

УДК 532.5.011:551.324

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КРАЯ ЛЕДНИКА И ОКЕАНА**

**АХМЕДОВА Ф. Х., КОТЛЯР Л. М., ПОТАПЕНКО В. Ю.,
ЧУГУНОВ В. А.**

Математическое моделирование процессов тепло- и массопереноса в ледниковых покровах является одним из эффективных средств исследования и прогнозирования их развития. Наиболее полное освещение вопросов построения адекватных математических моделей дано в [1–5]. Анализ входящих в них уравнений [3, 6] позволяет выявить основные факторы и критерии подобия, определяющие динамику ледников, и обоснованно пренебречь второстепенными членами. В частности, упрощенная замкнутая система дифференциальных уравнений для детального расчета всех гидродинамических характеристик ледника может быть получена при $K_h \ll 1$ с точностью до $O(K_h^2)$, где K_h — отношение вертикального и горизонтального масштабов исследуемого ледникового массива ($K_h \sim 10^{-4} - 10^{-6}$). При этом многие качественные особенности динамики ледников сохраняются и в одномерных моделях в рамках субвизотермического приближения.

1. Математическая постановка задачи. С учетом сделанных выше замечаний запишем общую постановку задачи определения профиля высоты свободной поверхности ледника в одномерном приближении, край которого взаимодействует с океаном [6–8]

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < x_0(t) \tag{1.1}$$

$$Q = \text{sign} \left(\frac{\partial l}{\partial x} \right) \{ k(l - z_0) \Phi_1(\sigma) + (l - z_0)^2 \Phi_2(\sigma) \}$$

$$\sigma = (l - z_0) \left| \frac{\partial l}{\partial x} \right|$$

$$t = 0: l = l_0(x); \quad x = 0: Q = q_0$$

$$x = x_0: l = z_0 + K_p(z_* - z_0), \quad Q = q_1$$

Здесь t — время; x — продольная горизонтальная координата; x_0 — координата подвижного края ледника; $l(x, t)$ — профиль свободной поверхности ледника; $l_0(x)$ — начальная форма поверхности; $Z_0(x)$ — профиль подледного ложа; $f(x, t)$ — функция, характеризующая увеличение или уменьшение массы льда за счет выпадения осадков или таяния; k — обобщенный коэффициент трения; $K_p = \rho_1 / \rho$ — отношение плотности морской воды к плотности льда; z_* — уровень океана; q_0, q_1 — потоки массы льда на границах ледника; $\Phi_1(\sigma)$ и $\Phi_2(\sigma)$ — монотонно возрастающие функции, определяющие скорость проскальзывания льда у ложа и движение ледника за счет свойств текучести льда соответственно.

Экспериментальные данные для льда показывают, что связь между тензорами скоростей деформации и напряжений описывается степенной

зависимостью, поэтому функции Φ_1, Φ_2 имеют следующий вид [6, 8]:

$$\Phi_1(\sigma) = \sigma^{0,5(\alpha+1)}, \quad \Phi_2(\sigma) = \frac{\sigma^\alpha}{\alpha+2}$$

где α — показатель ползучести.

Уравнение (1.1) описывает динамику свободной поверхности ледника и является следствием общего уравнения баланса массы льда, а выражение для потока Q выводится из уравнений движения и неразрывности при следующих основных предположениях: лед является несжимаемой жидкостью Рейнера — Ривлина [2]; течение безынерционное и происходит только под действием сил тяжести; горизонтальные размеры ледника значительно больше его толщины.

Типичен случай, когда на границе $x=0$ $q_0=0$. Существенным моментом является то, что одна из границ неизвестна и подлежит определению, поэтому на границе $x=x_0$ ставятся два условия. Первое из них означает, что в том случае, когда ледник взаимодействует с океаном, его граница проходит в районе всплывания, где выполняется условие гидростатического равновесия. Условие $q_1=0$ может быть использовано, например, для горных ледников, а при взаимодействии края ледника с океаном $q_1 \neq 0$. Все величины в (1.1) приведены к безразмерному виду.

При $q_0=0, q_1 \neq 0$ скорость перемещения края ледника $V=dx_0/dt$ задается соотношениями [7]

$$V = \left[K_p \frac{dz_*}{dt} + \langle v \rangle \frac{\partial}{\partial x} (l-z_0) - f + \Omega \right] \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [l-z_0(1-K_p)] \right\}_{(x=x_0)}^{-1} \quad (1.2)$$

$$\Omega = K_\Omega (l-z_0)^{\alpha+1}, \quad K_\Omega = \zeta \left(\frac{0,5}{K_h} \right)^{\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{K_p} \right)^\alpha \quad (1.3)$$

которые получаются из анализа уравнения баланса массы льда в окрестности точки всплывания и условия гидростатического равновесия.

Здесь Ω — приведенная скорость сжатия ледникового массива, обусловленная краевым растягивающим напряжением; $\langle v \rangle$ — средняя по мощности ледника скорость; коэффициент $\zeta \leq 1$ определяется экспериментально и учитывает неравномерность распределения напряжений на границе ледника и влияние его трения о ложе.

Величина потока q_1 не произвольная, а определяется условием (1.2)

$$q_1 = - \left\{ V \frac{\partial}{\partial x} [l-z_0(1-K_p)] - K_p \frac{dz_*}{dt} + f - \Omega \right\} \left[\frac{\partial}{\partial x} \ln(l-z_0) \right]^{-1}, \quad (x=x_0)$$

Задача (1.1) существенно нелинейна и ее решение в общем случае может быть найдено с помощью численных методов. Отсутствие априорных оценок точности численных методов решения уравнений вида (1.1) делает необходимым построение их аналитических решений хотя бы в частных автотомодельных случаях для тестирования на них соответствующих разностных схем. Некоторые из таких решений получены с помощью аппарата группового анализа [10].

2. Инвариантные решения. Наиболее общим нетривиальным решением уравнения (1.1) при следующем виде функции f :

$$f(x, t) = (\eta) t^{-\lambda\beta(\alpha+1)}, \quad \eta = x t^{\beta(2+\lambda)}, \quad \beta = [1 + \lambda(\alpha+1)]^{-1} \quad (2.1)$$

является инвариантное $\langle X_3 + \lambda X_4 \rangle$ — решение, зависящее от двух произвольных параметров α, λ [8]

$$l(x, t) = \varphi(\eta) t^\beta \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{\alpha+2} (\varphi^{\alpha+2} \varphi' |\varphi'|^{\alpha-1})' + \beta(2+\lambda) \eta \varphi' - \beta \varphi + \psi = 0 \quad (2.3)$$

Приведем решения двух модельных задач, основанных на решении (2.2)–(2.3).

Рассмотрим растекание ледника на горизонтальном ложе. В (1.1) положим: $k=z_0=q_0=f=0$, $q_1 \neq 0$. Тогда из уравнений (2.2)–(2.3) при заданных α , K_ρ , z_*' , x_0 и $\lambda=-3$ находим решение в замкнутой форме

$$l(x, t) = \varphi(\eta)t^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{3\alpha+2}$$

$$\varphi(\eta) = \left[\frac{1+2\alpha}{1+\alpha} \left(\frac{\alpha+2}{3\alpha+2} \right)^{\nu-1} (\eta_0^\nu - \eta^\nu) + (K_\rho z_*')^{\nu+1} \right]^{1/(\nu+1)} \quad (2.4)$$

$$\nu = \frac{1+\alpha}{\alpha}$$

$$\eta_0 = x_0 t^{-\gamma}, \quad \eta = x t^{-\gamma}, \quad \eta_0, \eta > 0, \quad z_* = z_*' t^{-\gamma}, \quad z_*' = \text{const}$$

$$K_\alpha = \frac{1}{3\alpha+2} (K_\rho z_*')^{-\alpha} t^{-2\gamma(\alpha+1)}$$

В постановке (1.1) положим $k=z_0=q_0=0$, $q_1 \neq 0$. Функция осадконакопления f определяется уравнением (2.1), в котором $\psi(\eta)$ – некоторая произвольная функция. Решение задачи при заданных α , K_ρ и $\lambda=-1$ имеет вид

$$l(x, t) = \varphi(\eta)t^{1-\nu}, \quad z_* = (K_\rho^\alpha t)^{1-\nu} \quad (2.5)$$

$$\eta = x t^{1-\nu}, \quad x_0 = \eta_0 t^{1-\nu}, \quad \eta_0, \eta > 0$$

Функция $\varphi(\eta)$, константа η_0 и K_α определяются в результате численного решения обыкновенного дифференциального уравнения типа (2.3) с описанными краевыми условиями. Существенным отличием решений 1 и 2 является то, что во второй задаче функция осадконакопления f принимает ненулевое значение и, как видно из структуры решения (2.5), моделируется отступление ледника.

Отметим, что в настоящей работе полученные точные решения используются лишь в качестве тестов для исследования разработанного численного алгоритма решения общей задачи (1.1).

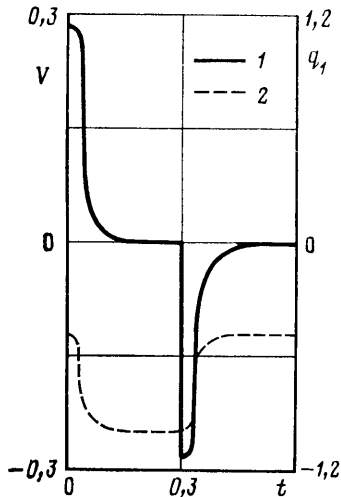
3. Разностная схема и численные решения. Для избежания трудностей реализации, связанных с зависимостью области расчета от времени, вводится новая переменная x/x_0 [8]. Далее для задачи (1.1) с помощью метода сумматорных тождеств [11, 12] на равномерной сетке строится неявная однородная консервативная разностная схема, которая реализуется методом Ньютона в сочетании с методом прогонки. В качестве нулевого приближения на каждом временном слое берутся значения, полученные путем линейной экстраполяции по двум предыдущим слоям. На первом же временном слое за нулевое приближение принимается начальное условие.

Для того чтобы оценить эффективность численного метода решения задачи (1.1), были выполнены специальные тесты на инвариантных решениях (2.4), (2.5). Результаты показали, что с измельчением шага h по переменной x край x_0 и скорость V , рассчитанные численно, стремятся к точному решению, что говорит о сходимости разностной схемы. Относительная погрешность через 100 временных слоев составила не более 0,1%. Профили же поверхности ледника через те же 100 временных слоев, рассчитанные аналитически по формуле (2.4) и численно, почти полностью совпали, отличие – не более 0,01%.

4. Влияние колебаний баланса массы на динамику границы ледника, взаимодействующего с океаном. Изучение влияния изменений функции осадконакопления на размеры ледника имеет важное прикладное значение, так как в определенных ситуациях малые изменения f могут привести к катастрофическим подвижкам ледникового покрова, т. е. к резким изменениям размеров ледника. Ясно, что необходимо уметь прогнозировать эти подвижки, а также вскрыть те условия, при которых они возможны.

Исследование этого вопроса проводилось с помощью математической модели и разностной схемы, описанных выше. За начальный профиль поверхности ледника были взяты данные, характерные для выводных ледников Антарктиды, кроме того, полагали

$$k=0,01; \alpha=2,5; z_*=0; K_0=0,7 \cdot 10^5; \\ K_p=1,12; a=18,5x+2,25$$



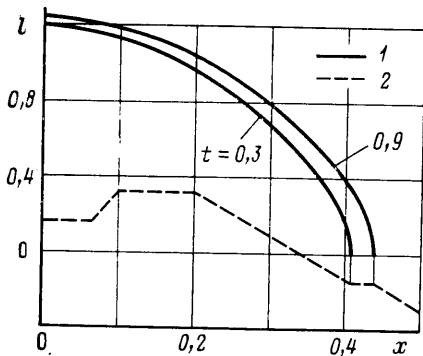
Фиг. 1

Рассмотрим периодические колебания функции f вида

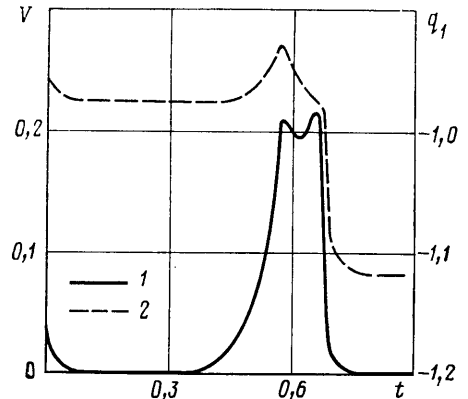
$$f(x, t)=a; 0,6(n-1) < t \leq 0,3(2n-1), \\ f(x, t)=0,5a; 0,3(2n-1) < t \leq 0,6n; \\ n=1, 2, 3 \dots$$

На фиг. 1 показана зависимость скорости движения края (кривая 1) и потока массы льда (кривая 2) в океан от времени в процессе перехода с одного стационарного состояния на другое при изменении функции f . Периодическим колебаниям функции осадконакопления соответствуют периодические колебания скорости V относительно нуля и потока q_1 с той же частотой. Кроме

того, отметим, что скорость течения льда быстрее реагирует на изменения в балансе массы, чем поток. Характерное время для ледников Антарктиды ≈ 17 тыс. лет, поэтому из фиг. 1 следует, что заметные изменения в скорости наступают значительно быстрее, тогда как изменения в потоке проявляются через 500 лет.



Фиг. 2



Фиг. 3

Анализируя результаты, можно заметить, что в случае наклонного ложа даже очень сильные изменения функции f приводят к равносному положению края ледника. Время перехода с одного стационарного режима на другой оценивается примерно в 3400 лет.

Рассмотрим тот же профиль ледника, но ложе пусть имеет прямолинейный участок на правом конце (см. фиг. 2, кривая 2) и функция осадконакопления задается следующим образом:

$$f(x, t)=a; 0 \leq t \leq 0,3; f(x, t)=a+0,03; t > 0,3$$

На фиг. 3 видно, что при незначительном увеличении функции f край

попадает на прямой участок ложа и ледник приходит в движение. При этом скорость движения края (кривая I) вначале возрастает, это обусловливается перестройкой профиля ледника, как и в предыдущем случае. Затем, после того как профиль перестроился, наблюдается тенденция к падению V . Но поскольку ледник к этому моменту уже вышел на прямолинейный участок, он не может стабилизироваться, так как сила краевого сжатия не уравнивается влиянием океана и наблюдается дальнейший рост скорости. Как только край попадает на наклонное ложе, V резко падает, так как в этом случае толщина ледника в краевой зоне меняется, а это приводит к тому, что сила краевого сжатия со временем уравнивается влиянием океана, край стабилизируется и наблюдается выход на новый стационар.

Данный эксперимент показывает, что если ложе содержит прямолинейные участки ниже уровня моря, то возможны резкие подвижки ледника и новое стационарное состояние наступает, когда ложе вновь принимает наклонную форму.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бадд У. Ф. Динамика масс льда. Л.: Гидрометеоздат, 1975. 235 с.
2. Григорян С. С., Шумский П. А. Простейшая математическая модель трехмерного нестационарного ледника.— В сб.: Науч. тр. Ин-та мех. МГУ. М.: Изд-во МГУ, 1975, № 42, с. 43–53.
3. Григорян С. С., Красс М. С., Шумский П. А. Математические модели основных типов ледников.— В сб.: Механика ледников. М.: Изд-во МГУ, 1977, с. 3–37.
4. Шумский П. А. Динамическая гляциология.— Итоги науки. Сер. География. Гидрология суши. Гляциология. М.: ВИНТИ, 1969. 170 с.
5. Красс М. С. Математические модели и численное моделирование в гляциологии. М.: Изд-во МГУ, 1981. 139 с.
6. Саламатин А. Н. Анализ простейших математических моделей куполовидных ледников.— В кн.: Исследования по прикладной математике. Вып. 7. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1979, с. 131–139.
7. Саламатин А. Н. О движении края покровного ледника.— В кн.: Исследования по прикладной математике. Вып. 10. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1982, с. 150–154.
8. Саламатин А. Н., Чугунов В. А., Мазо А. Б. Численное исследование и инвариантные решения задачи о динамике субизотермического ледника в одномерном приближении.— В сб.: Задачи механики природных процессов. М.: Изд-во МГУ, 1983, с. 82–96.
9. Чугунов В. А. О групповых свойствах уравнения, описывающего течение ледников.— Изд. вузов. Математика, 1982, № 10, с. 84–87.
10. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 399 с.
11. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
12. Карчевский М. М., Ляшко А. Д. Разностные схемы для нелинейных задач математической физики. Ч. 1. Квазилинейные эллиптические уравнения. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1976. 158 с.

Казань
Ленинград
Брежнев

Поступила в редакцию
30.IX.1985