Опираясь на теорию уравнения Матье, можно сформулировать общие выводы. Если частота изменения электрического потенциала (заряда) капли попадает в одну из резонансных зон, то при отклонении формы капли от сферической амплитуда колебаний соответствующей моды нарастает экспоненциально во времени, сферическая капля становится неустойчивой. При всех заданных параметрах (амплитуда потенциала, поверхностное натяжение и радиус) наиболее легко возбуждаются низшие моды, поскольку с ростом номера моды параметр μ уменьшается. Неустойчивыми могут стать сразу несколько мод в том случае, если их зоны перекрываются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957, с. 90.
2. *Morrison C. A., Leavitt R. P., Wortman D. E.* The extended Rayleigh theory of the oscillation of liquid drophlets.– J. Fluid Mech., 1981, v. 104, p. 295–309.
3. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.– Л.: Гостехиздат, 1947, с. 591.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963, с. 209.

Москва

Поступила в редакцию
24.VI.1985

УДК 532.5.032

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НАД ПЕРФОРИРОВАННОЙ ГРАНИЦЕЙ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

БРУТЯН М. А., КРАПИВСКИЙ П. Л.

В рамках уравнений Стокса найдено точное решение задачи о сдвиговом течении вязкой жидкости над перфорированной границей. Рассмотрены случаи перфорации в виде поперечных щелей и эллиптических отверстий.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о сдвиговом потоке вязкой несжимаемой жидкости над поперечной щелью. Выберем декартову систему координат x, y так, что жидкость будет течь над плоскостью $y=0$, в которой вырезана щель $|x|<a$. Считаем, что над плоскостью при $\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$ скорость течения стремится к $(\alpha y,\ 0)$, а под плоскостью – к нулю. Будем считать, что число Рейнольдса $\mathrm{Re}=a^2\alpha/\nu$ достаточно мало; при этом течение описывается уравнениями Стокса. Предположим еще, что давление p стремится к нулю на бесконечности. Для того чтобы получить наиболее общее решение, достаточно будет к полученному решению добавить решение задачи, в которой давление вдали от щели над и под плоскостью $y=0$ различно, а скорость стремится к нулю. В дальнейшем удобнее рассматривать симметричный вариант задачи, когда скорость $\mathbf{V}$ на бесконечности стремится к $(\alpha|y|/2,\ 0)$. При этом решение исходной задачи можно легко получить, добавив скорость $\mathbf{V}_0=(\alpha y/2,\ 0)$.

Решение уравнений Стокса удобно искать в виде [1]

$$\mathbf{V}=y\nabla\Phi-\Phi\mathbf{j}+x\nabla\varphi-\varphi\mathbf{i}+\nabla\chi \tag{1.1}$$

$$\frac{p}{2\mu}=\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$\Delta\Phi=\Delta\varphi=\Delta\chi=0$$

Здесь $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ – единичные векторы по осям x, y. Из соображений симметрии следует, что гармонические функции Φ, φ, χ должны обладать следующими свойствами:

$$\Phi(x,\ y)=-\Phi(x,\ -y),\quad \varphi(x,\ y)=\varphi(x,\ -y),\quad \chi(x,\ y)=\chi(x,\ -y) \tag{1.2}$$

Условия симметрии (1.2) позволяют в дальнейшем рассматривать течение только в верхней полуплоскости $y\geqslant0$. Поскольку вдали от щели $\mathbf{V}\to\alpha y\mathbf{i}/2$, $p\to0$, граничные условия для Φ, φ и χ приобретают вид

$$\Phi\to Ax,\quad \varphi\to By,\quad \chi\to\alpha xy/4;\quad \sqrt{x^2+y^2}\to\infty;\quad B=A-\alpha/4 \tag{1.3}$$

Граничные условия на щели и на стенке имеют вид

$$\Phi=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\chi}{\partial y}=0,\qquad |x|<a \tag{1.4}$$

$$\varphi=\chi=0,\qquad \Phi=x\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial y},\qquad |x|>a \tag{1.5}$$

2. Решение задачи. Введем эллиптические координаты

$$x=a\,\mathrm{ch}\,\zeta\cos\eta,\quad y=a\,\mathrm{sh}\,\zeta\sin\eta;\quad 0\leqslant\zeta<\infty,\quad 0\leqslant\eta<2\pi$$

В этих координатах щель описывается уравнением $\xi=0$, а стенка – уравнением $\eta=0$ при $x>a$ и $\eta=\pi$ при $x<-a$. С учетом граничных условий (1.3) решение ищем в виде

$$\varphi=By\varphi_0(\zeta),\quad \Phi=Ax\Phi_0(\zeta),\quad \chi=\alpha xy\chi_0(\zeta)/4 \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в последнее из уравнений (1.1) и учитывая граничные условия (1.3) – (1.5), находим

$$\varphi=-\frac{a\alpha}{8}\,\mathrm{ch}\,\zeta\sin\eta,\qquad \Phi=\frac{a\alpha}{8}\,\mathrm{sh}\,\zeta\cos\eta \tag{2.2}$$

$$\chi=\frac{a^2\alpha}{16}\,\mathrm{ch}\,2\zeta\sin 2\eta,\qquad p=\frac{\mu\alpha}{2}\frac{\sin\eta\cos\eta}{\mathrm{ch}^2\zeta-\cos^2\eta}$$

Выражение для скорости течения, которое может быть найдено из (1.1) и (2.2), не приводится ввиду громоздкости. Полученное решение (2.2) продолжается в нижнюю полуплоскость посредством условий симметрии (1.2).

3. Некоторые особенности течения. Рассмотрим течение в щели ($\zeta=0$). Из (2.2) и (1.1) получаем

$$\mathbf{V}=\left(\frac{\alpha}{4}\sqrt{a^2-x^2},0\right),\qquad p=\frac{\mu\alpha}{2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Рассмотрим теперь течение на стенке ($\eta=0,\ \pi$). Из (2.2) находим $\mathbf{V}=0$, $p=0$. Трение на стенке имеет вид

$$\boldsymbol{\tau}=\mu\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y}=\left(\frac{\mu\alpha}{2}\,\mathrm{cth}\,\zeta,0\right)$$

Полное сопротивление плоскости со щелью в точности равно сопротивлению плоскости без щели. Это следует из того, что

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{-a}+\int\limits_{a}^{\infty}\right)\left(\tau-\frac{\mu\alpha}{2}\right)dx=\frac{\mu\alpha}{2}2a$$

Вдали от щели, $r=\sqrt{x^2+y^2}\gg a$, из (2.2) и (1.1) следует

$$\mathbf{V}=\frac{\alpha|y|}{2}\mathbf{i}+\frac{\alpha a^2}{4}\frac{x|y|}{r^4}\mathbf{r}\left[1+O\left(\frac{a^2}{r^2}\right)\right] \tag{3.1}$$

$$p=\frac{\mu\alpha a^2}{2}\frac{x|y|}{r^4}\left[1+O\left(\frac{a^2}{r^2}\right)\right],\qquad \mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$$

поэтому вдали от щели вторичное течение $\alpha a^2x|y|\mathbf{r}/4r^4$ оказывается радиальным. Расход Q жидкости, обусловленный вторичным течением, в точности равняется расходу жидкости в нижней полуплоскости для исходной задачи. При $x=0$ из (1.1) и (2.2) имеем

$$\mathbf{V}=\frac{\alpha|y|}{8}(\mathrm{th}\,\zeta+\mathrm{cth}\,\zeta+2\,\mathrm{cth}\,2\zeta)\mathbf{i}=u\mathbf{i}$$

$$Q=\int\limits_0^\infty\left(u-\frac{\alpha y}{2}\right)dy=\frac{\alpha a^2}{8}$$

4. **Обобщение на случай системы щелей.** Рассмотрим задачу, аналогичную изученной в п. 1, но с другим граничным условием: предположим, что в плоскости $y=0$ имеется система произвольно расположенных щелей. Найденное выше решение для одной щели можно представить в виде

$$\mathbf{V}=\mathbf{U}+\mathbf{W};\quad \mathbf{U}=\alpha y\mathbf{i}\quad (y>0);\quad U=0\quad (y<0)$$

где $\mathbf{W}$ – вторичная скорость. Ввиду линейности уравнений Стокса в случае наличия системы щелей, занумерованных индексом m, решение имеет вид

$$\mathbf{V}=\mathbf{U}+\sum \mathbf{W}_m, \qquad p=\sum p_m$$

Исследуем подробнее случай бесконечной решетки одинаковых щелей размером $2a$ и периодом $2d$.

В этом случае скорость вторичного течения на больших расстояниях $y \gg d$ направлена вдоль оси x и стремится к постоянной величине. Действительно, искомая скорость U_∞, которая на больших расстояниях дается суммой вторичных скоростей типа (3.1), может быть вычислена путем замены суммы на интеграл

$$U_\infty = \frac{\alpha a^2}{8d} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{yx^2}{r^4}\, dx = \frac{\pi \alpha a^2}{16d} \tag{4.1}$$

Таким образом, основной эффект от решетки щелей состоит в добавлении к внешней скорости $\mathbf{U}$ однородного потока U_∞. Из вывода (4.1) следует, что эта формула справедлива и в более общем случае, когда размеры щелей и расстояния между ними непостоянны. При этом в (4.1) a^2 и d следует заменить их усредненными значениями, а сама формула (4.1) будет справедлива на расстояниях много больших, чем максимальный характерный размер системы щелей.

5. Сдвиговое течение над плоскостью с круглыми и эллиптическими отверстиями. В работе [2] решена задача о сдвиговом течении над плоскостью с одним круглым отверстием. Это решение можно обобщить на случай системы отверстий аналогично рассмотренному выше плоскому случаю. Вычислим скорость вторичного течения от решетки отверстий на расстояниях, много больших характерного размера решетки. Воспользуемся выражением для вторичной скорости от изолированного отверстия [2]

$$\mathbf{W} = \frac{2\alpha a^3}{3\pi} \frac{x|z|}{R^5} \mathbf{R} \left[1 + O\left(\frac{a^2}{R^2} \right) \right]$$

где $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. Пусть θ – относительная площадь, занимаемая отверстиями. Действуя, как и в плоском случае, находим $U_\infty=4a\alpha\theta/9\pi$.

Рассмотрим теперь трение на стенке. На верхней поверхности

$$\tau=\tau_0+\sum \tau_m$$

здесь $\tau_0=\mu\alpha$, а τ_m – добавочное трение, обусловленное наличием m-го отверстия. Как показано в [2]

$$\iint \tau_m\, dx\, dy = \frac{\pi a^2}{2} \tau_0$$

где интегрирование ведется по области, внешней по отношению к отверстию. Предположим теперь, что $\theta \ll 1$. Тогда с точностью до членов $O(\theta^2)$ среднее трение на верхней и нижней поверхности равно соответственно

$$\tau_+=\tau_0(1-\theta/2), \quad \tau_-=\tau_0\theta/2 \tag{5.1}$$

Таким образом, полное трение $\tau_++\tau_-=\tau_0$ не меняется с точностью до членов $O(\theta^2)$. Формулы (5.1), как показывают аналогичные вычисления, справедливы и в плоском случае. Заметим, что из решения задачи о течении жидкости через круглое отверстие или щель [3], вызванном перепадом давления, вновь можно получить решение аналогичной задачи о течении через систему отверстий или щелей. Как и ранее, наиболее интересно поведение решения вдали от плоскости, где течение оказывается вертикальным и имеет скорость

$$V_\infty=C\frac{\Delta p}{\mu} a\theta$$

где $C={}^1\!/_3\pi$ в случае отверстий, $C=\pi/16$ в случае щелей.

В работе [4] решена задача о сдвиговом течении над плоскостью с одним эллиптическим отверстием. Это решение также можно обобщить на случай системы отверстий. Используя результаты [4], находим скорость вторичного течения от решетки отверстий на расстояниях, много больших характерного размера решетки

$$U_\infty = \frac{2\pi\alpha a_1^3}{3\gamma} \frac{\theta}{\pi a_1 a_2}$$

Здесь a_1, a_2 – большая и малая полуоси эллипса, а постоянная γ зависит от ориентации скорости течения на бесконечности по отношению к осям эллипса. Если течение направлено вдоль большой оси, то $\gamma=2\gamma_1+\gamma_2$; в противном случае $\gamma=2\gamma_2+\gamma_1$, где γ_1 и γ_2 выражаются через эллиптические интегралы первого и второго рода

$$\gamma_1=\frac{2}{k^2}[K(k)-E(k)],\qquad k^2=1-\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2$$

$$\gamma_2=\frac{2}{k^2k'^2}[E(k)-k'^2K(k)],\qquad k'^2=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2$$

В предельном случае $a_2/a_1\to1$ получаем результат, соответствующий сдвиговому течению над плоскостью с круглым отверстием.

В заключение отметим, что полученные в данной работе результаты по существу указывают, что в случае течения вязкой жидкости над перфорированной границей условие прилипания для продольной скорости должно быть заменено на условие скольжения

$$\left(u-\beta\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{y=0}=0$$

Константа β пропорциональна произведению степени перфорации на ее характерный размер, а коэффициент пропорциональности зависит от формы отверстий. Аналогичное по форме граничное условие имеет место в совершенно иных задачах механики, например в динамике разреженных газов [5] и при течении жидкости над пористой стенкой [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hasimoto H., Sano O.* Stokeslets and eddies in creeping flow.– Ann. Rev. Fluid Mech., 1980, v. 12, p. 335–363.
2. *Hasimoto H.* Low Reynolds number shear flow along a circular hole in a wall.– J. Phys. Soc. Jap., 1981, v. 50, № 10, p. 3521–3524.
3. *Roscoe R.* The flow of viscous fluids round plane obstacles.– Phil. Mag., 1949, v. 40, № 302, p. 338–351.
4. *Hasimoto H.* Low Reynolds number shear flow along an elliptic hole in a wall.– J. Phys. Soc. Jap., 1983, v. 52, № 3, p. 842–847.
5. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана.– М.: Мир, 1978. 495 с.
6. *Beavers G. S., Joseph D. D.* Boundary conditions at a naturally permeable wall.– J. Fluid Mech., 1967, v. 30, № 1, p. 197–207.

Москва

Поступила в редакцию
28.III.1985

УДК 532.516

О ВЛИЯНИИ РАДИАЛЬНОГО РАСХОДА НА ПЕРЕХОД К ТУРБУЛЕНТНОМУ РЕЖИМУ ТЕЧЕНИЯ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМСЯ И НЕПОДВИЖНЫМ ДИСКАМИ

САНЬКОВ П. И., СМИРНОВ Е. М.

Разработанные в [1–4] методы расчета течения в зазорах между дисками предполагают реализацию первичного ламинарного режима, методы [5, 6] предназначены для описания движения с развитой турбулентностью. Границы применимости методик, основанных на том или ином допущении о характере движения, в перечисленных работах не указываются. Эта неопределенность обусловлена тем, что вопросы возбуждения турбулентности в течениях рассматриваемого типа до последнего времени оставались малоизученными. Как показали исследования [7–9], даже в случае нулевого радиального расхода при ламинарно-турбулентном переходе наблюдается множество режимов движения. На практике значительно чаще встречаются течения с радиальным расходом, влияние которого на процесс перехода в зазоре ранее не изучалось. Ниже излагаются результаты экспериментального исследования данной проблемы.

1. Введем основные обозначения: h – ширина зазора; r_e – внешний радиус обоих дисков; r_i – радиус центрального отверстия для подачи или отбора воздуха через неподвижный диск; $\delta=h/r_e$ – безразмерная ширина зазора; $2\pi Q$ – объемный радиальный расход (значения $Q>0$ соответствуют течению от центра к периферии, $Q<0$ – обратный случай); ω – угловая скорость вращения одного из дисков; $\gamma=\omega h^2/\nu$ – параметр вращения; $\mathrm{Re}=\omega r_e h/\nu$ – характерное число Рейнольдса; $\mathrm{Re}^*=$