

течение направлено вдоль большой оси, то $\gamma = 2\gamma_1 + \gamma_2$; в противном случае $\gamma = 2\gamma_2 + \gamma_1$, где γ_1 и γ_2 выражаются через эллиптические интегралы первого и второго рода

$$\gamma_1 = \frac{2}{k^2} [K(k) - E(k)], \quad k^2 = 1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2$$

$$\gamma_2 = \frac{2}{k^2 k'^2} [E(k) - k'^2 K(k)], \quad k'^2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2$$

В предельном случае $a_2/a_1 \rightarrow 1$ получаем результат, соответствующий сдвиговому течению над плоскостью с круглым отверстием.

В заключение отметим, что полученные в данной работе результаты по существу указывают, что в случае течения вязкой жидкости над перфорированной границей условие прилипания для продольной скорости должно быть заменено на условие скольжения

$$\left(u - \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = 0$$

Константа β пропорциональна произведению степени перфорации на ее характерный размер, а коэффициент пропорциональности зависит от формы отверстий. Аналогичное по форме граничное условие имеет место в совершенно иных задачах механики, например в динамике разреженных газов [5] и при течении жидкости над пористой стенкой [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hasimoto H., Sano O.* Stokeslets and eddies in creeping flow.— *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1980, v. 12, p. 335–363.
2. *Hasimoto H.* Low Reynolds number shear flow along a circular hole in a wall.— *J. Phys. Soc. Jap.*, 1981, v. 50, № 10, p. 3521–3524.
3. *Roscoe R.* The flow of viscous fluids round plane obstacles.— *Phil. Mag.*, 1949, v. 40, № 302, p. 338–351.
4. *Hasimoto H.* Low Reynolds number shear flow along an elliptic hole in a wall.— *J. Phys. Soc. Jap.*, 1983, v. 52, № 3, p. 842–847.
5. *Черчилляни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана.— М.: Мир, 1978. 495 с.
6. *Beavers G. S., Joseph D. D.* Boundary conditions at a naturally permeable wall.— *J. Fluid Mech.*, 1967, v. 30, № 1, p. 197–207.

Москва

Поступила в редакцию
28.III.1985

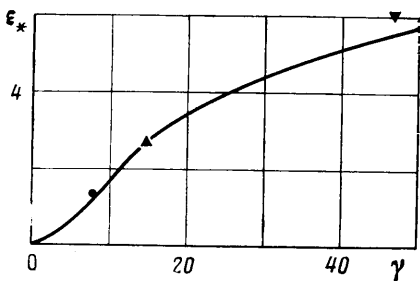
УДК 532.516

О ВЛИЯНИИ РАДИАЛЬНОГО РАСХОДА НА ПЕРЕХОД К ТУРБУЛЕНТНОМУ РЕЖИМУ ТЕЧЕНИЯ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМСЯ И НЕПОДВИЖНЫМ ДИСКАМИ

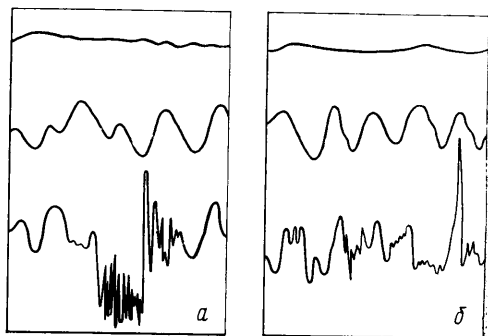
САНЬКОВ П. И., СМИРНОВ Е. М.

Разработанные в [1–4] методы расчета течения в зазорах между дисками предполагают реализацию первичного ламинарного режима, методы [5, 6] предназначены для описания движения с развитой турбулентностью. Границы применимости методов, основанных на том или ином допущении о характере движения, в перечисленных работах не указываются. Эта неопределенность обусловлена тем, что вопросы возбуждения турбулентности в течениях рассматриваемого типа до последнего времени оставались малоизученными. Как показали исследования [7–9], даже в случае нулевого радиального расхода при ламинарно-турбулентном переходе наблюдается множество режимов движения. На практике значительно чаще встречаются течения с радиальным расходом, влияние которого на процесс перехода в зазоре ранее не изучалось. Ниже излагаются результаты экспериментального исследования данной проблемы.

1. Введем основные обозначения: h — ширина зазора; r_e — внешний радиус обоих дисков; r_i — радиус центрального отверстия для подачи или отбора воздуха через неподвижный диск; $\delta = h/r_e$ — безразмерная ширина зазора; $2\pi Q$ — объемный радиальный расход (значения $Q > 0$ соответствуют течению от центра к периферии, $Q < 0$ — обратный случай); ω — угловая скорость вращения одного из дисков; $\gamma = \omega h^2/\nu$ — параметр вращения; $Re = \omega r_e h/\nu$ — характерное число Рейнольдса; $Re^* =$



Фиг. 1



Фиг. 2

$=\omega r h/\nu$ — локальное число Рейнольдса; $\epsilon_c=2hQ/(vr_e^2)$ — безразмерный расход; $\epsilon=2hQ/(vr^2)$ — локальное значение расходного параметра.

Исследования проводились методом термоанемометра на воздушной установке, описание которой дано в [9]. При значении $r_c=102$ мм ширина зазора изменялась в диапазоне $0,4 \leq h \leq 9$ мм. В отличие от [9] в настоящем исследовании зазор ободом не закрывался, а был открыт на атмосферу. Для подачи или отсасывания воздуха из зазора в центре неподвижного диска заподлицо монтировался штуцер с проходным отверстием $r_i=4$ мм. Система задания расхода состояла из воздуходувки центробежного типа, работающей на всасывание или нагнетание, ресивера, специальной камеры для измерения температуры проходящего воздуха и расходомера диафрагменного типа. Расход $2\pi|Q|$ изменялся от 20 до $1350 \text{ см}^3/\text{с}$. Датчик термоанемометра располагался на одном из двух радиусов: $r_p'=r_p/r_c=0,73; 0,91$.

2. Обсудим две особенности радиального движения в зазоре, которые следует принимать во внимание при получении и использовании данных по ламинарно-турбулентному переходу. Первая из них это конвективный перенос возмущений с периферии в центральную область, иначе говоря, из области с большими локальными числами Re^* в область с меньшими значениями этого параметра. При $Q=0$ перенос осуществляется радиальным движением, которое возникает из-за изменения центробежной силы поперек зазора и направлено наружу у вращающегося диска и к центру у неподвижного. Наложение радиального расхода $Q < 0$, очевидно, усиливает перенос возмущений с периферии. При $Q > 0$ этот перенос ослабевает, а по мере увеличения расхода даже полностью устраняется. Рассмотрим последнее подробнее.

Предположим сначала, что радиус центрального отверстия r_i сколь угодно мал, а внешний радиус $r_c \rightarrow \infty$. Так как величина центробежной силы пропорциональна r , а среднерасходная радиальная скорость $U=Q/(rh)$ обратно пропорциональна радиусу, то всегда для $Q > 0$ существует $r=r_*$ (ему соответствует локальное значение $\epsilon=\epsilon_*$), такое, что при $r < r_*$ ($\epsilon > \epsilon_*$) радиальный поток однонаправленный, а при $r > r_*$ ($\epsilon < \epsilon_*$) воздух у неподвижного диска движется к центру. Зависимость $\epsilon_*(\gamma)$, полученная по асимптотическому решению [4], показана на фиг. 1.

При конечных r_i, r_c в зависимости от величин Q, h, ω, ν могут реализовываться три качественно различных типа радиального движения в зазоре [1]. Для Q , меньших некоторого значения Q_1 , вдоль всего зазора воздух у неподвижного диска течет к центру. Если Q превосходит значение Q_2 , то по всему зазору радиальная скорость направлена на периферию. В случае $Q_1 < Q < Q_2$ область с однонаправленным движением охватывает только $r < r_*$, при этом $r_i < r_* < r_c$. Значения Q_1 и Q_2 можно определить приблизительно, пользуясь зависимостью $\epsilon_*(\gamma)$ на фиг. 1. При заданных r_c, ω, h, ν значение Q_2 находится из равенства $\epsilon_c=\epsilon_*$, а $Q_1=Q_2(r_i/r_c)^2$.

Вторая обсуждаемая особенность движения в зазоре — это возможность возбуждения турбулентности по причинам, связанным не с окружным, а с собственно радиальным движением. В чистом виде последние проявляются при $\omega=0$. Если $Q < 0$, то значение числа Рейнольдса $Re_u=Uh/\nu$ возрастает в направлении движения и при достаточно большой величине $|Q|$ может внутри зазора превысить критическое. Однако в плане настоящего исследования необходимо рассмотреть вопрос о турбулизации радиального течения лишь применительно к области $r \geq r_p$. Укажем в связи с этим, что для всех наборов δ и $\epsilon_c < 0$, при которых проводились эксперименты, значение Re_u на входе в зазор не превышало 140, а датчик при $\omega=0$ не регистрировал турбулентных пульсаций в потоке.

В случае $Q > 0$ для центральной области зазора значения Re_u могут быть весьма велики, а поток, поступающий из штуцера, — изначально турбулентным. Вместе с тем с ростом r местное значение Re_u уменьшается и может происходить реламинаризация течения. Эксперименты [10] показывают, что реламинаризация чисто радиального потока ($\omega=0$) завершается на радиусе $r_2=0,14(4\pi Qh/\nu)^{1/2}$ и, таким образом, $r_2/r_c=0,14(2\pi\epsilon_c)^{1/2}$. Согласно этой оценке, для максимального в настоящем исследовании значения $\epsilon_c=13,8$ величина r_2 даже превосходит r_c . В результате опытов было

обнаружено, однако, что вращение диска способствует более быстрой ламинаризации. Если при $\omega=0$ и $\epsilon_e=13,8$ датчик, расположенный на расстоянии $r_p'=0,73$, действительно показывал наличие пульсаций в потоке, то с ростом угловой скорости интенсивность последних ослабевала, а начиная с некоторого значения ω пульсации исчезали. При дальнейшем росте ω в потоке вновь регистрировались пульсации, но, очевидно, по причинам, обусловленным окружным движением.

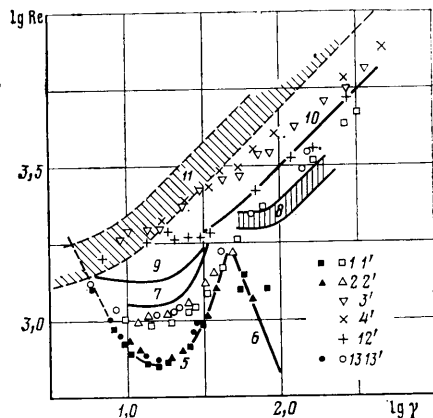
Основной вывод из изложенного заключается в том, что приводимые ниже результаты относятся к условиям, в которых первопричиной возбуждения турбулентности является сдвиг окружной скорости, а радиальный расход рассматривается как фактор влияющий, но не определяющий.

3. В качественном отношении исследуемый процесс перехода аналогичен реализующемуся при безрасходном течении [9]. При $\gamma=O(1)$ осуществляется жесткое возбуждение турбулентности, а при $\gamma=O(10^1-10^2)$ наблюдается мягкий переход с последовательной сменой режимов движения.

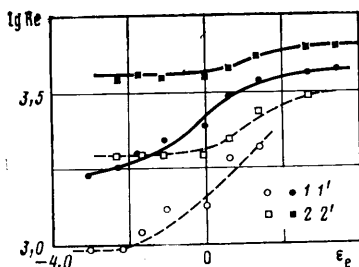
На фиг. 2 приведены примеры осциллограмм сигнала с датчика термоанемометра, нить которого располагалась в срединной плоскости зазора ($r_p'=0,73$). Серия *a* получена в относительно узком зазоре $\delta=0,012$ при $\epsilon_e=-2,2$. Осциллограммы сверху вниз соответствуют первичному осесимметричному ламинарному режиму ($\gamma=8,5$), далее — существованию в потоке регулярных возмущений ($\gamma=10$) и, наконец, прохождению турбулизованного потока. Серия *b* относится к более широкому зазору $\delta=0,0215$, получена при $\epsilon_e=0,68$ и сверху вниз соответствует: первичному режиму ($\gamma=13,6$), регулярным возмущениям ($\gamma=45,0$), прохождению единичного пятна завихренности, именуемого в [9] «роликом» ($\gamma=82$). При $\gamma \approx 100$ регистрировался полностью турбулентный режим. Осциллограммы серии *a* можно сопоставлять с фиг. 2, а серии *b* — с фиг. 3 работы [9].

На фиг. 3 приведены результаты экспериментов по определению границ реализации различных режимов. Точки 1, 2 и 1', 2' соответствуют $\epsilon_e=-2,2$; $-3,0$; для точек 3', 4' $\epsilon_e=0,68$; $3,5$; указанные результаты получены при $r_p'=0,73$. Номера без штриха присвоены данным, отмечающим начало нестационарности течения, номера со штрихом — результатам определения нижней границы существования «кос» или единичных пятен завихренности. Здесь же нанесены границы, полученные в [9] при $Q=0$: 5 и 6 соответствуют началу образования на периферии зазора стационарных систем вихрей A и B; 7 и область 8 — первому появлению нестационарности; 9 и 10 — началу прохождения «кос» и пятен завихренности. В заштрихованной полосе 11 располагаются значения Re_c , соответствующие завершению процесса турбулизации на периферии (подробное обсуждение этих данных приводится ниже).

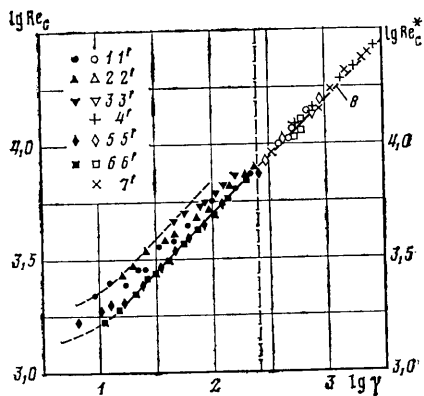
В течении с расходом первичной нестационарности соответствует сигнал датчика термоанемометра с отчетливо выраженной характерной частотой (см. фиг. 2). Отметим, что для $Q=0$ первое появление



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

нестационарности связано с прохождением уединенных волн по системе кольцевых вихрей A либо с началом колебательных перемещений осей спиральных вихрей B [9]. До развития этих нестационарных явлений системы вихрей A или B при $Q=0$ являются упорядоченными наборами стоячих волн. Наложение радиального расхода вызывает перемещение волн (осей вихрей) вдоль зазора, что и обуславливает характерную частоту в сигнале датчика. Интересно, что при $Q<0$ граница первичной нестационарности укладывается на границы 5, 6.

В отличие от течения с периферии в случае $Q>0$ нарастание амплитуды сигнала, свидетельствующего о развитии первичной нестационарности, происходило постепенно в довольно широком диапазоне значений угловой скорости. Это вносило неопределенность в процесс нахождения соответствующей границы, поэтому на фиг. 3 для $\epsilon_c>0$ приведены только границы появления «кос» и пятен завихренности, зарегистрировавшиеся отчетливо.

Эксперименты показали, что границы смены режимов течения, полученные для $r_p'=0,91$, располагаются несколько ниже установленных при $r_p'=0,73$. В качестве примера на фиг. 3 представлены границы для $\epsilon_c=0,68$ (точки $12'$) и $\epsilon_c=-1,1$ (точки $13, 13'$).

Режим течения с присутствием в потоке «кос» или пятен завихренности можно трактовать как режим с перемежаемостью. На фиг. 4 приведены опытные данные по определению границ этого режима при $r_p'=0,73$ и двух значениях γ . Точки $1, 1'$ отмечают первое появление кос и пятен завихренности, $2, 2'$ — завершение турбулизации течения на периферии, цифры без штриха соответствуют $\gamma=15$, со штрихом — $\gamma=75$. Как видно, наложение расхода существенно изменяет ширину диапазона значений Re_c , в котором наблюдается перемежающееся состояние потока.

4. Для практики наиболее важно определить значения Re_c^* , соответствующие завершению перехода. При $Re_c^*>Re_c^*$ течение на данном радиусе полагается развитым турбулентным.

Рассмотрим сначала случай не слишком больших γ , когда разделение потока на ядро и два пристенных слоя не проявляется в сильной степени и значение Re_c^* можно рассматривать как единое для течения у поверхностей обоих дисков [9]. Предположим, что локальное значение расходного параметра $\epsilon_p=\epsilon_c(r_c/r_p)^2$, вычисленное по радиусу расположения датчика, больше величины $\epsilon_*(\gamma)>0$.

В этих условиях возмущения из окрестности датчика сносятся на периферию в область больших значений числа Рейнольдса. Увеличение угловой скорости вращения приводит к образованию (при некотором нефиксируемом значении ω) прилегающего к кромке $r=r_c$ сплошного кольца с развитой турбулентной формой движения. С дальнейшим ростом ω внутренняя граница кольца будет перемещаться к центру и пересечет местоположение датчика по достижении $\omega=\omega_c$. При $\omega>\omega_c$ датчик будет проходить полностью турбулентный сигнал. Очевидно, что в рассмотренной ситуации $Re_c^*=\omega_c r_p h/\nu$.

В обратной ситуации, когда $\epsilon_p<\epsilon_*(\gamma)$, нахождение значений Re_c^* наталкивается на трудности, обусловленные конвективным переносом возмущений из области $Re_c^*>Re_c^*$ в область $Re_c^*<Re_c^*$. Действительно, по виду сигнала с датчика термоанемометра сложно установить, располагается ли датчик в области с развитой самоподдерживающейся турбулентностью или в области, где имеются турбулентные пульсации, которые принесены с периферии радиальным течением. Если при $\omega=\omega_c$ с датчика начинает поступать полностью турбулентный сигнал, то это означает только, что в зазоре появилось прилегающее к $r=r_c$ сплошное кольцо с развитой турбулентностью, но сам датчик, возможно, располагается в зоне с наведенными турбулентными пульсациями.

Вычисления локального критерия турбулизации по значению r_p дают, очевидно, нижнюю оценку, в то время как использование r_c приводит к оценке сверху из-за имеющего место затухания пульсаций при конвективном переносе последних с периферии внутрь зазора. Отметим, что в проведенных опытах, за немногими исключениями, выполнялось условие $\epsilon_p<\epsilon_*$, где $\epsilon_*(\gamma)$ определялось по фиг. 1.

На левом поле фиг. 5, которое охватывает значения $\gamma<250$, результаты, полученные во всех экспериментах с $r_p'=0,73$, представлены в виде зависимости величины $Re_c^*=\omega_c r_c h/\nu$ от параметров ϵ_c, γ . Опытным точкам 1-6 соответствуют значения $\epsilon_c=0,68; 1,4; 3,5; 13,8; -1,1; -2,2$ ($\epsilon_p=1,3; 2,7; 6,7; 26,6; -2,1; -4,2$). При получении этих точек нить датчика располагалась в срединной плоскости зазора. Видно, что значения Re_c^* практически не зависят от расхода для всех $\epsilon_c<0$ и тех наборов $\epsilon_c>0$, γ , при которых $\epsilon_p<\epsilon_*$. Для оставшихся комбинаций $\epsilon_c>0, \gamma$ полученные значения Re_c^* располагаются в обозначенной штриховыми линиями полосе, ширина которой в принятом логарифмическом масштабе определяется величиной $\lg(r_c/r_p)=-\lg r_p'$.

Этот результат полностью согласуется с проведенным выше анализом ситуации, когда $\epsilon_p<\epsilon_*$. Крайние левые точки серий 1-3 попадают на верхнюю границу введённой полосы. Отвечающие этим точкам значения ϵ_p помечены теми же значками на фиг. 1 и указывают на выполнение условия $\epsilon_p\geq\epsilon_*$, при котором число Рейнольдса, соответствующее завершению перехода, следует определять по значению $r=r_p$. Учет этого обстоятельства переводит указанные точки на нижнюю границу полосы. Это в совокупности с данными для $\epsilon_c\leq 0$ и проведенными рассуждениями позволяет трактовать нижнюю границу области разброса значений $Re_c^*(\gamma)$ как наи-

более представительную оценку зависимости $Re_c^*(\gamma)$, нечувствительную, как оказалось, к радиальному расходу в исследованном диапазоне значений ϵ_e . Отметим, что эксперименты с датчиком, расположенным на $r_p' = 0,91$, дали аналогичные результаты, не изменившие положение нижней границы полосы разброса $Re_c(\epsilon_e, \gamma)$.

При $\gamma > 250$ переход к турбулентному режиму исследовался только в слое у вращающегося диска, где конвективный перенос возмущений направлен в сторону больших значений Re^* . Значения $Re_c^* = \omega_c r_p h / \nu$, отмечающие завершение перехода, показаны в правой части фиг. 5 точками $1'-7'$, из которых первые шесть номеров соответствуют значениям ϵ_e , указанным ранее для точек $1-6$, а для $7'$ $\epsilon_e = -10,8$ ($\epsilon_p = -20,8$). Видно, что и в данном случае влияние радиального расхода оказывается несущественным, точки для разных ϵ_e группируются вокруг прямой δ , аппроксимирующей результаты [9] для $Q=0$.

В практическом отношении экспериментальные точки в правой части фиг. 5 и нижнюю границу полосы значений Re_c в левой части можно рассматривать как определяющую единую зависимость $Re_c^*(\gamma)$, предназначенную для выяснения режима движения у вращающегося диска на заданном радиусе. Изменение Re_c^* при $\gamma \geq 10$ хорошо аппроксимируется зависимостью $Re_c^* = \text{const } \gamma^{1/2}$, близкой к прямой δ на фиг. 5. Переходя к величине $Re_c^{**} = \omega_c r^2 / \nu = (Re_c^*)^2 / \gamma$, получим $Re_c^{**} = (2,5-2,7) \cdot 10^5$.

В [11] приводятся подробные результаты измерений коэффициента сопротивления C_m вращению диска вблизи параллельной неподвижной стенки при наличии и отсутствии радиального расхода. Зависимости C_m от $Re_c^{**} = \omega_c r^2 / \nu$ для всех значений относительной ширины зазора и расходного параметра имеют заметный, а при $\delta = O(10^{-2})$ сильный изгиб в диапазоне $Re_c^{**} = (2,5-4) \cdot 10^5$. Этот изгиб естественно связать с турбулизацией потока и как следствие констатировать, что данные [11] хорошо согласуются с полученным выше значением Re_c^{**} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Kreith F., Viviand H. Laminar source flow between two parallel coaxial disks rotating at different speeds.— Trans. ASME, ser. E. J. Appl. Mech., 1967, v. 34, № 3, p. 541—549.
2. Match L., Rice W. An asymptotic solution for laminar flow of an incompressible fluid between rotating disks.— Trans. ASME, ser. E, J. Appl. Mech., 1968, v. 35, № 3, p. 300—310.
3. Adams M. L., Szeri A. Z. Flow of incompressible fluid between finite disks.— Trans. ASME, ser. E, J. App. Mech., 1982, v. 49, № 1, p. 1—9.
4. Саньков П. И., Смирнов Е. М. Асимптотическое решение уравнений Навье — Стокса для задачи о радиальном течении жидкости в зазоре, образованном двумя вращающимися дисками.— ПМТФ, 1983, № 1, с. 10—15.
5. Bayley F. J., Owen J. M. Flow between a rotating and stationary disc.— Aeronaut. Quarterly, 1969, v. 20, № 4, p. 333—354.
6. Piesche M., Felsch K. O. Über die drallbehaftete Strömung und Wärmeübertragung in Radialdiffusor.— Strömungsmech. und Strömungsmach., 1981, № 29, S. 47—64.
7. Wimmer M. Die zähe Strömung im Spalt zwischen einer rotierenden Scheibe und einem ruhenden Gehäuse.— Z. angew. Math. und Mech., 1978, № 7, B. 58, S. 350—353.
8. Szeri A. Z., Giron A., Schneider S. J., Kaufman H. N. Flow between rotating disks. Pt 2. Stability.— J. Fluid Mech., 1983, v. 134, p. 133—154.
9. Саньков П. И., Смирнов Е. М. Бифуркации и переход к турбулентности в зазоре между вращающимися и неподвижным параллельными дисками.— Изв. АН СССР. МЖТ, 1984, № 5, с. 28—36.
10. Kreith F. Reverse transition in radial source flow between two parallel planes.— Phys. Fluids, 1965, v. 8, № 6, p. 1189—1193.
11. Иго, Ямада. Влияние радиального расхода на момент сопротивления диска, вращающегося в кожухе.— Нагоя коге дайгаку гакуха, 1974, т. 26, с. 315—322.

Ленинград

Поступила в редакцию
3.IV.1985

УДК 532.525.2

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ С ПРЕГРАДОЙ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

ДЕРБЕНЕВА Л. И., КУРШАКОВ М. Ю., ТИЛЛЯЕВА Н. И., ПИШКИН Ю. Н.

С выделением границы струи и центрального скачка уплотнения решена задача взаимодействия осесимметричной сверхзвуковой струи с ограниченной преградой в затопленном пространстве. Зона отрыва потока моделируется в рамках уравнений Эйлера введением области с заданным постоянным давлением. Ее граница опреде-