8. *Мирончук Н. С., Храмов Н. Е.* Численное исследование бокового взаимодействия истекающей в вакуум осесимметричной струи с преградой.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 6, с. 49–54.
9. *Дубинская Н. В., Иванов М. Я.* Численное исследование стационарных режимов взаимодействия сверхзвуковой недорасширенной струи с плоской преградой, расположенной перпендикулярно к ее оси.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 5, с. 49–56.
10. *Дубинская Н. В., Иванов М. Я.* К расчету взаимодействия сверхзвуковой струи идеального газа с плоской преградой, перпендикулярной ее оси.– Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 5, с. 38–44.
11. *Глазнев В. Н., Демин В. С.* Полуэмпирическая теория генерации дискретных тонов сверхзвуковой недорасширенной струей, натекающей на преграду.– ПМТФ, 1976, № 6, с. 49–56.
12. *Иванов М. Я., Крайко А. Н., Михайлов Н. В.* Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений. I.– Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1972, т. 12, № 2, с. 441–463.
13. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
14. *Колган В. П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики.– Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 6, с. 68–77.
15. *Тилляева Н. И.* Обобщение модифицированной схемы С. К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки.– Уч. зап. ЦАГИ, 1986, т. 17, № 22, с. 25–33.
16. *Крайко А. Н., Макаров В. Е., Тилляева Н. И.* К численному построению фронтов ударных волн.– Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1980, т. 20, № 3, с. 716–723.
17. *Абрамович Г. Н.* Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1976. 888 с.
18. *Любимов А. Н., Русанов В. В.* Течения газа около тупых тел. М.: Наука, 1970. Ч. 1. 287 с. Ч. 2. 379 с.

Казань
Москва

Поступила в редакцию
18.VII.1985

УДК 532.527

О ДВИЖЕНИИ ВИХРЕВОЙ ПАРЫ ПОД ПОВЕРХНОСТЬЮ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

КУРГАНСКИЙ М. В.

В связи с проблемой генерации волн в нелинейных вихревых процессах в [1, 2] предложено уравнение, описывающее звуковое поле, порождаемое вихревыми движениями в слабо сжимаемой среде (число Маха $M \ll 1$), и после ряда допущений рассчитано излучение звука из области пространства, занятой турбулентностью. В [3] рассчитывалось излучение звука элементарными вихревыми образованиями: двумя линейными вихревыми нитями одинаковой интенсивности и двумя одинаковыми вихревыми кольцами. В пространственном случае интенсивность излучаемого звука $\sim M^5$, что совпадает с результатами [1, 2]. В плоской задаче интенсивность звука $\sim M^4$, сами же вихри, теряя энергию на излучение, расходятся по закону $d = d_0(1+t/\tau)^{1/6}$, где d_0 – начальное расстояние между вихрями, τ – характерное время разбегания вихрей. Расчеты излучения звука более сложными системами линейных вихрей [4] показали, что равномерно и прямолинейно движущаяся пара вихрей (т. е. два одинаковых по величине, но противоположных по знаку линейных вихря) звук не излучает. При этом предполагается, что скорость вихрей много меньше скорости звука.

Дело обстоит иначе, когда вихревая пара движется под свободной поверхностью однородной жидкости плотности ρ, находящейся в поле силы тяжести g. Здесь поступательное движение вихрей сопровождается излучением поверхностных волн. В настоящей заметке показано, что интенсивность излучения $\sim(2a/\lambda)^3$, где $2a$ – расстояние между вихрями, $\lambda = 2\pi U^2/g$ – длина поверхностной волны, U – скорость движения вихревой пары; вихри, теряя энергию на излучение, имеют тенденцию к сближению, так что при достаточно больших временах t, отсчитываемых от некоторого начального момента, расстояние между вихрями уменьшается по закону $t^{-1/7}$.

Установившееся движение точечного вихря под свободной поверхностью тяжелой жидкости исследовалось в линейной постановке впервые в [5, 6]. Соответствующая нелинейная задача рассматривалась, например, в [7]. Представляет интерес исследовать и свободное движение точечных вихрей под поверхностью тяжелой жидкости. В случае, когда влияние свободной поверхности на динамику точечных вихрей мало, что имеет место для пары вихрей, движущихся на расстоянии от свободной поверхности, много большем размера вихревой пары, указанная задача может решаться приближенно как квазилинейная и квазистационарная. (Отметим, что задача о движении вихревой пары вблизи твердой стенки решается точно – она сводится к квадратуре [8].) Именно, генерация поверхностных волн рассчитывается в линейной постановке задачи, в предположении постоянства скорости движения вихревой пары, неизменности расстояния между вихрями и их глубины под поверхностью жидкости. Затем на основе найденного решения рассчитывается медленная эволюция во времени параметров вихревой пары. Следуем этому приближенному методу.

Рассматривается двумерная в вертикальной плоскости задача. Имеется пара вихрей с интенсивностями $\varkappa_1=\varkappa$, $\varkappa_2=-\varkappa$, $\varkappa>0$, удаленных друг от друга по вертикали на расстояние $2a$, много меньшее глубины H залегания центра завихренности под свободной поверхностью жидкости бесконечной глубины. Жидкость считается идеальной, так что интенсивность вихрей со временем не меняется. Предполагается, что вихрь с положительной интенсивностью находится на большей глубине, поэтому при $H=\infty$ вихревая пара двигалась бы горизонтально со скоростью $\varkappa/4\pi a$ в сторону отрицательных значений горизонтальной координаты x.

Подробное решение линейной задачи об обтекании неподвижного точечного вихря интенсивности $\varkappa$, находящегося на глубине h под свободной поверхностью тяжелой жидкости бесконечной глубины, потоком со скоростью c, направленным со стороны отрицательных значений x, приведено в [6]. В допущении, что волны в натекающем потоке отсутствуют, в [6, с. 73] дано решение задачи в терминах комплексного потенциала

$$w(z)=f(z;\,c,\varkappa,h)=\frac{\varkappa i}{2\pi}\ln\frac{z+hi}{z-hi}+$$

$$+\frac{\varkappa i}{\pi}\exp\left\{-\frac{gi}{c^2}z\right\}\int\limits_{-\infty}^{z}\frac{\exp\{gi\zeta/c^2\}}{\zeta-hi}\,d\zeta$$

$$\eta(x)=\frac{2}{c}\varkappa\exp\left\{-\frac{gh}{c^2}\right\}\sin\frac{gx}{c^2}$$

где $z=x+iy$, y – вертикальная координата, $y=0$ отвечает невозмущенной свободной поверхности и $\eta(x)$ – уравнение свободной поверхности далеко за вихрем.

Обратимся к задаче о генерации волн парой вихрей. Перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с вихрями. Здесь на неподвижные вихри будет натекать поток жидкости со скоростью U, равной скорости вихрей. В силу принципа суперпозиции комплексный потенциал, определяющий волновое движение, и уравнение свободной поверхности далеко за вихрями имеют соответственно вид

$$w(z)=f(z;\,U,\,\varkappa,\,H+a)+f(z;\,U,\,-\varkappa,\,H-a)$$

$$\eta(x)=-\frac{4}{U}\varkappa\exp\left\{-\frac{gH}{U^2}\right\}\operatorname{sh}\frac{ga}{U^2}\sin\frac{gx}{U^2}$$

В дальнейшем будем полагать, что $a\ll H\leqslant k^{-1}=U^2/g$ $(k^{-1}=\lambda/2\pi)$.

Обратное воздействие волн на вихри рассчитывается с помощью уравнений движения особых точек поля $w(z)$

$$\frac{d\bar z}{dt}=-\frac{dw}{dz}\tag{1}$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение, а правая часть (1) для вихрей интенсивности $\varkappa_1=\varkappa$, $\varkappa_2=-\varkappa$ вычисляется соответственно при $z_1=-i(H+a)$, $z_2=-i(H-a)$. Опустим полную запись уравнений горизонтального движения вихрей. Отметим только, что, как можно показать

$$\frac{d}{dt}\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{\varkappa}{4\pi a}\left[1+O(a^2H^{-2},\,a^2H^{-1}k,\,a^2k^2)\right]$$

$$\frac{d}{dt}(x_2-x_1)=-\frac{\varkappa}{4\pi a}O(a^3H^{-3},\,a^3H^{-1}k^2,\,a^3k^3)$$

Поэтому эффектом разбегания вихрей по горизонтали можно пренебречь (он проявляется лишь в третьем порядке малости). Вихревая пара в целом движется в сторону отрицательных значений x со скоростью $U\approx\varkappa/4\pi a$. Уравнения вертикального движения имеют вид

$$\frac{dy_i}{dt}=(-1)^i\varkappa ke^{-2kH}(1-\exp\{(-1)^i 2ka\}),\qquad i=1,2$$

Глубина центра завихренности будет увеличиваться, а сами вихри – сближаться по вертикали согласно уравнениям

$$\frac{dH}{dt}=2g^2\varkappa a\left(\frac{\varkappa}{4\pi a}\right)^{-4}\exp\left\{-2gH\left(\frac{\varkappa}{4\pi a}\right)^{-2}\right\}$$

$$\frac{da}{dt}=-2g^3\varkappa a^2\left(\frac{\varkappa}{4\pi a}\right)^{-6}\exp\left\{-2gH\left(\frac{\varkappa}{4\pi a}\right)^{-2}\right\}\qquad(2)$$

где введены обозначения $2H=-(y_1+y_2)$, $2a=y_2-y_1$ и полагается, что $ak\ll 1$. Эти уравнения имеют интеграл ($a=a_0$ при $H=H_0$)

$$(a^{-2}-a_0^{-2})=32\pi^2 g\varkappa^{-2}(H-H_0)\qquad(3)$$

Исключаем H из (2) и (3)

$$\frac{da}{dt}=-2g^3\varkappa a^2\left(\frac{\varkappa}{4\pi a}\right)^{-6}\exp\left\{-2gH_0\left(\frac{\varkappa}{4\pi a}\right)^{-2}-1+\frac{a^2}{a_0^2}\right\}$$

С течением времени величина a монотонно стремится к нулю, т. е. наблюдается тенденция к неограниченному сближению вихрей по вертикали. Асимптотически при больших временах

$$\frac{da}{dt}\sim-\frac{2}{e}g^3\varkappa a^2\left(\frac{\varkappa}{4\pi a}\right)^{-6},\qquad a=0{,}090\sqrt[7]{\frac{\varkappa^5}{g^3 t}}$$

Этот результат может быть получен, исходя из закона сохранения импульса, с помощью соображений, учитывающих автомодельный характер рассматриваемой задачи: в силу малости безразмерного параметра a/H асимптотическое поведение $a(t)$ при $t\to\infty$ не должно содержать явной зависимости от H. Энергетические соображения, аналогичные использованным в [3, 4], приводят к такому же результату. Излучаемая вихрями мощность дается асимптотической формулой

$$\Phi=\rho\frac{\pi^2}{e}\frac{\varkappa^3}{a^2}\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^3\sim\rho\frac{\varkappa^2}{2\pi}\frac{1}{7t}$$

Сходным образом можно подойти к решению задачи о волновом торможении вихревой пары, движущейся в однородной жидкости вблизи границы с устойчиво стратифицированной жидкостью, заполняющей нижнее полупространство, что имитирует верхний однородный слой океана и нижележащий пикноклин.

В заключение автор выражает благодарность А. М. Обухову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically. 1. General theory.– Proc. Roy. Soc. Lond., 1952, v. A211, № 1107, p. 564–587.
2. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically. 2. Turbulence as a source of sound.– Proc. Roy. Soc. Lond., 1954, v. A222, № 1148, p. 1–32.
3. *Кляцкин В. И.* Излучение звука системой вихрей.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 6, с. 87–92.
4. *Гряник В. М.* Излучение звука линейными вихревыми нитями.– Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1983, т. 19, № 2, с. 203–206.
5. *Келдыш М.* Замечания о некоторых движениях тяжелой жидкости.– Техн. заметки ЦАГИ, 1935, № 52, вып. 2, с. 5–9.
6. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
7. *Филиппов И. Г.* О движении вихря под поверхностью жидкости.– ПММ, 1961, т. 25, вып. 2, с. 242–247.
8. *Багин В. М.* О движении вихрей в идеальной несжимаемой жидкости. Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. М.: Ин-т механики АН СССР, 1964. 76 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.VI.1985