МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1986

УДК 532.5.031:519.63

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ СВОБОДНЫХ ГРАНИЦ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ В ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДАМИ КОНЕЧНЫХ И ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

АФАНАСЬЕВ К. Е., АФАНАСЬЕВА М. М., ТЕРЕНТЬЕВ А. Г.

Исследование неустановившегося движения жидкости со свободными поверхностями – одна из наиболее сложных задач гидродинамики, и точное решение удается получить лишь при дополнительных упрощающих предположениях. В связи с интенсивным развитием численных методов появилась возможность численного анализа таких задач.

В настоящей работе методами конечных и граничных элементов исследуется нестационарное движение тел в идеальной несжимаемой жидкости вблизи свободной поверхности над плоским дном. Применяемые методы базируются на двух различных принципах, поэтому сравнение численных результатов позволяет с некоторой достоверностью судить об их эффективности и точности. Описание этих методов можно найти в [1, 2]. Показано, что при импульсивном движении твердого тела из состояния покоя эволюция свободной поверхности аналогична одному из любопытных явлений в гидродинамике, называемому «султаном». На возможность моделирования султана с помощью вертикального импульсивного движения тела указывалось в [3].

1. Постановка задачи и метод решения. Пусть в неподвижной системе координат x, y занятая жидкостью область $\Omega(t)$ ограничена деформируемой свободной границей Γ_1, неподвижной твердой границей Γ_2 и подвижной границей тела Γ_3. Рассматривается движение по горизонтальному дну некоторого выступа и вертикальное движение симметричного плоского или осесимметричного тела.

Предполагается, что сначала тело и жидкость находятся в покое, затем в момент времени $t=0$ тело приобретает ненулевую начальную скорость $\mathbf{v}_0$ и движется с произвольной ограниченной скоростью $\mathbf{v}(t)$. Задача решается с учетом весомости. На свободной границе Γ_1 давление $p=\mathrm{const}$, на твердых границах Γ_2 и Γ_3 выполняется условие непротекания.

Гидродинамическая задача сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала скорости, удовлетворяющего на границах области динамическому и кинематическим условиям

$$\Delta\varphi=0, \quad \mathbf{x}=(x,\ y)\in\Omega(t) \tag{1.1}$$

$$\frac{d\varphi}{dt}-\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+gy=0, \quad \mathbf{x}\in\Gamma_1 \tag{1.2}$$

$$\mathbf{v}_1=\nabla\varphi\ (\mathbf{x}\in\Gamma_1),\ \varphi_n=0\ (\mathbf{x}\in\Gamma_2),\ \varphi_n=\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{n}\ (\mathbf{x}\in\Gamma_3) \tag{1.3}$$

где $\mathbf{v}_1$ – вектор скорости частицы жидкости на свободной границе.

Кроме того, задается поведение функции на бесконечности ($\varphi\to0$, $x\to\infty$) и начальное распределение потенциала на свободной границе ($\varphi(\mathbf{x},0)=0$, $\mathbf{x}\in\Gamma_1$).

Исходная краевая задача (1.1)–(1.3) нелинейна из-за условия (1.2).

Кроме того, свободная граница Γ_1 неизвестна, что затрудняет непосредственное применение численных методов. Для решения поставленной задачи можно воспользоваться методом последовательного нахождения границы Γ_1 и значения потенциала φ по заданным приращениям Δt [4]. Аналогичный подход был успешно применен в [5, 6]. Суть метода заключается в следующем: по заданным в некоторый момент времени t, положению границы Γ_1 и значению на ней потенциала φ и градиента $\nabla\varphi$, из первого условия (1.3) определяется вектор перемещения $\mathbf{v}_1\Delta t$ и, следовательно, новое положение свободной границы Γ_1, а из условия (1.2) — новое значение потенциала для момента времени $t=t+\Delta t$.

Таким образом, нелинейная краевая задача в каждый момент времени заменяется линейной смешанной краевой задачей с условиями Неймана на твердых границах и условием Дирихле на свободной границе.

2. Метод конечных элементов. Область течения $\Omega(t)$ принимается конечной и разбивается на N линейных четырехугольных изопараметрических элементов Ω_l

$$\Omega = \bigcup_{l=1}^{N} \Omega_l, \qquad \Omega_\alpha = \bigcap_{\alpha,\beta=1}^{N} \Omega_\beta = \phi \qquad (\alpha\neq\beta)$$

Каждый элемент Ω_l отображается на стандартный квадратный элемент $E\{x=x(\xi,\eta),\ y=y(\xi,\eta),\ \xi,\eta\in[-1,1]\}$. Нетрудно показать [7], что для всех элементов Ω_l, когда их углы отличны от 0 и π, якобиан преобразования $J(\xi,\eta)$ отличен от нуля. Если на каждом элементе к уравнению (1.1) применить метод Галеркина, то получится система уравнений

$$A_{ij}\varphi_j=F_i \qquad (i,j=1-4), \qquad A_{ij}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(u_iu_j+v_iv_j)\frac{\varepsilon}{J}\,d\xi\,d\eta \tag{2.1}$$

$$u_k=\frac{\partial N_k}{\partial\xi}\sum_{l=1}^{4}\frac{\partial N_l}{\partial\eta}y_l-\frac{\partial N_k}{\partial\eta}\sum_{l=1}^{4}\frac{\partial N_l}{\partial\xi}y_l \tag{2.2}$$

$$v_k=\frac{\partial N_k}{\partial\eta}\sum_{l=1}^{4}\frac{\partial N_l}{\partial\xi}x_l-\frac{\partial N_k}{\partial\xi}\sum_{l=1}^{4}\frac{\partial N_l}{\partial\eta}x_l \qquad (k=i,j) \tag{2.3}$$

$$J=\sum_{i=1}^{4}x_iu_i, \qquad F_i=\int_{\Gamma_l}\varepsilon\varphi_nN_i\,d\Gamma$$

В плоском случае $\varepsilon=1$, в осесимметричном $\varepsilon=2\pi x$, $x=x_iN_i$, A_{ij} — матрица жесткости. Величины x_i, y_i $(i,j=1-4)$ — узловые значения координат элемента Ω_l в области $\Omega(t)$. Под координатами x и y понимаются в осесимметричном случае цилиндрические координаты r и z.

Функции формы N_i $(i=1-4)$ определяются в случае линейных изопараметрических элементов формулами

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \qquad N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \qquad N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{2.4}$$

Поэлементное объединение систем вида (2.1) приводит к глобальной системе уравнений $\mathbf{A}\varphi=\mathbf{F}$ с симметричной ленточной и положительно определенной матрицей $\mathbf{A}$. Система уравнений решается модифицированным методом Гаусса, учитывающим перечисленные свойства матрицы $\mathbf{A}$, коэффициенты которой находятся численным интегрированием по шеститочечной формуле Гаусса.

3. Метод граничных элементов. Основным соотношением метода граничных элементов является интегральное уравнение вида

$$\beta\varphi(Q)+\int_\Gamma F(P,Q)\varphi(P)\,d\Gamma=\int_\Gamma G(P,Q)\varphi_n(P)\,d\Gamma \tag{3.1}$$

$$F(P,Q)=\frac{\partial}{\partial n}G(P,Q)$$

$$\beta=0,\quad Q\notin\Gamma\cup\Omega(t);\quad \beta=1,\quad Q\in\Omega(t);\quad \beta=\omega/2\pi,\quad Q\in\Gamma$$

где $\varphi(Q)$ — потенциал скорости, $G(P, Q)$ — фундаментальное сингулярное решение уравнения Лапласа, P — точка границы Γ, ω — телесный угол, под которым видна граница Γ из точки Q, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к Γ в точке P.

Функция $G(P, Q)$ для плоского и цилиндрического случаев имеет вид

$$G(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|},\qquad G(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{a-b\cos\theta}}$$

$$a=r^2+r_0^2+(z-z_0)^2,\quad b=2rr_0.$$

Функции $G(P, Q)$ и $F(P, Q)$ в осесимметричном случае выражаются через полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем m и дополнительным модулем $m_1^2=1-m^2$

$$G(P,Q)=\frac{K(m)}{\pi\sqrt{a+b}}$$

$$F(P,Q)=-\frac{K(m)-E(m)}{2\pi r\sqrt{a+b}}n_r+\frac{n_r(r_0-r)+n_z(z_0-z)}{\pi(a-b)\sqrt{a+b}}E(m)$$

$$m^2=\frac{4rr_0}{(r+r_0)^2+(z-z_0)^2},\qquad 0\leqslant m\leqslant 1$$

Для вычисления эллиптических интегралов используются конечно-полиномиальные представления [8]

$$K(m)=\sum_{i=0}^{n}\left[a_i m_1^i+b_i m_1^i\ln\left(\frac{1}{m_1}\right)\right]+\varepsilon(m)$$

$$E(m)=1+\sum_{i=1}^{n}\left[c_i m_1^i+d_i m_1^i\ln\left(\frac{1}{m_1}\right)\right]+\varepsilon(m)$$

при $n=4$, $\varepsilon(m)\leqslant 2\cdot 10^{-8}$, a_i, b_i, c_i, d_i — константы.

Переход от уравнения (3.1) к матричному виду осуществляется разбиением границы Γ на конечное число N прямолинейных отрезков Γ_i ($i=1, 2, \ldots, N$) и линейной аппроксимацией на каждом элементе функции φ и ее нормальной производной φ_n. В результате получается следующая система уравнений относительно φ и φ_n в узловых точках:

$$\beta_i\varphi_i+\sum_{j=1}^{N}F_{ij}\varphi_j=\sum_{j=1}^{N}G_{ij}\frac{\partial\varphi_j}{\partial n},\qquad i=1,2,\ldots,N \tag{3.2}$$

$$F_{ij}=\int\limits_{\Gamma_j}N_1F(P,Q)\,d\Gamma+\int\limits_{\Gamma_{j-1}}N_2F(P,Q)\,d\Gamma \tag{3.3}$$

$$G_{ij}=\int\limits_{\Gamma_j}N_1G(P,Q)\,d\Gamma+\int\limits_{\Gamma_{j-1}}N_2G(P,Q)\,d\Gamma \tag{3.4}$$

$$N_1=\frac{1}{2}(1-\xi),\qquad N_2=\frac{1}{2}(1+\xi),\qquad \xi\in[-1,1]$$

Для вычисления интегралов (3.3) и (3.4) используются шеститочечные квадратурные формулы Гаусса. В случае, когда источник расположен на элементе, по которому ведется интегрирование ($i=j$), интегралы (3.4) имеют логарифмическую особенность и для их вычисления используются квадратурные формулы с логарифмическими весами. Сингулярные интегралы (3.3) вычисляются аналитически в смысле главного значения по Коши.

Систему (3.2) можно представить в виде векторного уравнения $\mathbf{AX}=\mathbf{F}$ с квадратной матрицей $\mathbf{A}$ размера $N\times N$. Система уравнений решается методом Гаусса с частичным выбором ведущего элемента.

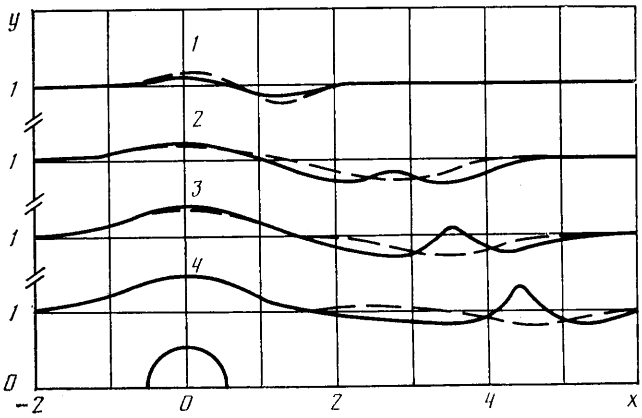
Метод граничных элементов позволяет находить вектор $\nabla\varphi$ через нормальную и касательную составляющие, поскольку из системы (3.2) непосредственно вычисляется нормальная компонента φ_n, а касательная составляющая φ_s определяется по значениям потенциала. Новое положение свободной границы можно найти из соотношений

$$\dot{x}=\varphi_n \cos(n, x)+\varphi_s \cos(n, y)$$
$$\dot{y}=\varphi_n \cos(n, y)-\varphi_s \cos(n, x)$$

В методе конечных элементов компоненты вектора скорости находятся в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=J^{-1}\sum_{i=1}^{4}\varphi_i u_i, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=J^{-1}\sum_{i=1}^{4}\varphi_i v_i$$

где величины u_i, v_i определяются с помощью формул (2.2) и (2.3). Для контроля и сравнения результатов такой подход использовался и в методе граничных элементов. При этом значения потенциала во внутренних узлах находились из уравнения (3.2) по известному значению потенциала и его нормальной производной на границе.



Фиг. 1

4. Горизонтальное движение тела под свободной поверхностью. На фиг. 1 показана форма свободной границы при движении с постоянной скоростью v_0 из состояния покоя полукругового цилиндрического выступа диаметра D по горизонтальному дну влево. Размер области $\Omega(t)$ по горизонтали выбирался равным $12D(-8D, 4D)$. На левой и на правой границах ставились условия типа «сноса». Глубина невозмущенной жидкости в указанных сечениях принималась равной R.

Задача решалась в неподвижной системе координат. Вычисления проводились одновременно по двум указанным методам. Максимальное отклонение результатов не превышало 2%.

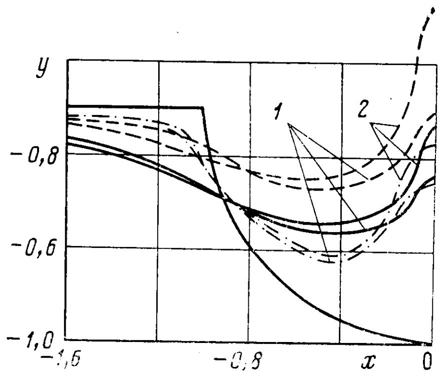
Сетка метода конечных элементов перестраивалась на каждом шаге по времени и состояла из 415 элементов и 504 узлов (при 84 узлах на свободной границе и 10 узлах на теле). В методе граничных элементов бралось 58 узлов (при 28 узлах на свободной границе и 10 узлах на теле). Графики изображены в подвижной системе координат, связанной с телом. Шаг по безразмерному времени $\tau=v_0t/D$ выбирался равным $\Delta\tau=0{,}1$. Абсциссы и ординаты на графиках отнесены к диаметру тела D. Кривые *1–4*, соответствующие 10, 28, 35 и 45 шагам по времени, сдвинуты по вертикали одна под другой.

На фиг. 1 пунктирной линией изображается конфигурация свободной границы для невесомой жидкости (число Фруда $\mathrm{Fr}=v_0/\sqrt{gD}=\infty$). За выступом образуется впадина, которая, слабо деформируясь, примерно с той же скоростью v_0 удаляется от тела. Над телом формируется волна, форма которой уже после 30 шагов практически не изменяется; за телом на свободной границе образуется «полочка».

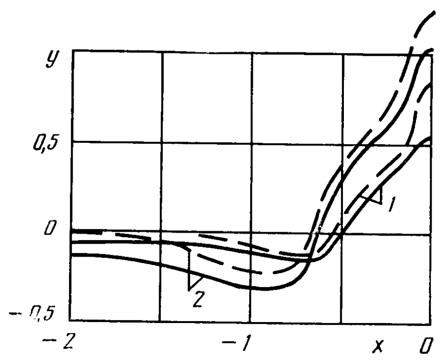
Более сложная картина течения наблюдается при движении тела в тяжелой жидкости. На фиг. 1 сплошной линией показаны расчеты для Fr=2. Хорошо видно, как впадина, образовавшаяся за телом, деформируется; в ней появляется всплеск типа кумулятивной струи. Формирование «полочки» начинается после 40 шагов по времени.

Кривые, соответствующие расчетам по обтеканию полукругового цилиндра стационарным потоком идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей Γ_1 для Fr=∞, 2 [7, 9], совпадают по конфигурации волны над телом с кривыми *4* на фиг. 1. Отличие лишь в том, что в нестационарном течении имеется уходящая вниз по течению впадина.

5. Моделирование кумулятивной струи и султана. На фиг. 2 показана эволюция свободной границы, первоначально образующей цилиндрическую или сферическую впадину. Формирование кумулятивной струи в плоском случае, при схлопывании цилиндрической впадины, как само-



Фиг. 2



Фиг. 3

стоятельная задача было рассмотрено ранее методом электрогидродинамической аналогии (ЭГДА) [4]. Цифрами *1* и *2* обозначены кривые, соответствующие моментам безразмерного времени $\tau=t\sqrt{g/R}$, равным $66\cdot10^{-2}$ и $69\cdot10^{-2}$, R — радиус невозмущенной впадины. Штриховой линией изображена форма кумулятивных струй в осесимметричном случае, сплошной и штрихпунктирной — в плоском случае. Штрихпунктирная кривая получена методом ЭГДА [4]. Остальные кривые — методами конечных и граничных элементов. Различие плоских кривых объясняется, по-видимому, недостаточной точностью метода ЭГДА. Кроме того, по сравнению с [4] при расчетах по описанным методам полностью выполняется закон сохранения площадей. Все линейные размеры на графиках отнесены к радиусу R.

Процесс схлопывания впадины можно условно разделить на два этапа: медленный ($\tau<60\cdot10^{-2}$) — зарождение струи и быстрый ($\tau>60\cdot10^{-2}$) — выброс струи. Поэтому на первом этапе счет велся с шагом $\Delta\tau=0{,}1$, на втором — $\Delta\tau=0{,}01$. Количество элементов и число узлов выбирались такими же, как и при движении тела. Непосредственно на границе впадины в методе конечных элементов бралось 20 узлов, в методе граничных элементов —18 узлов. Область $\Omega(t)$ имела размеры в глубину — $4R$, в ширину $\pm5R$. На границах усеченной области удовлетворялось условие $\varphi=0$.

На фиг. 3 показана эволюция свободной границы невесомой жидкости при вертикальном импульсивном движении эллипса (в плоском случае) и эллипсоида (в осесимметричном) с соотношением осей 4 : 5 (большая ось R направлена по оси y). В начальный момент времени центр эллипса находился на глубине $h=2R$ от свободной поверхности, затем с постоянной скоростью v_0 продвинулся к свободной границе на расстояние $1{,}5R$ и остановился.

Кривые *1* и *2* соответствуют 15 и 20 шагам по безразмерному времени $\tau=v_0t/R$, с шагом $\Delta\tau=0{,}1$. Размеры области, отнесенные к величине R, принимались равными 4 в глубину и ±5 в ширину. Количество узлов на теле равнялось 20. Граничные условия и общее число узлов брались такими же, как и в предыдущих задачах. Сплошными линиями изображается форма свободной границы в плоском случае, штриховой — в осесимметричном.

Экспериментальное моделирование султана [3] показало, что при выходе тела из воды и его резкой остановке наблюдается сильный продольный градиент скорости вдоль оси симметрии. Полученные численные результаты подтверждают этот факт. Расчеты показывают, что нормальная скорость в точках вершины струи к 15-му шагу по времени в плоском случае достигает значения $\varphi_n=0{,}71v_0$, в осесимметричном — $\varphi_n=0{,}8v_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коннор Дж., Бреббиа К.* Метод конечных элементов в механике жидкости. Л.: Судостроение. 1979. 263 с.
2. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
3. *Кедринский В. К.* Модели М. А. Лаврентьева в задачах неустановившихся течений со свободными границами.– В кн.: Проблемы математики и механики. Новосибирск: Наука, 1983, с. 97–116.
4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 407 с.
5. *Константинов Г. А., Якимов Ю. Л.* Численный метод решения нестационарных осесимметричных задач гидромеханики идеальной жидкости со свободными поверхностями.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 4, с. 162–165.
6. *Воинов О. В., Воинов В. В.* Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями.– Докл. АН СССР, 1975, т. 221, № 3, с. 559–562.
7. *Афанасьев К. Е., Терентьев А. Г.* Применение метода конечных элементов в задачах со свободными границами.– В кн.: Динамика сплошной среды с нестационарными границами. Чебоксары: Изд-во Чувашского ун-та, 1984, с. 8–17.
8. Справочник по специальным функциям/Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
9. *Афанасьева М. М.* Применение метода граничных элементов в задачах идеальной жидкости со свободными границами.– В кн.: Взаимодействие тел с границами раздела сплошной среды. Чебоксары: Изд-во Чувашского ун-та, 1985, с. 15–19.

Чебоксары

Поступила в редакцию
30.IX.1985