МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1986

УДК 532.546

ОБ УСЛОВНОМ ОСРЕДНЕНИИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ В СЛУЧАЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

ШВИДЛЕР М. И.

Задача рационального описания фильтрационного переноса в реальных, макроскопически существенно неоднородных пористых средах представляет значительный интерес для теории фильтрации и ее технических приложений. Феноменологическая теория нестационарного движения однородной жидкости в гетерогенных системах (среды с двойной пористостью, трещиновато-пористые среды), использующая представления о расщеплении течения на последовательность вложенных континуумов и постулирующая механизм их взаимодействия, предложена в [1], близкая модель теплопереноса в неоднородных средах развита в [2]. В соответствии с [1] течение в каждой из однородных подсистем гетерогенного композита — фазе характеризуется своими полями давления и скорости фильтрации, связь между которыми имеет вид закона Дарси. Интенсивность обмена жидкостью между фазами считается пропорциональной разности фазовых давлений. Иной подход для описания фильтрационного переноса в гетерогенных системах, в том числе и композитных, связан с вероятностной трактовкой фильтрационных параметров и уравнений и определением функционалов от случайного решения либо с анализом уравнений, связывающих искомые и заданные функционалы [3]. Естественнная возможность исследования фильтрации в существенно неоднородных системах заключается в рассмотрении модельных периодических структур и осреднении уравнений фильтрации [4, 5].

Далее рассматривается процесс фильтрационного переноса однородной жидкости в неоднородной композитной среде, составленной из однородных фаз. Физические параметры композитной среды считаются зависящими только от пространственных координат и являются случайными полями. Для детального описания процесса переноса в таких средах практически важны условные функционалы — средние поля по отдельным фазам композитной среды. Задача описания фильтрационного переноса сводится к определению глобально и условно осредненных полей либо уравнений, их связывающих, а также к выяснению механизма массообмена между фазами.

1. Рассмотрим нестационарный перенос однородной слабосжимаемой жидкости в неоднородной деформируемой среде. Пусть в рамках линейной теории в пространственной области Ω с границей $\partial\Omega$ изучается задача

$$\operatorname{div}\mathbf{v}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}=f,\qquad \mathbf{v}=-\boldsymbol{\sigma}\nabla u \tag{1.1}$$

$$u(\mathbf{x},0)=u_0(\mathbf{x}),\qquad u|_{\partial\Omega}=\varphi(\mathbf{x},t) \tag{1.2}$$

Здесь $u(\mathbf{x},t)$ — давление, $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ — вектор скорости фильтрации, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ — положительно определенный и симметричный случайный тензор проводимости, $\alpha(\mathbf{x})$ — положительная случайная упругоемкость системы пористая среда — жидкость, $f(\mathbf{x},t)$ — плотность неслучайных источников.

Так как в композитной среде $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ и $\alpha(\mathbf{x})$ разрывны, под решением задачи (1.1)—(1.2) понимается обобщенное решение, удовлетворяющее соответствующим интегральным соотношениям.

Введем в рассмотрение средние по ансамблю реализаций случайных полей $\boldsymbol{\sigma}$ и α поля $U(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$

$$U(\mathbf{x},t)=\langle u(\mathbf{x},t)\rangle,\quad \mathbf{V}(\mathbf{x},t)=\langle \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\rangle \tag{1.3}$$

Будем полагать, что если характерный масштаб неоднородности δ стохастически однородных полей $\sigma(\mathbf{x})$ и $\alpha(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию $\delta \ll l_\Omega$, где l_Ω — масштаб области Ω, то усреднение по вероятностной мере в (1.3) может быть заменено усреднением по объему области ω_Δ, масштаб которой Δ удовлетворяет неравенствам $\delta \ll \Delta \ll l_\Omega$.

Для детального описания перейдем к условному осреднению полей $u(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ по фазам и введем случайные индикаторные функции

$$z_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_i \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega/\Omega_i \end{cases} \qquad (1.4)$$

где Ω_i — часть пространства Ω, занятого i-й фазой, $i=1, \ldots, m$.

Индикаторные функции удовлетворяют соотношениям

$$\sum z_i(\mathbf{x}) = 1, \qquad \langle z_i \rangle = \mu_i$$

где μ_i — объемная доля i-й фазы в композите.

Под условным осреднением поля $y(x, t)$ понимается операция

$$\langle y \rangle_i = \langle y \rangle, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_i \qquad (1.5)$$

и для любого случайного поля

$$\langle y \rangle_i = \langle z_i y \rangle / \mu_i \qquad (1.6)$$

т. е. для условного осреднения y достаточно безусловно осреднить $z_i y$ и результат перенормировать.

Теперь, учитывая (1.4), (1.5), (1.6), введем условные средние давления и скорость фильтрации

$$U_i = \langle u \rangle_i, \qquad \mathbf{V}_i = \langle \mathbf{v} \rangle_i \qquad (1.7)$$

и перейдем к условному осреднению дифференциальных операторов, учитывая, что оператор условного осреднения в отличие от безусловного вообще говоря, не коммутирует с дифференцированием по пространственным переменным. Из (1.6) и (1.7) следует:

$$\begin{gathered} \langle \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle_i = \operatorname{div} \mathbf{V}_i + Q_i \mu_i^{-1} \\ Q_i = -\langle \mathbf{v} \nabla z_i \rangle, \qquad \sum_i Q_i = 0 \end{gathered} \qquad (1.8)$$

Аналогично

$$\begin{gathered} \langle \nabla u \rangle_i = \nabla U_i + \mathbf{\Psi}_i \mu_i^{-1} \\ \mathbf{\Psi}_i = -\langle u \nabla z_i \rangle, \qquad \sum_i \mathbf{\Psi}_i = 0 \end{gathered} \qquad (1.9)$$

Корреляции Q_i и $\mathbf{\Psi}_i$ имеют ясный физический смысл. Так как обобщенная функция ∇z_i отлична от нуля только на границах различных фаз $\partial\Omega_i$, корреляционный момент Q_i является удельным средним перетоком жидкости из i-го континуума-фазы в остальные, а $\mathbf{\Psi}_i$ — средняя удельная сила давления потока из других фаз на поверхность, ограничивающую i-ю фазу.

Условно осреднив систему (1.1) с учетом (1.8) и (1.9), получим уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_i + \alpha_i \frac{\partial U}{\partial t} + \mu_i^{-1} Q_i = f \qquad (1.10)$$

$$\mathbf{V}_i = -\sigma_i (\nabla U_i + \mu_i^{-1} \mathbf{\Psi}_i) \qquad (1.11)$$

Систему (1.10), (1.11), хотя она и не замкнута (так как не вычислены корреляции Q_i и $\boldsymbol{\Psi}_i$), можно трактовать как точные уравнения переноса в i-м континууме-фазе. При этом в условии баланса массы в континууме-фазе (1.10) член Q_i определяет интенсивность массообмена между i-й фазой и другими фазами. Уравнение (1.11) — модифицированный закон Дарси, из которого следует, что средняя скорость фильтрации в фазе линейно зависит от градиента фазового давления ∇U_i и вектора $\boldsymbol{\Psi}_i$ — удельной силы давления потоков из других фаз.

Умножив уравнение (1.10) на μ_i и просуммировав по всем i, получим уравнение баланса массы для композитной системы

$$\operatorname{div}\mathbf{V}+\sum_i \alpha_i\mu_i\frac{\partial U_i}{\partial t}=f \tag{1.12}$$

содержащее условно и безусловно осредненные поля U_i и $\mathbf{V}$.

2. Для замыкания условно осредненной системы, определения полей U_i, $\mathbf{V}_i$, перетоков Q_i и сил $\boldsymbol{\Psi}_i$ естественно использовать результаты безусловного осреднения системы (1.1). Как известно [6], безусловно осредненная система является следствием разложения осредненного параболического оператора в ряд по степеням параметра $\varepsilon=\delta/l_\Omega$ и может быть в случае системы (1.1) представлена в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{V}+\alpha^*\frac{\partial U}{\partial t}+\varepsilon\lambda(DU)=f \tag{2.1}$$

$$\mathbf{V}=-\boldsymbol{\sigma}^*\nabla U+\varepsilon\gamma(DU) \tag{2.2}$$

где $\alpha^*=\langle\alpha\rangle=\mathrm{const}$, а $\boldsymbol{\sigma}^*=\mathrm{const}$ — тензор эффективной проводимости, определяемый из эксперимента либо из решения соответствующей вспомогательной задачи [3]. Выражения $\lambda(DU)$ и $\boldsymbol{\gamma}(DU)$ являются бесконечными асимптотическими рядами по степеням параметра ε, коэффициенты при которых — линейные комбинации производных поля U.

Очевидно, к (2.1) следует присоединить дополнительные условия (1.2), отнесенные к функции $U(\mathbf{x}, t)$. Таким образом, в терминах U и $\mathbf{V}$ существует замкнутое описание процесса нестационарной фильтрации в гетерогенных средах. Основная трудность реализации такого описания заключена в определении тензора σ^* и построении рядов $\lambda(DU)$ и $\gamma(DU)$.

Сравнив (2.1) с (1.12), запишем уравнение для U_i

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu_i\frac{\partial U_i}{\partial t}=\alpha^*\frac{\partial U}{\partial t}+\varepsilon\lambda(DU) \tag{2.3}$$

к которому присоединим очевидное соотношение

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_i\frac{\partial U_i}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial t} \tag{2.4}$$

При $m=2$ и $\alpha_1\neq\alpha_2$ система (2.3)—(2.4) имеет единственное решение относительно $\partial U_1/\partial t$ и $\partial U_2/\partial t$. Проинтегрировав его по времени, получим

$$U_1=U+\varepsilon\mu_1^{-1}(\alpha_1-\alpha_2)^{-1}\int_0^t\lambda(DU)\,d\tau \tag{2.5}$$

$$U_2=U+\varepsilon\mu_2^{-1}(\alpha_2-\alpha_1)^{-1}\int_0^t\lambda(DU)\,d\tau$$

Комбинируя осредненное уравнение (2.2) с уравнениями (1.11), найдем векторы $\boldsymbol{\Psi}_1$ и $\boldsymbol{\Psi}_2$, средние фазовые значения градиента давления и скорости фильтрации

$$\boldsymbol{\Psi}_1=(\boldsymbol{\sigma}_2-\boldsymbol{\sigma}_1)^{-1}[(\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle-\boldsymbol{\sigma}^*)\nabla U+\varepsilon\boldsymbol{\gamma}]+\varepsilon(\alpha_2-\alpha_1)^{-1}\int_0^t\nabla\lambda\,d\tau$$
$$\boldsymbol{\Psi}_2=(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)^{-1}[(\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle-\boldsymbol{\sigma}^*)\nabla U+\varepsilon\boldsymbol{\gamma}]+\varepsilon(\alpha_1-\alpha_2)^{-1}\int_0^t\nabla\lambda\,d\tau \tag{2.6}$$

$$\langle\nabla u\rangle_1=\mu_1^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_2-\boldsymbol{\sigma}_1)^{-1}[(\boldsymbol{\sigma}_2-\boldsymbol{\sigma}^*)\nabla U+\varepsilon\boldsymbol{\gamma}]$$
$$\langle\nabla u\rangle_2=\mu_2^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)^{-1}[(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}^*)\nabla U+\varepsilon\boldsymbol{\gamma}] \tag{2.7}$$

$$\mathbf{V}_1=-\boldsymbol{\sigma}_1\langle\nabla u\rangle_1,\quad \mathbf{V}_2=-\boldsymbol{\sigma}_2\langle\nabla u\rangle_2 \tag{2.8}$$

Подстановка (2.5) и (2.8) в (1.10) дает возможность определить перетоки Q_i

$$Q_i=\mu_i\left\{f-\operatorname{div}\mathbf{V}_i-\alpha_i\left[\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\varepsilon\lambda}{\alpha_i-\langle\alpha\rangle}\right]\right\} \tag{2.9}$$

3. Рассмотрим процесс фильтрационного переноса в гетерогенных средах такого достаточно малого масштаба неоднородности ε, для которого в осредненных уравнениях (2.1) и (2.2) могут быть оставлены лишь главные члены, т. е. при $\varepsilon=0$. Тогда из формул (2.5) и (2.6) следует, что $U_1=U_2=U$, а векторы $\boldsymbol{\Psi}_i$ имеют вид

$$\boldsymbol{\Psi}_1=(\boldsymbol{\sigma}_2-\boldsymbol{\sigma}_1)^{-1}(\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle-\boldsymbol{\sigma}^*)\nabla U,\qquad \boldsymbol{\Psi}_2=(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)^{-1}(\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle-\boldsymbol{\sigma}^*)\nabla U \tag{3.1}$$

Из (3.1) вытекает, что в неоднородной по проводимости среде $\boldsymbol{\Psi}_i=0$ лишь в слоистой системе при условии, что ∇U направлен вдоль слоев.

Для средних фазовых скоростей фильтрации имеем

$$\mathbf{V}_i=-\boldsymbol{\sigma}_i f_i^*\nabla U \tag{3.2}$$

$$f_1^*=\mu_1^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_2-\boldsymbol{\sigma}_1)^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_2-\boldsymbol{\sigma}^*),\qquad f_2^*=\mu_2^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}^*) \tag{3.3}$$

Тензоры f_i^*, которые естественно назвать относительными фазовыми проводимостями [7], удовлетворяют очевидным соотношениям

$$\sum_i\mu_i f_i^*=I,\qquad \sum_i\boldsymbol{\sigma}_i\mu_i f_i^*=\boldsymbol{\sigma}^* \tag{3.4}$$

Для перетоков между фазами в рассматриваемом приближении имеем

$$Q_i=\mu_i\left\{\operatorname{div}[(\boldsymbol{\sigma}_i f_i^*-\boldsymbol{\sigma}^*)\nabla U]-(\alpha_i-\langle\alpha\rangle)\frac{\partial U}{\partial t}\right\} \tag{3.5}$$

В мелкомасштабном приближении $\varepsilon\ll1$ система (2.3) – (2.4) имеет решение $U_i=U$ и при $m>2$. В этом случае естественно считать, что векторы $\boldsymbol{\Psi}_i$ линейно зависят от ∇U

$$\boldsymbol{\Psi}_i=\beta_i\nabla U,\qquad \sum_i\beta_i=0$$

однако в отличие от (3.1) тензоры $\beta_i=\mathrm{const}$ не удается выразить через $\boldsymbol{\sigma}_i$ и $\boldsymbol{\sigma}^*$ и они должны определяться из эксперимента. Вводя относительные фазовые проводимости

$$f_i^*=I+\mu_i^{-1}\beta_i$$

получим формулы (3.2), (3.4), (3.5); следовательно, в случае $\varepsilon\ll1$ условно осредненная система может быть замкнута при любом $m\geqslant2$.

Пусть в реальном композите i-я фаза распределена в виде множества включений. Выделив в пространстве Ω произвольный объем ω, вычислим удельный поток через поверхность включений i-й фазы в этом объеме

$$q_i^{\omega}=|\omega|^{-1}\sum_j\int\limits_{S_{ij}}\mathbf{v}\,d\mathbf{S}_{ij} \tag{3.6}$$

где S_{ij} — граничная поверхность, отделяющая j-е включение i-й фазы. При этом следует иметь в виду, что определенная часть включений будет рассечена границей $\partial\omega$ и, следовательно; помимо потока из включений i-й фазы в другие фазы объема в (3.6) войдет и поток по фазе через поверхность $\partial\omega$. Переходя в (3.6) к интегрированию по объему, получим

$$q_i^{\omega}=|\omega|^{-1}\sum_j\int\limits_{\omega_{ij}}\operatorname{div}\mathbf{v}\,d\omega_{ij}=|\omega|^{-1}\int\limits_{\omega}z_i\operatorname{div}\mathbf{v}\,d\omega$$

и, следовательно, среднее значение перетока $\langle q_i^{\omega}\rangle$ может быть представлено в виде

$$\langle q_i^{\omega}\rangle=|\omega|^{-1}\int\limits_{\omega}q_i\,d\omega$$

Средний удельный фазовый переток с учетом условно осредненного уравнения неразрывности из (1.1) принимает вид

$$q_i=\mu_i\langle\operatorname{div}\mathbf{v}\rangle_i=\mu_i\left(f-\alpha_i\frac{\partial U_i}{\partial t}\right) \tag{3.7}$$

Сравнивая (3.7) и (1.8), найдем, что перетоки q_i и Q_i связаны зависимостью

$$Q_i=q_i-\mu_i\operatorname{div}\mathbf{V}_i$$

Очевидно, Q_i и q_i имеют различный физический смысл. Если q_i характеризует полный переток из i-й фазы, то Q_i — характеристика массообмена между различными фазами. Пусть, например, при $\varepsilon\ll1$ рассматривается установившаяся фильтрация в среде без источников. Тогда полный переток $q_i=0$. С другой стороны, если тензор $\boldsymbol{\sigma}^*$ анизотропен, а $\nabla U\neq\neq\mathrm{const}$, то при $\boldsymbol{\sigma}_i\neq0$ из (3.5) следует, что переток между фазами $Q_i\neq0$.

Рассмотрим предельный случай двухфазного композита, для которого характерно существенное различие проводимостей фаз. Пусть, например, фазы изотропны и $\sigma_1\gg\sigma_2$. Тогда система уравнений примет вид

$$\operatorname{div}\mathbf{V}_1+\alpha_1\frac{\partial U}{\partial t}+\mu_1^{-1}Q_1=f,\qquad \alpha_2\frac{\partial U}{\partial t}-\mu_2^{-1}Q_1=f \tag{3.8}$$

$$\mathbf{V}_1=-\mu_1^{-1}\boldsymbol{\sigma}^*\nabla U,\qquad \mathbf{V}_2=0$$

Очевидно, в рассматриваемом случае $Q_i=q_i$, а исключение из системы (3.8) перетока Q_1 приводит, как это и должно быть, к системе (2.1), (2.2) при $\varepsilon=0$.

Таким образом, условное осреднение уравнений фильтрационного переноса в гетерогенных композитных системах показывает, что описание в терминах U и $\mathbf{V}$ достаточно для определения таких фазовых макроскопических характеристик течения, как $\langle u\rangle_i$, $\langle\nabla u\rangle_i$, $\boldsymbol{\Psi}_i$, $\langle\mathbf{v}\rangle_i$, Q_i, q_i. Оно тем более точное, чем точнее глобально усредненные уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 5, с. 852–864.
2. *Рубинштейн Л. И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах.— Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1948, т. 12, вып. 1, с. 27–45.
3. *Швидлер М. И.* Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985. 288 с.
4. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
5. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. Н.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
6. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* О *G*-сходимости параболических операторов.— Успехи мат. наук, 1981, т. 36, № 1, с. 11–58.
7. *Швидлер М. И.* К определению самосогласованных эффективных параметров в задачах фильтрационного переноса.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 3, с. 64–71.

Москва

Поступила в редакцию
21.VIII.1985