МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1986

УДК 532.5.013.4:537.84

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ

НЕСТЕРОВ С. В.

Рэлеем было установлено, что проводящая сферическая капля радиуса R, несущая заряд Q, становится неустойчивой, если выполняется неравенство $Q^2>16\pi R^3\alpha$, где α – коэффициент поверхностного натяжения (см., например, [1]). При выполнении этого неравенства имеется конечное число неустойчивых мод. Наибольший инкремент имеет мода второго порядка, при которой капля принимает форму, близкую к эллипсоиду вращения. Обзор дальнейших исследований по устойчивости заряженной капли содержится в [2].

Ниже решается задача об устойчивости заряженной сферической капли в том случае, когда ее потенциал периодически изменяется во времени по закону $U=U_0\cos\Omega t$. Будем считать, что жидкость капли несжимаемая, идеальная и идеально проводящая, имеет плотность ρ и коэффициент поверхностного натяжения α. Радиус невозмущенной капли R. Капля находится в вакууме. Скорости частиц жидкости и величина ΩR значительно меньше скорости света, поэтому электрическое поле описывается с помощью уравнений электростатики. Физически периодическое изменение потенциала капли можно осуществить, например, так: капля помещается в центр сферической проводящей оболочки, радиус которой значительно больше радиуса капли; капля и оболочка образуют сферический конденсатор, обкладки которого подключаются к генератору переменного напряжения.

Требуется определить те условия, при которых сферическая капля становится неустойчивой. С целью упрощения вычислений предположим, что поверхность деформированной капли осесимметричная и ее уравнение в сферической системе координат, центр которой совпадает с центром невозмущенной капли, дается равенством

$$r=R(1+\varepsilon\zeta(\theta,\ t)+\varepsilon^2\gamma_1(t)+\dots) \tag{1}$$

Отклонения от сферической формы малы: $\varepsilon\ll 1$. Потребуем, чтобы при деформациях капли сохранялись ее объем и положение центра масс

$$\int_\tau d\tau=\frac{4\pi}{3}R^3,\qquad \int_\tau x\,d\tau=\int_\tau y\,d\tau=\int_\tau z\,d\tau=0 \tag{2}$$

Вычисляя интегралы (2) по объему капли, ограниченному поверхностью (1), найдем с точностью до ε^2

$$\int_0^\pi \zeta\sin\theta\,d\theta=0,\qquad \int_0^\pi\zeta\cos\theta\sin\theta\,d\theta=0,\qquad \gamma_1=-\int_0^\pi\zeta^2\sin\theta\,d\theta \tag{3}$$

Пусть U – потенциал электрического поля в пространстве, окружающем каплю. Он является решением краевой задачи

$$\Delta U=0,\quad U=U_0\cos\Omega t,\quad r=R(1+\varepsilon\zeta+\varepsilon^2\gamma_1+\dots)$$
$$U\to 0,\quad |\operatorname{grad} U|\to 0,\quad r\to\infty$$

которое ищем в виде ряда $U=U_1+\varepsilon U_2+\varepsilon^2 U_3+\dots$.

Ограничиваясь вычислением первых двух членов ряда, находим с учетом условий (3) потенциал U, а также давление, создаваемое силами электрического поля на поверхности капли

$$U=U_0\cos\Omega t\left[\frac{R}{r}+\varepsilon\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}P_n(\cos\theta)\,\frac{2n+1}{2}\int_0^\pi\zeta(\theta',t)P_n(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta'\right] \tag{4}$$

$$p_e = -\frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} = -\frac{U_0^2(1+\cos 2\Omega t)}{8\pi R^2}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2} - \varepsilon\left[2\zeta - \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\frac{2n+1}{2}P_n(\cos\theta)\int_0^{\pi}\zeta(\theta', t)P_n(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta'\right]\right\}$$

где $P_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра.

Перейдем к формулировке задачи гидродинамики. Потенциал скоростей ищем в виде $\varepsilon\Phi$, поскольку скорости частиц жидкости имеют тот же порядок малости, что и отклонения поверхности капли от равновесной. Этот потенциал должен быть найден как регулярное решение следующей краевой задачи:

$$\Delta\Phi = 0, \qquad R\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \qquad r = R$$

$$\Phi_t - \frac{\alpha}{\rho R}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)\right] + \frac{U_0^2(1+\cos 2\Omega t)}{8\pi R^3\rho}\times \tag{6}$$

$$\times\left[2\zeta - \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\frac{2n+1}{2}P_n(\cos\theta)\int_0^{\pi}P_n(\cos\theta')\zeta(\theta', t)\sin\theta'\,d\theta'\right]\Bigg|_{r=R} = 0$$

Условие (6) является динамическим и означает, что на свободной поверхности капли давление жидкости должно равняться сумме давлений электрического поля и поверхностного натяжения. Частные решения краевой задачи (5), (6) ищем в виде

$$\zeta = u_n(t)P_n(\cos\theta), \qquad \Phi = v_n(t)\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta), \qquad n \geqslant 2 \tag{7}$$

Подстановка выражений (7) в краевые условия (5), (6) приводит к системе уравнений, описывающих изменение функций u_n и v_n во времени

$$\frac{dv_n}{dt} + \left[\frac{\alpha}{\rho R}(n-1)(n+2) - \frac{U_0^2}{8\pi\rho R^2}(1+\cos 2\Omega t)(n+1)\right]u_n = 0, \qquad \frac{du_n}{dt} = \frac{n}{R^2}v_n$$

Исключая функцию v_n, получим

$$\frac{d^2u_n}{dt^2} + \omega_n^2\left[1 - \frac{U_0^2(1+\cos 2\Omega t)}{8\pi(n+2)\alpha R}\right]u_n = 0, \qquad \omega_n^2 = \frac{n(n-1)(n+2)}{\rho R^3}\alpha \tag{8}$$

Уравнения (8) показывают, что колебания отдельных мод происходят независимо друг от друга. При $\Omega=0$ имеем классическую задачу Рэлея.

Для того чтобы наступила неустойчивость, силы электрического поля в задаче Рэлея должны превосходить силы поверхностного натяжения, т. е. выполняется одно из неравенств $Q^2 > 16\pi R^3\alpha$ или $U_0^2 > 16\pi R\alpha$.

Здесь рассмотрим противоположный случай, когда амплитудное значение сил электрического поля значительно меньше сил поверхностного натяжения $\mu = U_0^2/8\pi\alpha R(n+2) \ll 1$. Вводя новые параметры $\varkappa_n^2 = \omega_n^2(1-\mu)$, $\mu_1 = \mu/(1-\mu)$, приведем уравнения (8) к стандартным уравнениям Матье

$$\frac{d^2u_n}{dt^2} + \varkappa_n^2(1 - \mu_1\cos 2\Omega t)u_n = 0 \tag{9}$$

Согласно теории уравнения Матье, на плоскости параметров μ_1, $\varkappa_n/\Omega$ существуют клиновидные области, начинающиеся в точках (0,1), (0,2), (0,3) и т. д., внутри которых решения уравнения (9) экспоненциально возрастают во времени. Эти области, называемые резонансными, приведены, например, в [4]. При заданной величине параметра μ_1 наиболее широка первая резонансная зона $\varkappa_n/\Omega \simeq 1$. Величина инкремента зависит от положения точки (μ_1, $\varkappa_n/\Omega$) внутри резонансной зоны. Применяя стандартный метод усреднения [4] к уравнению (8), получаем первую резонансную зону для каждой моды

$$\omega_n\left(1 - \frac{3\mu}{4}\right) < \Omega < \omega_n\left(1 - \frac{\mu}{4}\right)$$

Опираясь на теорию уравнения Матье, можно сформулировать общие выводы. Если частота изменения электрического потенциала (заряда) капли попадает в одну из резонансных зон, то при отклонении формы капли от сферической амплитуда колебаний соответствующей моды нарастает экспоненциально во времени, сферическая капля становится неустойчивой. При всех заданных параметрах (амплитуда потенциала, поверхностное натяжение и радиус) наиболее легко возбуждаются низшие моды, поскольку с ростом номера моды параметр μ уменьшается. Неустойчивыми могут стать сразу несколько мод в том случае, если их зоны перекрываются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957, с. 90.
2. *Morrison C. A., Leavitt R. P., Wortman D. E.* The extended Rayleigh theory of the oscillation of liquid drophlets.– J. Fluid Mech., 1981, v. 104, p. 295–309.
3. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.– Л.: Гостехиздат, 1947, с. 591.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963, с. 209.

Москва

Поступила в редакцию 24.VI.1985

УДК 532.5.032

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НАД ПЕРФОРИРОВАННОЙ ГРАНИЦЕЙ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

БРУТЯН М. А., КРАПИВСКИЙ П. Л.

В рамках уравнений Стокса найдено точное решение задачи о сдвиговом течении вязкой жидкости над перфорированной границей. Рассмотрены случаи перфорации в виде поперечных щелей и эллиптических отверстий.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о сдвиговом потоке вязкой несжимаемой жидкости над поперечной щелью. Выберем декартову систему координат x, y так, что жидкость будет течь над плоскостью $y=0$, в которой вырезана щель $|x|<a$. Считаем, что над плоскостью при $\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$ скорость течения стремится к $(\alpha y, 0)$, а под плоскостью – к нулю. Будем считать, что число Рейнольдса $\mathrm{Re}=a^2\alpha/\nu$ достаточно мало; при этом течение описывается уравнениями Стокса. Предположим еще, что давление p стремится к нулю на бесконечности. Для того чтобы получить наиболее общее решение, достаточно будет к полученному решению добавить решение задачи, в которой давление вдали от щели над и под плоскостью $y=0$ различно, а скорость стремится к нулю. В дальнейшем удобнее рассматривать симметричный вариант задачи, когда скорость $\mathbf{V}$ на бесконечности стремится к $(\alpha|y|/2, 0)$. При этом решение исходной задачи можно легко получить, добавив скорость $\mathbf{V}_0=(\alpha y/2, 0)$.

Решение уравнений Стокса удобно искать в виде [1]

$$\mathbf{V}=y\nabla\Phi-\Phi\mathbf{j}+x\nabla\varphi-\varphi\mathbf{i}+\nabla\chi \tag{1.1}$$

$$\frac{p}{2\mu}=\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$\Delta\Phi=\Delta\varphi=\Delta\chi=0$$

Здесь $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ – единичные векторы по осям x, y. Из соображений симметрии следует, что гармонические функции Φ, φ, χ должны обладать следующими свойствами:

$$\Phi(x, y)=-\Phi(x, -y),\quad \varphi(x, y)=\varphi(x, -y),\quad \chi(x, y)=\chi(x, -y) \tag{1.2}$$

Условия симметрии (1.2) позволяют в дальнейшем рассматривать течение только в верхней полуплоскости $y\geqslant0$. Поскольку вдали от щели $\mathbf{V}\to\alpha y\mathbf{i}/2$, $p\to0$, граничные условия для Φ, φ и χ приобретают вид

$$\Phi\to Ax,\quad \varphi\to By,\quad \chi\to\alpha xy/4;\quad \sqrt{x^2+y^2}\to\infty;\quad B=A-\alpha/4 \tag{1.3}$$

Граничные условия на щели и на стенке имеют вид

$$\Phi=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\chi}{\partial y}=0,\qquad |x|<a \tag{1.4}$$