МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1986

УДК 532.527:519.63

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ ПЕРЕХОДОВ В ПЛОСКОМ СДВИГОВОМ СЛОЕ

КОЗЛОВ В. Ф., ЯРОЩУК Е. В.

В плоских задачах гидродинамики под сдвиговым слоем подразумевается переходная зона между двумя параллельными потоками с различными скоростями [1]. В изучении структуры и эволюции этих слоев на моделях идеальной однородной несжимаемой жидкости распространен подход, при котором определяются возможные стационарные состояния сдвиговых слоев, исследуется их устойчивость и изучается процесс распада выделенных неустойчивых состояний. Интересный класс стационарных состояний представляют области постоянной завихренности, периодически повторяющиеся вдоль оси x с длиной волны L. В предположении, что отдельные вихри можно аппроксимировать эллипсами с полуосями a и b, в [2] указано условие существования стационарного состояния $L>3{,}3\sqrt{ab}$. Форма отдельных вихрей в такой цепочке, включая предельный случай их соприкосновения, численно определена в [3]. В работах [4, 5] этот класс был дополнен решениями, бифурцирующими от вихревой пелены конечной толщины. Представляет несомненный интерес моделирование возможных переходов между различными структурами сдвигового слоя, различающимися характером распределения завихренности. В настоящей статье приводятся некоторые результаты численного решения задач указанного типа, построенных с помощью метода контурной динамики [6]. Этот метод недавно был успешно применен для исследования поведения слоя постоянной завихренности возле твердой стенки [7] и воспроизведения нелинейной неустойчивости Кельвина – Гельмгольца свободного сдвигового слоя при конечных начальных возмущениях [8].

1. Пусть мгновенное состояние сдвигового слоя аппроксимируется бесконечным рядом периодически повторяющихся областей постоянной завихренности ω_0, одну из которых обозначим через $S(t)$. Функция тока имеет представление

$$\psi(x,y,t)=\omega_0\iint\limits_{S(t)} G(\xi-x,\eta-y)\,d\xi\,d\eta \tag{1.1}$$

$$G(x,y)=\frac{1}{4\pi}\ln\left[\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi y}{L}\right)-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]$$

Преобразуя интеграл (1.1) в контурный по границе $C(t)$ области $S(t)$, получим для функции тока и проекций вектора скорости выражения

$$\psi(x,y,t)=-\omega_0\oint\limits_{C(t)} F(\xi-x,\eta-y)\,d\xi \tag{1.2}$$

$$u=-\psi_y=-\omega_0\oint\limits_{C(t)} G(\xi-x,\eta-y)\,d\xi \tag{1.3}$$

$$v=\psi_x=-\omega_0\oint\limits_{C(t)} G(\xi-x,\eta-y)\,d\eta \tag{1.4}$$

$$F(x,y)=\int\limits_0^y G(x,y)\,dy$$

Если завихренные области непрерывно переходят одна в другую (сдвиговой слой представляет бесконечную полоску), в формулах (1.2)–(1.4) интегралы по вертикальным участкам $C(t)$ в сечениях $\xi=0$ и $\xi=L$ в силу периодичности взаимно уничтожаются. Возникающие в подынтегральных функциях при $(x, y)\in C(t)$ логарифмические особенности легко устраняются интегрированием по частям.

Эволюция контура $C(t)$ описывается дифференциальными уравнениями $dx/dt=u$, $dy/dt=v$, где под (x, y) подразумеваются лагранжевы координаты произвольной жидкой частицы на контуре. Принятый в настоящей работе вычислительный алгоритм [9] предусматривает параметрическое задание контура с последующей аппроксимацией его конечным множеством опорных точек, которое в целях равномерного распределения узлов после каждого временного шага перестраивается с использованием техники периодических кубических сплайнов. Интегрирование эволюционных уравнений осуществлялось по схеме Эйлера с пересчетом.

2. Перейдем к обсуждению численных экспериментов. В первой серии расчетов в качестве начального состояния принималась прямолинейная полоса постоянной завихренности шириной h. Для возмущений, пропорциональных $\exp(\lambda t+2\pi mxi/L)$, имеем [10]

$$\lambda=\pm\frac{\omega_0}{2}\sqrt{\Phi(z)},\qquad z=2\pi mq,\qquad q=\frac{h}{L},\qquad \Phi(z)=e^{-2z}-(1-z)^2$$

Функция $\Phi(z)$ положительна в промежутке $0<z<\mu=1{,}278$, достигая максимума $\Phi(\nu)=0{,}162$ в точке $z=\nu=0{,}797$. Отсюда следует, что при заданном m и условии $z=\nu$ в процессе развития неустойчивости должна преобладать m-я мода. Это полностью подтвердилось в численных экспериментах, в которых постоянно возмущающим шумом служили ошибки аппроксимации и округления в ЭВМ. В каждом случае развивалась характерная для неустойчивости Гельмгольца картина сворачивания вихревой пелены конечной толщины в систему компактных квазиэллиптических вихрей, соединенных тонкими нитями завихренности. Переход к нелинейной стадии распада значительно ускоряется, если полосе придать начальное возмущение, согласованное с ожидаемой теоретической модой.

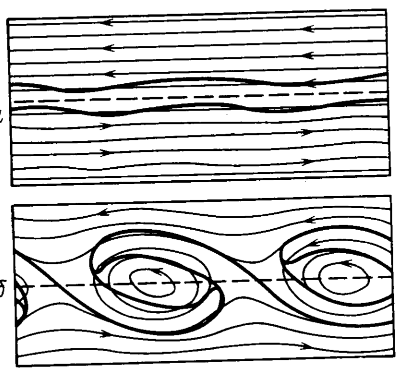
На фиг. 1 представлены начальная конфигурация (*а*) и результат расчета в безразмерный момент времени $\tau=\omega_0 t=24$ (*б*) при $q=0{,}0625$, что очень близко к условию максимального развития второй моды. Толстыми линиями показаны границы области $S(t)$, а тонкие изображают линии тока, вычисленные с помощью (1.2). Амплитуда косинусоидального исходного возмущения составляла 10% от ширины невозмущенной полосы. Для аппроксимации горизонтальных участков контуров в начальный момент времени использовалось по 60 узлов, число которых в дальнейшем автоматически увеличивалось пропорционально растущей длине каждого контура (до 165 при $\tau=24$).

По данным трех экспериментов, выполненных при $q=0{,}125$; $0{,}0625$; $0{,}0415$ и отвечающих $m=1, 2, 3$, были определены для сформировавшихся вихрей средние отношения $\chi=b/a$ минимального и максимального диаметров; они оказались близки к 0,5.

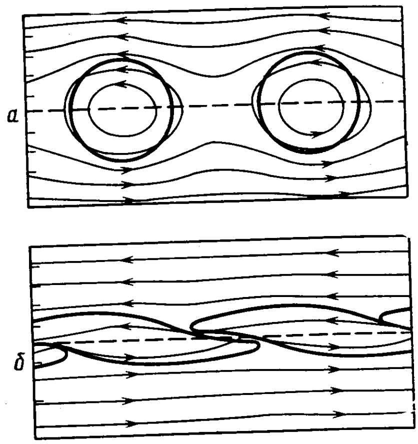
Во второй серии экспериментов изучалась эволюция цепочки первоначально круглых вихрей радиуса r, центры которых расположены на расстоянии L друг от друга. Более естественным было бы исходить из известных стационарных состояний [3–5], однако это оказалось затруднительным из-за представления последних в цитированных источниках лишь в графической форме. Возможность существования квазистационарной цепочки первоначально круглых областей постоянной завихренности изучалась методом точечных вихрей в [2], где показано, что при $p=r/L=0{,}32$ система разрушается, а при $p=0{,}26$ вихри колеблются с периодом, близким к $T=12/\pi^2p^2\omega_0$.

Ниже сделана попытка уточнить критическое значение p^* и проследить за эволюцией цепочки в случае ее распада. Всего было выполнено 11 экспериментов в интервале $0{,}24 \leqslant p \leqslant 0{,}45$. При $p \leqslant 0{,}249$ вихри периодически меняют свою форму в качественном согласии с моделью [11] движения эллиптического вихря в потоке с постоянным сдвигом скорости. При $p=0{,}250$, вытянувшись вдоль оси цепочки, соседние вихри налегают концами друг на друга, образуя конфигурацию, очень сходную со стационарным состоянием, бифурцирующим от сдвигового слоя постоянной толщины [4, 5]. При дальнейшем увеличении параметра p вихри все больше вытягиваются в продольном направлении, прижимаясь друг к другу.

Пример эволюции указанного типа при $p=0{,}260$ приведен на фиг. 2, на которой хорошо видно, как исходное поле линий тока (a) трансфор-



Фиг. 1



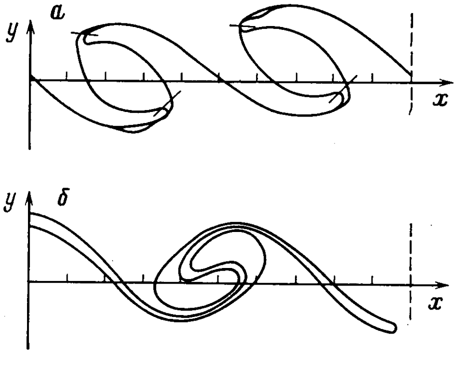
Фиг. 2

мируется при $\tau=10{,}7$ в структуру ($б$), характерную для слабо возмущенного сдвигового слоя конечной толщины (ср. с фиг. 1, a). Если допустить, что возможна эволюция цепочки в стационарный сдвиговой слой постоянной толщины, из условия сохранения завихренных площадей находим $q=\pi p^2$, откуда при $p^*=0{,}250$ следует $q=0{,}196$, что чуть меньше рэлеевского критерия устойчивости $q^*=\mu/2\pi=0{,}203$ для первой моды. На самом деле при $q>0{,}250$, как показывает анализ сформировавшихся полос переменной толщины, их границы представляют почти гармонические волны, фазовые скорости распространения которых близки к значениям, предсказываемым линейной теорией возмущений устойчивых прямолинейных полос постоянной ширины $q>q^*$.

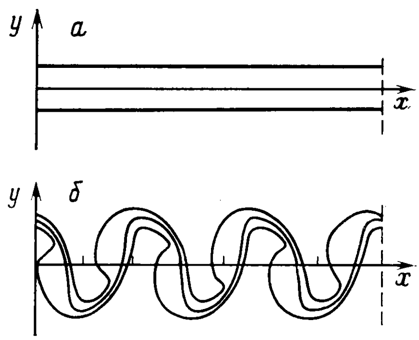
Фигура 1 иллюстрирует характерную для метода контурной динамики особенность, связанную с появлением динамически незначимых тонких и длинных нитей завихренности (или безвихревых перемычек на фиг. 2, $б$), требующих для своего разрешения все возрастающих ресурсов ЭВМ. Искусственное устранение указанных нитей и изменение топологии слоя делает возможным продолжение эксперимента и моделирование субгармонической неустойчивости с последующим спариванием вихрей [1]. Эксперимент такого типа приведен на фиг. 3, где для первоначально прямолинейной сдвиговой полосы с $q=0{,}07$ в момент $\tau=72$ (a), когда уже заметно возбуждение субгармонической неустойчивости, было выполнено отсечение нитей в отмеченных короткими засечками местах и расчет продолжен далее до фактического слияния двух вихрей в один при $\tau=110$ ($б$) с характерным выбросом новых нитей. Отметим эффект вовлечения незавихренной жидкости внутрь сформировавшегося нового вихря. Ранее процесс субгармонической неустойчивости и спаривания моделировался методом точечных вихрей [12].

Два прилегающих сдвиговых слоя с постоянными завихренностями разных знаков моделируют простейшее струйное течение с кусочно-линейным профилем скорости. На фиг. 4 представлена рассчитанная эволюция симметричной струи с $h_1=h_2=0{,}0975L$ (*а*) (максимально растущей является вторая мода; изображены полтора пространственных периода), приводящая при $\tau=71$ (*б*) к формированию кармановской дорожки в соответствии с моделью неустойчивости ламинарного следа [13].

Выполненные численные эксперименты свидетельствуют о перспективности метода контурной динамики как средства моделирования формирования и разрушения различных вихревых структур в плоских течениях идеальной несжимаемой жидкости. Приведенные на фиг. 1, 2 примеры иллюстрируют двойственную природу сдвигового слоя и демонстрируют характер взаимных переходов полоска – цепочка и обратно. Такие процессы, в частности, представляют большой интерес для океанологии, где климатические фронтальные разделы, проявляющие себя в природе попеременно в одной из двух указанных выше форм, моделируются в виде сдвиговых слоев.



Фиг. 3



Фиг. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984. 344 с.
2. *Moore D. W., Saffman P. G.* The density of organized vortices in a turbulent mixing layer.– J. Fluid Mech., 1975, v. 69, № 3, p. 465–473.
3. *Дудоладов И. В., Садовский В. С.* Исследование цепочки вихрей конечного поперечного сечения.– Уч. зап. ЦАГИ, 1977, т. 8, № 6, с. 9–17.
4. *Saffman P. G., Szeto R.* Structure of a linear array of uniform vortices.– Stud. Appl. Math., 1981, v. 65, № 3, p. 223–248.
5. *Pierrehumbert R. T., Widnall S. E.* The structure of organized vortices in a free shear layer.– J. Fluid Mech., 1981, v. 102, p. 301–313.
6. *Zabusky N. J., Hughes M. H., Roberts K. V.* Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions.– J. Comout. Phys., 1979, v. 30, № 1, p. 96–106.
7. *Pullin D. I.* The nonlinear behaviour of a constant vorticity layer at a wall.– J. Fluid Mech., 1981, v. 108, p. 401–421.
8. *Pozrikidis C., Higdon J. J. L.* Nonlinear Kelvin-Helmholtz instability of a finite vortex layer.– J. Fluid Mech., 1985, v. 157, p. 225–263.
9. *Козлов В. Ф., Макаров В. Г.* Моделирование неустойчивости осесимметричных вихревых шнуров с помощью метода контурной динамики.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 1, с. 33–39.
10. *Рэлей, Дж. В. Стрэтт.* Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 476 с.
11. *Kida S.* Motion of an elliptic vortex in uniform shear flow.– J. Phys. Soc. Jap., 1981, v. 50, № 10, p. 3517–3520.
12. *Acton E.* The modelling of large eddies in a two-dimensional shear layer.– J. Fluid Mech., 1976, v. 76, № 3, p. 561–592.
13. *Christiansen J. P., Zabusky N. J.* Instability, coalescence and fission of finite-area vortex structures.– J. Fluid Mech.. 1973, v. 61, № 2, p. 219–243.

Владивосток

Поступила в редакцию
10.XI.1985