линии тока, удобно в качестве одной из независимых переменных выбрать функцию тока, а в качестве другой в связи с наличием силы тяжести — декартову координату.

Ниже на основе формулы М. А. Лаврентьева [1, 2, 3] приводится вывод дифференциального уравнения для одной неизвестной функции — вертикального смещения линии тока $y(y_0, x)$, где y_0 — начальное положение этой линии тока, а x — горизонтальная координата. Приведены частные решения, соответствующие волноводу, кюидальным и уединенным волнам, а также волнам типа плавного подъема к новому уровню. Подобная система координат использовалась в [4], однако там задача сведена к системе дифференциальных уравнений в частных производных.

Формула М. А. Лаврентьева позволяет определить величину конформного растяжения на границе при отображении узкой искривленной полосы на прямую полосу и тем самым — скорость потенциального течения, если прямая полоса заключена между линиями тока в плоскости потенциала.

Тогда для фиксированной трубки тока, если ограничиться только главными членами (для дальнейшего это достаточно), формула имеет вид

$$\frac{v}{v_0} = \frac{y_0}{s_1} \left(1 + \frac{s_1}{3} k_1 + \frac{s_1}{6} k_2 \right) \quad (1)$$

где v_0 и y_0 — скорость и ширина полосы в невозмущенном состоянии, v — скорость на границе в точке, где s_1 — ширина полосы, измеренная по перпендикуляру, восстановленному в этой точке к границе полосы, k_1, k_2 — кривизны кривых, ограничивающих полосу в концах перпендикуляра.

Формула (1) является следующим приближением по сравнению с гидравлическим, так как скорость зависит не только от расхода $v_0 y_0$, отношения к ширине потока s , но и от кривизны берегов k_1 и k_2 .

Если поток состоит из m потенциальных потоков, имеющих общие граничные линии тока, из интеграла Бернулли и условия равенства давления на границах слоев, используя (1), можно получить m дифференциальных соотношений для граничных линий тока, содержащих расстояния между ними и их кривизны. При этом границы будут плоскостями скольжения или завихренности [4]. Описанный путь может иметь практическое значение для численного счета, так как задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. При необходимости формула (1) может быть уточнена [1, 3].

Для непрерывной стратификации вывод дифференциального уравнения основан на предельном переходе, когда $m \rightarrow \infty$, при этом (1) становится асимптотически точной. Рассмотрим два соседних слоя. При стремлении ширины полос к нулю кривизны их берегов стремятся к кривизне k

их общей границы раздела. Тогда из (1) получим

$$\frac{v_i}{v_{0i}} = \frac{y_{0i}}{s_i} \left(1 + (-1)^{i+1} \frac{1}{2} s_i k \right) \quad (i=1, 2) \quad (2)$$

где y_{0i} и v_{0i} — соответственно ширина и скорости слоев в невозмущенном состоянии; s_i и v_i — соответственно расстояния между берегами и скорости в точке, лежащей на их общей границе.

Воспользовавшись интегралом Бернулли и условием равенства давлений на границе раздела, получим

$$-\frac{\rho_1 v_1^2}{2} - g \rho_1 (y - y_0) + \frac{\rho_1 v_{01}^2}{2} = -\frac{\rho_2 v_2^2}{2} - g \rho_2 (y - y_0) + \frac{\rho_2 v_{02}^2}{2} \quad (3)$$

где y_0 — значение начальной ординаты, их общей границы.

Выберем ширину слоев таким образом, что $y_{0i+1} - y_{0i} = \Delta y_0$. Подставив в (3) выражение для скоростей v_1 и v_2 из (2), разделив полученное равенство на Δy_0 и устремив Δy_0 к нулю, в пределе получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\rho_0 v_0^2 k \frac{1}{s_{v_0}'} - \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\rho_0 v_0^2}{2} \frac{1}{(s_{v_0}')^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\rho_0 v_0^2}{2} \right) - g (y - y_0) \frac{d\rho_0}{dy_0} = 0, \quad (4)$$

$$k = \frac{y_{xx}''}{(1 + (y_x')^2)^{3/4}}, \quad s = \Delta y \cos \operatorname{arctg} y_x'$$

где s — длина семейства линий, ортогональных линиям тока.

Если $y_x' \ll 1$, $k \approx y_{xx}''$, $s = \Delta y$, то $\eta = y - y_0$ и из (4) получим

$$\frac{2q_0}{1 + \eta_{v_0}'} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y_0} \frac{q}{(1 + \eta_{v_0}')^2} + \frac{\partial q_0}{\partial y_0} - g \eta \frac{d\rho_0}{dy_0} = 0$$

или после тождественных преобразований

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{1}{(1 + \eta_{v_0}')^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y_0^2} + \eta_{v_0}' \frac{1 + 1/2 \eta_{v_0}'}{1 + \eta_{v_0}'} \frac{d \ln q_0}{dy_0} - \frac{g \eta}{v_0^2} (1 + \eta_{v_0}') \frac{d \ln \rho_0}{dy_0} = 0, \quad q_0 = \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2 \quad (5)$$

Точное частное решение (5) можно получить, положив $\eta_{v_0}' = 0$ и $(g/v_0^2) (d \ln \rho_0 / dy_0) = \text{const}$. Тогда при отсутствии начальной завихренности $v_0 = \text{const}$

$$\rho_0 = C e^{-a v_0}, \quad \eta = \eta_0 \cos \left(\frac{\sqrt{ag}}{v_0} x \right)$$

Этому решению соответствуют волны постоянной амплитуды и длины, заполняющие все пространство. Линеаризованное уравнение (5) при $\eta_{v_0}' \ll 1$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y_0^2} + \frac{\partial \eta}{\partial y_0} \frac{d \ln q_0}{dy_0} - \frac{g \eta}{v_0^2} \frac{d \ln \rho_0}{dy_0} = 0$$

Частное решение этого уравнения можно найти в виде

$$\eta = \eta_0(y_0) \cos \left(\frac{\sqrt{ag}}{v^2} x \right)$$

Если предположить, что $\eta_{v_0}' \ll 1$, сохранив в (5) квадратичные и ку-

бичные по η_{v_0}' члены, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y_0^2} \left(1 - 2 \frac{\partial \eta}{\partial y_0} + 3 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y_0} \right)^2 \right) + \\ & + \frac{d \ln q_0}{d y_0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y_0} \right)^3 \right) - \frac{g \eta}{v_0^2} \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y_0} \right) \frac{d \ln q_0}{d y_0} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Решения этого уравнения будем искать в виде $\eta = \eta_0(y_0)z(x)$. Тогда $\eta_{v_0}' = (\eta_0)_{v_0}' z \ll 1$. Не уменьшая общности, можно полагать z малой величиной порядка η_{v_0}' , в результате вместо (6) получим

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + 3\alpha z + \frac{9}{2} \gamma z^2 + \delta z^3 = 0 \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{\eta_0''}{3\eta_0} + \frac{\eta_0'}{3\eta_0} \frac{d \ln q_0}{d y_0} - \frac{g}{3v_0^2} \frac{d \ln q_0}{d y_0} \quad (8)$$

$$\gamma = -\frac{4}{9} \frac{\eta_0'' \eta_0'}{\eta_0} - \frac{1}{9} \frac{(\eta_0')^2}{\eta_0} \frac{d \ln q_0}{d y_0} - \frac{2}{9} \frac{\eta_0' g}{v_0^2} \frac{d \ln \rho_0}{d y_0} \quad (9)$$

$$\delta = \frac{3\eta_0'' (\eta_0')^2}{\eta_0} + \frac{(\eta_0')^3}{2\eta_0} \frac{d \ln q_0}{d y_0} \quad (10)$$

Если α , γ , δ постоянны, переменные разделяются, равенства (7)–(10) содержат четыре функции: $z(x)$, $\rho_0(y_0)$, $q_0(y_0)$, $\eta_0(y_0)$. Укажем некоторые решения: при $\eta_0' = 0$ и $(g/3v_0^2)(d \ln \rho_0/d y_0) = -\alpha$ получим точное решение уравнения (5).

Если α конечно и не равно нулю, а γ и δ ограничены, то в силу малости z двумя последними членами в (7) можно пренебречь, тогда решение определится системой равенств: (8) и

$$z'' + 3\alpha z = 0$$

Решение этой системы существует при произвольных q_0 и ρ_0 и соответствует решению линеаризованного уравнения. Если α мало, γ конечно и не равно нулю, а δ ограничено, решение определяется системой (8), (9) и уравнением

$$z'' + 3\alpha z + \frac{9}{2} \gamma z^2 = 0 \quad (11)$$

Решение (11) представляется эллиптическим интегралом

$$x = \pm \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{3\gamma(z-z_0)(z_1-z)(z_2-z)}}$$

корни подкоренного выражения определяются значениями постоянных α и γ . При наличии кратного корня имеет место уединенная волна, если все корни различны — кноидальные волны [4, 5]. Соотношения (8), (9) содержат две постоянные α и γ и три функции: $\rho_0(y_0)$, $q_0(y_0)$ и $\eta_0(y_0)$, так что одну из них можно считать произвольной.

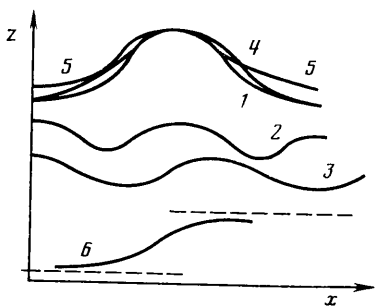
В качестве примера решения (8), (9) можно указать следующее: $q_0 = \text{const}$, в то время как плотность и амплитуда имеют линейное распределение по вертикали

$$\rho_0 = C_1 - \frac{6\alpha q_0}{g} y_0, \quad \eta_0 = \frac{3}{2} \frac{\gamma}{\alpha} y_0$$

Следует заметить, что это решение может быть продолжено до плоской стенки $\eta_0 = y_0 = 0$.

Анализ (8), (9) показывает, что условие $dq_0/dy_0=0$ на стенке не случайное, так как α и γ могут быть ограничены вблизи стенки ($\eta_0=0$), только если $dq_0/dy_0=0$ или $d\eta_0/dy_0=0$.

Если выполнено последнее условие, то на стенке одновременно постоянны скорость и давление. Следовательно, стенка может быть заменена границей невозмущенной жидкости. Физически это означает, что внутренние волны при этом никак не возмущают жидкость, расположенную ниже или выше некоторой границы. Интересно заметить, что для линейного приближения при достаточно произвольной стратификации $\rho_0(y_0)$, $v_0(y_0)$ можно получить сразу две невозмущенные границы; $y_0=y_1$, $y_0=y_2$. Действительно, в этом случае имеют место следующие четыре условия: $\eta_0(y_1)=\eta_0'(y_1)=\eta_0(y_2)=\eta_0'(y_2)=0$. Для линейного приближения необходимо



удовлетворить только уравнение второго порядка (8). При этом за счет порядка уравнения можно удовлетворить только двум условиям на стенке, другим двум условиям можно удовлетворить за счет выбора y_1 и y_2 .

Отсюда следует, что периодические волны заданной длины могут распространяться в слое (волноводе), зависящем от их длины, не возмущая остальную жидкость.

Приведенный анализ условий на стенке связан, в частности, со средними членами правой части (8) и (9), которыми пренебрегается в постановке Буссинеска, следовательно, это приближение вблизи стенки не обосновано.

Если $\alpha z \gg \delta z^3$ и $\gamma=0$, можно указать следующие частные решения (7)–(9):

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 \cos(\sqrt{3}\alpha x) \\ q_0 &= C_1, \quad \eta_0 = C_2 \exp(\sqrt{\alpha} y_0), \quad \rho_0 = C_3 - \frac{4\alpha C_1}{g} y_0 \\ v_0^2 &= \frac{2g(C_1^2 - \alpha)}{C_1(C_1^2 + \alpha)}, \quad \eta_0 = C_0 \exp(C_1 y_0) \\ \rho_0 &= C_2 \exp\left(\frac{2(\alpha - C_1^2)}{C_1} y_0\right) \end{aligned}$$

Если все три последних члена (7) существенны, что при малых z может быть только при $\alpha \ll \gamma \ll \delta$, то решение (7) сводится к эллиптическому интегралу вида

$$x = \pm \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{1/2\delta(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}} \quad (12)$$

Когда все корни различны, имеем периодические волны, которые, однако, могут отличаться по форме от кноидальных и линейных. Так, если один корень (z_3) существенно больше остальных, то $|z-z_3| \approx |z_3|$ и характер решения будет близок к решению (11) (фигура, кривая 1). Если один из корней приближается к корню, который соответствует максимуму или минимуму (гребню или впадине волны), имеет место существенное уплощение этого участка волны (кривая 2). В случае попарно близких корней одновременно уплощаются и минимум и максимум волны (кривая 3). Если два корня совпадают, будет иметь место волна типа уединенной, но отличной от нее формы (кривая 4). Когда совпадают три кор-

ня, то вместо экспоненциального закона убывания подъема волны (1) имеет место затухание, обратно пропорциональное квадрату расстояния от вершины волны (кривая 4). Наконец, если корни попарно совпадают, интеграл (12) берется и форма волны имеет вид $z=a_0 \operatorname{th} bx$, т. е. волна имеет две горизонтальные асимптоты на разных уровнях (кривая 6). В [6] подобная волна указана для двухслойной жидкости.

Для перечисленных в этом пункте решений функции ρ_0 , q_0 , η_0 должны удовлетворять замкнутой системе уравнений (8)–(10), т. е. они возможны только для специальных стратификаций. Например, при

$$\begin{aligned} \eta_0 &= C_1 y_0 + C_2, & q_0 &= C_4 \exp\left(\frac{2\delta}{C_1^3} \left(\frac{C_1}{2} y_0^2 + C_2 y_0 + C_3\right)\right) \\ \rho_0 &= C_5 \exp\left(v_0^2 \frac{2\delta - 3\alpha C_1^2}{g C_1^2}\right), & C_1^2 - \frac{3}{2} \frac{\gamma}{\alpha} C_1 - \frac{\delta}{\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

где C_1 — корень уравнения (13).

В заключение сравним уравнение (5) с известным уравнением Лонга, Дюбрей — Жакотена [7], которое считается наиболее простым для рассматриваемого класса задач.

Эти уравнения внешне похожи, особенно если уравнение Лонга сравнивать с линеаризованным уравнением (5), кроме того, и то и другое уравнения содержат одни и те же параметры: вертикальную координату η , лагранжеву координату или функцию тока y_0 и горизонтальную координату x .

Но уравнение Лонга выведено относительно функции тока, причем, так как стратификация зависит от функции тока, вид уравнения по отношению к определяемой функции зависит от стратификации.

В отличие от этого уравнение (5) получено для формы волны, определяемой вертикальным смещением линий тока, а независимыми переменными являются горизонтальная координата и функция тока. При этом от стратификации зависят два коэффициента, содержащие только одну независимую переменную, а относительно неизвестной функции и ее производных уравнение (5) имеет заданный алгебраический вид. Решение уравнения (5) более наглядно, так как дает сразу форму волны, а решение уравнения Лонга содержит форму волны в неявном виде.

Авторы признательны А. А. Бармину за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973, с. 398–403.
2. Якимов Ю. Л. О приближенной формуле для растяжения при конформном отображении области, имеющей узкий участок. — Сиб. мат. журн., 1962, т. 3, № 6, с. 956–960.
3. Якимов А. Ю. Метод узких полос для нелинейных задач стратифицированной жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1986, № 2, с. 174–178.
4. Тер-Крикоров А. М. О внутренних волнах в неоднородной жидкости. — ПММ, 1962, т. 26, № 6, с. 1067–1076.
5. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973, с. 47–51.
6. Овсянников Л. В. Волновые движения сплошных сред. Методическая разработка. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1985. 44 с.
7. Нелинейные волны/Под ред. Лейбовича С., Сибасса А. М.: Мир, 1977, с. 283.

Москва

Поступила в редакцию
22.X.1985