МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1986

УДК 534.29

СРЕДНЯЯ СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА МАЛОЕ ТЕЛО В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ЗВУКОВОМ ПОЛЕ В РЕАЛЬНОЙ СРЕДЕ

ДАНИЛОВ С. Д.

В квадратичном приближении решена задача о средней силе, действующей на малое по сравнению с длиной звуковой волны сферическое тело в осесимметричном звуковом поле в реальной (вязкой и теплопроводной) среде, с учетом зависимости коэффициента динамической вязкости от температуры. Показано, что решение этой задачи связано с рассмотрением дипольных акустических течений, возникающих около тела в такой среде. Напряжения, создаваемые этими течениями, не уничтожаются при интегрировании по поверхности тела и вносят тем самым вклад в среднюю силу, действующую на тело. В формировании дипольных акустических течений существенна не только вязкость среды, но и теплопроводность, а также зависимость коэффициента динамической вязкости от температуры. Поэтому корректное рассмотрение вкладов в среднюю силу от каждого из этих эффектов невозможно без учета дипольных акустических течений.

Для случаев больших и малых отношений глубин проникновения вязкой и температурной волн к радиусу тела приведены выражения для средней силы через коэффициенты разложения потенциала первичного звукового поля в ряд по полиномам Лежандра. Показано, что при переходе от больших к малым значениям указанных отношений знак средней силы, как правило, меняется.

1. Постановка задачи. Звуковое поле вследствие рассеяния на теле теряет некоторую часть среднего потока импульса. Эту величину называют силой радиационного давления (СРД). Ее вычисление не связано с расчетом осредненного поля скорости и поэтому является относительно простым [1–4]. В случае идеальной среды теряемый звуковыми волнами средний поток импульса – СРД – передается непосредственно телу, т. е. совпадает со средней силой (СС), действующей на тело. Примеры расчета СС в случае идеальной среды известны для малых тел с произвольными рассеивающими свойствами в произвольном звуковом поле [2].

Определение СС в реальной среде – значительно более сложная задача. В этом случае теряемый звуковой волной средний поток импульса (СРД в реальной среде [3, 4]) может частично расходоваться на возбуждение около тела осредненных потоков – акустических течений. Телу передается оставшаяся часть среднего потока импульса. Ее расчеты выполнены только для случая очень тяжелого (не осциллирующего) тела в поле плоской бегущей волны в вязкой среде [5]. Кроме этого, в реальной среде существуют и другие, не связанные с теряемым звуковой волной средним потоком импульса нелинейные механизмы, дающие вклад в СС. Их рассмотрение в литературе (см., например, [6]) основывается на анализе известной гидродинамической формулы для силы сопротивления, действующей на сферу при обтекании ее стационарным пространственно однородным потоком: $\mathbf{F}=6\pi\eta R\mathbf{v}_i(1+{}^3/_8 R\nu^{-1}|\mathbf{v}_i|)$. Здесь $\mathbf{v}_i$ – скорость невозмущенного потока, R – радиус тела, $\nu=\eta/\rho$. Однако расчет квадратичных эффектов с помощью этой формулы в нестационарном пространственно неоднородном звуковом поле некорректен и, как оказывается, может приводить к ошибкам.

Невозмущенное поле скорости представим в виде $\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_i'+\mathbf{v}_i''$. Здесь и ниже одним штрихом обозначены величины первого порядка малости, двумя — второго. Зависимость невозмущенного поля $\mathbf{v}_i'$ от времени предполагается гармонической вида $\exp(-i\omega t)$; множитель $\exp(-i\omega t)$ опускается.

Предположим, что тело может свободно совершать колебательное движение, но «закреплено» по отношению к среднему движению, и рассчитаем СС $\langle\mathbf{F}\rangle$, действующую на тело со стороны среды. Если закрепление затем устранить, то под действием СС $\langle\mathbf{F}\rangle$ тело будет дрейфовать со средней скоростью $\langle\mathbf{v}_d\rangle$.

Обозначим через $\mathbf{u}_0$ скорость осцилляций тела относительно неподвижной системы отсчета (НСО). Затем перейдем в осциллирующую со скоростью $\mathbf{u}_0$ систему отсчета (ОСО) и дальнейший расчет СС будем проводить в этой системе. Поскольку силы, действующие на тело в НСО и ОСО, различаются на силу инерции $M_0\partial\mathbf{u}_0/\partial t$, где M_0 — масса тела, то их средние по периоду значения совпадают в обеих системах отсчета. Невозмущенному полю $\mathbf{v}_i$ в ОСО в квадратичном приближении соответствует поле

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{r})=\mathbf{v}_i(\mathbf{r}_1)-\mathbf{u}_0=\mathbf{u}_i'+\mathbf{u}_i''=(\mathbf{v}_i'(\mathbf{r})-\mathbf{u}_0)+\left[\mathbf{v}_i''+\left(\int\mathbf{u}_0\,dt\,\nabla\right)\mathbf{v}_i'\right],$$

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}+\int\mathbf{u}_0\,dt \qquad (1.1)$$

где $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}$ — радиус-векторы в НСО и ОСО соответственно.

В ОСО вид уравнения неразрывности

$$\partial\rho/\partial t+\nabla(\rho\mathbf{u})=0 \qquad (1.2)$$

уравнений состояния и энергии остаются такими же, как и в НСО. В уравнении Навье — Стокса появляется дополнительное слагаемое $\rho\partial\mathbf{u}_0/\partial t$, связанное с неинерциальностью ОСО

$$\rho\partial(\mathbf{u}+\mathbf{u}_0)+\rho(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}+\nabla p+\eta\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}-\left(\frac{4}{3}\eta+\mu\right)\nabla\nabla\mathbf{u}-$$
$$-(\nabla\eta\nabla)\mathbf{u}-\nabla(\mathbf{u}\nabla\eta)+(\mathbf{u}\nabla)\nabla\eta+\frac{2}{3}\nabla\eta\nabla\mathbf{u}=0 \qquad (1.3)$$

Представим скорость, давление и другие поля в виде $\mathbf{u}=\mathbf{u}'+\mathbf{u}''$, $p=p_0+p'+p''$, ... Для получения уравнений относительно величин первого порядка малости, согласно общей схеме квадратичного приближения, перечисленные выше четыре уравнения должны быть линеаризованы. Для получения уравнений относительно величин второго порядка малости оставляются линейные и квадратичные по полям первого порядка малости члены. Область применимости квадратичного приближения ограничена весьма малыми амплитудами $v_0=|\mathbf{v}_i'|$ невозмущенной колебательной скорости. Общее обсуждение этого вопроса содержится, например, в [1]. Для рассматриваемой задачи можно показать, что v_0 ограничена неравенствами $A=|v_0-u_0|(\omega\delta)^{-1}\ll 1$ при $R\leqslant\delta$ и $A\delta R^{-1}\ll 1$, $Av_0\ll\delta L\omega R^{-1}$ при $R\gg\delta$. Здесь $\delta=(2\eta/\rho\omega)^{1/2}$, L — характерный масштаб изменения v_i'. Действующая на тело СС $\langle F\rangle$ выражается в виде

$$\langle F_l\rangle=-\oint_S\langle\Pi_{lm}\rangle dS_m-\left\langle M\frac{\partial u_0}{\partial t}\right\rangle \qquad (1.4)$$

$$\langle\Pi_{lm}\rangle=\langle p''\rangle\delta_{lm}+\rho_0\langle u_l'u_m'\rangle-$$
$$-\left\langle\eta\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m}+\frac{\partial u_m}{\partial x_l}-\frac{2}{3}\delta_{lm}\nabla\mathbf{u}\right)\right\rangle-\mu\delta_{lm}\langle\nabla\mathbf{u}''\rangle$$

Здесь $\langle\Pi_{lm}\rangle$ — усредненный по периоду тензор плотности потока импульса в квадратичном приближении, S — произвольная охватывающая тело поверхность, которую выберем концентричной с телом, M — полная масса, заключенная внутри поверхности интегрирования. В соответствии с последней формулой для расчета СС необходимо знать не только поля первого порядка малости, но и осредненные квадратичные составляющие полей скорости и давления. Расчет осредненных полей сопряжен с громоздкими промежуточными выкладками. Поэтому ниже сначала приведена лишь общая схема расчета для случая вязкой теплопроводной среды, коэффициент динамической вязкости которой не зависит от температуры. Затем указаны изменения, к которым приведет учет зависимости коэффициента динамической вязкости от температуры, выписан окончательный ответ и проведено его обсуждение.

2. Поля первого порядка малости и средние поля второго порядка малости. Поле скорости первого порядка малости представляется в виде суммы невозмущенного $\mathbf{u}_i'$ и рассеянного $\mathbf{u}_s'$ полей. В вязкой и теплопроводной среде поле $\mathbf{u}_s'$ состоит из волн трех типов: рассеянных звуковых волн $\mathbf{u}_{ss}'$, вихревых вязких волн и безвихревого поля скорости, обусловленного температурными волнами. Представим поле $\mathbf{u}_s'$ в виде $\mathbf{u}_s'=-\nabla\times\mathbf{\Psi}'+$ $+\nabla\Phi'$. В силу осевой симметрии задачи $\mathbf{\Psi}'=\mathbf{e}_\varphi\Psi'$, где $\mathbf{e}_\varphi$ — единичный орт сферической системы координат $(r,\ \theta,\ \varphi)$ с центром в середине тела. Выражения для Ψ', Φ' получаем из решения системы уравнений для полей первого порядка с учетом условий равенства нулю поля скорости $\mathbf{u}'$ на поверхности тела, равенства температур и потоков тепла при переходе через границу тела и условия излучения.

Далее, предполагая, что поля первого порядка малости известны, найдем поле средней скорости второго порядка малости. Решение будем искать в виде

$$\langle\mathbf{u}''\rangle=\langle\mathbf{u}_i''\rangle-\nabla\times(\mathbf{e}_\varphi\Psi'')+\nabla\Phi''+\left\langle\left(\int\mathbf{u}_0\,dt\,\nabla\right)\mathbf{u}_{ss}'\right\rangle \tag{2.1}$$

Применяя операцию ротора к уравнению Навье — Стокса для полей второго порядка малости и подставляя в него и в соответствующее уравнение неразрывности выражение (2.1), получим после усреднения по периоду и несложных преобразований

$$\begin{gathered}\nabla^4(\Psi''\sin\varphi)=-(\rho_0/\eta)\langle[-(\mathbf{u}'\nabla)+(u_r'+u_\theta'\operatorname{ctg}\theta)r^{-1}-2\nabla\mathbf{u}']\times\\ \times\nabla^2(\Psi'\sin\varphi)-\sin\varphi\mathbf{e}_\varphi[(\nabla\nabla\mathbf{u}')\times(\mathbf{u}'+\mathbf{u}_0)-(\nabla\nabla\mathbf{u}_i)\times(\mathbf{u}_i+\mathbf{u}_0)]\rangle\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\nabla^2\Phi''=\left\langle\mathbf{u}'\nabla\nabla\int\mathbf{u}'\,dt+\mathbf{u}_0\nabla\nabla\int\mathbf{u}_{ss}'\,dt-\mathbf{u}_i'\nabla\nabla\int\mathbf{u}_i'\,dt\right\rangle \tag{2.3}$$

В реальной среде волновое число звуковых волн k имеет малую мнимую добавку к значению $k=\omega/c$, где c — скорость звука в идеальной среде. Эта малая добавка в пределах той точности, с которой будет проводиться дальнейший расчет, несущественна, в чем можно убедиться непосредственно, сохраняя ее и проводя все последующие выкладки. Итак, примем $k=\omega/c$. В этом случае в правых частях уравнений (2.2) и (2.3) не остается слагаемых, квадратичных по звуковым волнам.

Вклад в СС могут вносить лишь дипольные составляющие поля $\langle\mathbf{u}''\rangle$, а значит, и потенциалов Ψ'', Φ''. В дальнейшем под $\langle\mathbf{u}''\rangle$, Ψ'', Φ'' будем понимать лишь указанные слагаемые. Разлагая правую часть уравнения (2.2) в ряд по присоединенным полиномам Лежандра P_n^1, обозначим радиальный множитель перед $P_1^1=\sin\theta$ через $\sigma(r)$. Разлагая правую часть уравнения (2.3) в ряд по полиномам Лежандра P_n, обозначим радиальный множитель перед полиномом $P_1=\cos\theta$ через $s(r)$. Решая уравнения (2.2), (2.3) при помощи метода вариации постоянных, получим

$$\Psi''=\sin\theta\left\{r^3\left[\frac{1}{30}\int_R^r\sigma(x)\,dx+X_1\right]+r\left[-\frac{1}{6}\int_R^r x^2\sigma(x)\,dx+X_2\right]+\right.$$

$$+\left[\frac{1}{6}\int_R^r x^3\sigma(x)\,dx+X_3\right]+r^2\left[-\frac{1}{30}\int_R^r x^5\sigma(x)\,dx+X_4\right]\Bigg\}$$

$$\Phi''=\cos\theta\left\{r\left[\frac{1}{3}\int_R^r s(x)\,dx+Y_1\right]+r^{-2}\left[-\frac{1}{3}\int_R^r x^3 s(x)\,dx+Y_2\right]\right\}$$

Здесь $r^3\sin\theta$, $r\sin\theta$, $\sin\theta$, $r^{-2}\sin\theta$ — дипольные решения однородного уравнения $\nabla^4(\Psi''\sin\theta)=0$; $r\cos\theta$, $r^{-2}\cos\theta$ — дипольные решения однородного уравнения $\nabla^2\Phi''=0$. Константы X_1, X_2, Y_1 находятся из требования ограниченности потенциалов Ψ'', Φ'' на бесконечности

$$X_1=-\frac{1}{30}\int_R^\infty \sigma(x)\,dx,\qquad X_2=\frac{1}{6}\int_R^\infty x^2\sigma(x)\,dx,\qquad Y_1=-\frac{1}{3}\int_R^\infty s(x)\,dx$$

Константа Y_2 может быть взята равной нулю, поскольку решение $r^{-2}\cos\theta$ уравнения $\nabla^2\Phi''=0$ приводит к полю скорости такого же вида, что и решение $r^{-2}\sin\theta$ уравнения $\nabla^4(\Psi''\sin\varphi)=0$. Оставшиеся константы находятся из требования равенства нулю скорости $\langle u''\rangle$ на поверхности тела

$$X_3=-\frac{5}{2}R^3X_1-\frac{3}{2}RX_2+\frac{3}{4}RY_1+\frac{3}{4}R\langle u_i''\rangle+\frac{1}{4}R[w_r(R)-2w_\theta(R)]$$

$$X_4=\frac{3}{2}R^5X_1+\frac{1}{2}R^3X_2-\frac{1}{4}R^3Y_1-\frac{1}{4}R^3\langle u_i''\rangle+\frac{1}{4}R^3[w_r(R)+2w_\theta(R)] \tag{2.4}$$

$$\mathbf{w}=(w_r(r)\cos\theta,\quad w_\theta(r)\sin\theta,\ 0)$$

Здесь $\mathbf{w}$ — дипольная составляющая последнего слагаемого в представлении (2.1). Невозмущенное поле $\mathbf{v}_i$ полагается медленно меняющимся на масштабе тела. В этом случае поле $\langle\mathbf{u}_i''\rangle$ вблизи тела можно считать однородным.

В СС может вносить вклад лишь дипольная гармоника среднего давления $\langle p''\rangle$. Ее расчет можно провести, воспользовавшись усредненным уравнением Навье — Стокса для величин второго порядка малости

$$\nabla\langle p''\rangle=({}^4/_3\eta+\mu)\,\nabla\,\nabla\langle\mathbf{u}'\rangle+$$

$$+\left\langle-\eta\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}''-\rho'\frac{\partial\mathbf{u}'}{\partial t}-\rho_0(\mathbf{u}'\nabla)\mathbf{u}'\right\rangle-\left\langle\rho'\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial t}\right\rangle \tag{2.5}$$

Разбивая давление $\langle p''\rangle$ на три слагаемых p_1, p_2, p_3, соответствующих слагаемым в правой части уравнения (2.5), для p_1 найдем $p_1=[{}^4/_3\eta+\mu]\times\times\nabla\langle\mathbf{u}''\rangle$. Умножив уравнение (2.5) скалярно на $\mathbf{e}_\theta$, для p_2 после подстановки выражения для $\langle\mathbf{u}''\rangle$ найдем

$$p_2=-\cos\theta\left\{\eta\left[\frac{2}{r^2}\left(\frac{1}{6}\int_R^r x^3\sigma(x)\,dx+X_3\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+20r\left(\frac{1}{30}\int_R^r\sigma(x)\,dx+X_1\right)\right]+g(r)r\right\}$$

Здесь $g(r)$ — множитель при $P_1^1=\sin\theta$ в разложении величины $-\mathbf{e}_\theta\langle\rho'\partial\mathbf{u}'/\partial t+\rho_0(\mathbf{u}'\nabla)\mathbf{u}'\rangle$ в ряд по присоединенным полиномам Лежандра. Давление p_3 находится точно так же, как и p_2: $p_3=-rq(r)\cos\theta$, где $q(r)$ — множитель при P_1^1 в разложении величины $-\mathbf{e}_\theta\langle\rho'\partial\mathbf{u}_0/\partial t\rangle$ в ряд по полиномам Лежандра. Отметим, что $g(R)=0$, поскольку $u_r'|_{r=R}=u_\theta'|_{r=R}=0$.

3. Формулы для СС. Подставляя выражения для среднего давления и скорости в формулу (1.4), для средней силы найдем

$$\langle F\rangle=8\pi\eta\left[-\frac{1}{6}\int\limits_R^r x^3\sigma(x)\,dx+X_3\right]+\frac{4}{3}\pi r^3[g(r)+q(r)]-$$
$$-\rho_0\oint\limits_S\langle u_0u_r'+u_r'^2\cos\theta-u_r'u_\theta'\sin\theta\rangle\,dS \tag{3.1}$$

Выбирая поверхность интегрирования совпадающей с поверхностью тела $(r=R)$, из (3.1) получим

$$\langle F\rangle=8\pi\eta X_3+{}^4/_3\pi R^3q(R) \tag{3.2}$$

Эта формула демонстрирует, сколь велика может быть роль акустических течений при расчете СС. Действительно, без учета течений получаем $\langle F\rangle={}^4/_3\pi R^3q(R)$, что дает явно неверный результат $\langle F\rangle=0$ для СС в случае очень тяжелого тела, для которого $q(r)=0$, поскольку $u_0=0$. Укажем, что в [7, 8] при расчете СС в вязкой среде акустические течения не учитывались.

Для обсуждения структуры СС вместо формулы (3.2) удобна другая формула, получающаяся из (3.1), если поверхность интегрирования выбрана достаточно далеко от тела – на расстоянии, превышающем несколько глубин проникновения вязкой и температурной волн

$$\langle F\rangle=8\pi\eta\left[-\frac{1}{6}\int\limits_R^\infty x^3\sigma(x)\,dx+X_3\right]+\langle f\rangle \tag{3.3}$$

$$\langle f\rangle=-\rho_0\oint\limits_S\langle u_0u_r'+u_r'^2\cos\theta-u_r'u_\theta'\sin\theta\rangle dS+\frac{4}{3}\pi r^3[g(r)+q(r)] \tag{3.4}$$

Величина $\langle f\rangle$ достаточно далеко от тела определяется лишь звуковыми волнами и представляет собой, следовательно, средний поток импульса, теряемый звуковыми волнами (входящий внутрь достаточно удаленной охватывающей тело поверхности), т. е. СРД. Первое слагаемое в (3.3) соответствует среднему потоку импульса, уносимому за пределы поверхности акустическими течениями, и представляет собой разницу между СС и СРД, существующую в реальной среде. Учитывая выражение (2.4) для константы X_3 и затем следующее из (1.1) выражение для невозмущенного поля скорости второго порядка малости $\langle u_i''\rangle$, из (3.3) получим

$$\langle F\rangle=\langle f\rangle+8\pi\eta\left[-\frac{1}{6}\int\limits_R^\infty x^3\sigma(x)\,dx-\frac{5}{2}R^3X_1-\frac{3}{2}RX_2+\frac{3}{4}RY_1\right]+$$
$$+6\pi\eta R\left\langle\left(\int\mathbf{u}_0\,dt\,\nabla\right)v_i'\right\rangle+6\pi\eta R\langle v_i''\rangle+2\pi\eta R[w_r(R)-2w_\theta(R)] \tag{3.5}$$

Последнее слагаемое в (3.5), как можно показать, всегда мало по сравнению с остальными слагаемыми. Второе слагаемое описывает вклад от акустических течений, обусловленных нелинейностью гидродинамических уравнений. Третье слагаемое отвечает вкладу в СС от «кинематических» акустических течений – изменениям невозмущенного поля в месте нахождения тела вследствие осцилляций тела; соответствующая СС известна в литературе как сила Духина [9, 6]. Наконец, четвертое слагаемое в (3.5) представляет собой силу Стокса со стороны стационарной составляющей невозмущенного поля в НСО.

Под действием СС $\langle F\rangle$ свободное незакрепленное тело будет двигаться со средней скоростью $\langle v_d\rangle=\langle F\rangle(6\pi\eta R)^{-1}$. Непосредственный интерес, однако, представляет не эта абсолютная скорость, а скорость среднего движения тела относительно частиц среды в невозмущенном поле. Для расчета относительной скорости вместо СС $\langle F\rangle$ нужно использовать СС $\langle\Pi\rangle$

$$\langle\Pi\rangle=\langle F\rangle-6\pi\eta R\left\langle v_i''+\left(\int \mathbf{v}_i'\,dt\,\nabla\right)v_i'\right\rangle$$

которая далее и исследуется. Из (3.2) и (2.4) находим

$$\langle\Pi\rangle=8\pi\eta\left(-\frac{5}{2}R^3X_1-\frac{3}{2}RX_2+\frac{3}{4}RY_1\right)+ \\ +\frac{4}{3}\pi R^3q(R)+6\pi\eta R\left\langle\left[\int(\mathbf{u}_0-\mathbf{v}_i')\,dt\,\nabla\right)v_i'\right\rangle \tag{3.6}$$

Последнее слагаемое в (3.6) будем называть модифицированной силой Духина.

Ограничимся невозмущенными полями, характерный пространственный масштаб изменения которых $L\gg R$. Для невозмущенных плоских волн, например, $L=k^{-1}$. В этом случае задача имеет малый параметр RL^{-1} и расчет СС можно выполнять с точностью до главного по малой величине RL^{-1} слагаемого. Для этого в разложении потенциала Φ_i' осесимметричного невозмущенного поля $\mathbf{v}_i'$ в ряд по полиномам Лежандра достаточно, как можно убедиться, ограничиться монопольным, дипольным и квадрупольным слагаемыми. Соответственно в разложениях потенциалов рассеянного поля будут отличны от нуля только коэффициенты перед указанными слагаемыми. Итак, потенциалы невозмущенного и рассеянного полей первого порядка возьмем в виде

$$\Phi_i'=A_0j_0(kr)P_0+[A_1j_1(kr)-u_0r]P_1+A_2j_2(kr)P_2$$

$$\Phi'=\sum_{n=0}^{n=2}[B_nh_n(kr)+D_nh_n(\varkappa_Tr)]P_n,\qquad \varkappa_T=\frac{1+i}{\delta_T},\qquad \delta_T=\left(\frac{2\chi}{\omega}\right)^{1/2}$$

$$\Psi'=C_1h_1(\varkappa r)P_1^1+C_2h_2(\varkappa r)P_2^1,\qquad \varkappa=(1+i)\delta^{-1},\qquad \delta=(2\eta/\rho_0\omega)^{1/2}$$

Здесь δ и δ_T — глубины проникновения вязкой и температурной волн, χ — коэффициент температуропроводности, $j_n(x)$ и $h_n(x)$ — сферические функции Бесселя и Ханкеля.

Коэффициенты B_n, C_n, D_n находятся из условий равенства нулю радиальной и тангенциальной составляющих скорости первого порядка малости и равенства нулю потоков тепла и температур по обе стороны границы тела. С требуемой точностью получим

$$B_0=-\frac{1}{3}i\alpha^3A_0+D_0(i\varkappa_TR-1)h_0(\varkappa_TR)h_0^{-1}(\alpha)$$

$$B_1=-\frac{1}{3}i\alpha^3(A_1-3u_0k^{-1})\left[-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\xi^{-1}+\frac{3}{2}\xi^{-2}\right]$$

$$B_2=-\frac{1}{135}i\alpha^5A_2[-2+10(i-3\xi^{-1}-3i\xi^{-2})\xi^{-1}(-1-i\xi^{-1})^{-1}]$$

$$C_1=\frac{1}{2}\alpha(A_1-3u_0k^{-1})[\xi h_0(\xi)]^{-1}$$

$$C_2=\frac{1}{9}\alpha^2A_2[\xi h_1(\xi)]^{-1},\qquad D_1=D_2=0$$

$$D_0=-i(\gamma-1)\delta_T^2\alpha^2A_0Z[2R^2h_0(\varkappa_TR)]^{-1}$$
$$Z=[1-k_T(i\varkappa_TR-1)k_{T1}^{-1}(\varkappa_{T1}R\operatorname{ctg}\varkappa_{T1}R-1)^{-1}]^{-1}(1-T_{a1}'/T_a')$$
$$\varkappa_{T1}=(1+i)\delta_{T1}^{-1},\ T_a'=(\gamma-1)a^{-1}\beta_ap',\ T_{a1}'=(\gamma_1-1)a_1^{-1}\beta_{a1}p',\ \gamma=c_p/c_v$$

Здесь $\alpha=kR$, $\xi=\varkappa R$; k_T, k_{T1} — коэффициенты теплопроводности среды и тела, δ_{T1} — длина температурной волны в материале тела, T_{a1}', T_a' — адиабатические изменения температуры тела и среды; a_1, a — коэффициенты температурного расширения тела и среды, β_{a1}, β_a — адиабатические сжимаемости материала тела и среды. Скорость осцилляций тела u_0, расчет которой можно найти, например, в [6], выражается в виде

$$u_0=v_i'G\left\{\frac{R^2}{\delta^2}\left(1+\frac{3R}{2\delta}\right)\left[1+\frac{2R}{9\delta}\left(1+\frac{2\rho_1}{\rho_0}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{R}{\delta}\right)^2+i\left(1+\frac{R}{\delta}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}-1\right)\right\}$$
$$G=\{(1+R\delta^{-1})^2+R^2\delta^{-2}[1+{}^2/_9R^1\delta^{-1}(1+2\rho_1\rho_0^{-1})]\}^{-1}$$

где ρ_1 — плотность тела.

Зная потенциалы поля скорости первого порядка, можно найти $\sigma(r)$ и $s(r)$. Получающиеся выражения слишком громоздки и потому здесь не приводятся. Отметим лишь, что все слагаемые, входящие в $\sigma(r)$ или в $s(r)$, содержат в качестве сомножителя сферические функции Ханкеля либо от аргумента $\varkappa r$, либо от $\varkappa_T r$. Константы X_1, X_2, Y_1, входящие в формулу (3.6) для СС, могут быть проинтегрированы в элементарных функциях лишь частично; их неинтегрируемые части выражаются в виде линейных комбинаций интегральных экспонент

$$E_n(x)=\int\limits_1^\infty e^{-xt}t^{-n}\,dt,\qquad x=i\varkappa^*R,\qquad i(\varkappa^*-\varkappa)R,\qquad i(\varkappa_T-\varkappa^*)R$$

Звездочкой здесь и ниже обозначаются комплексно-сопряженные величины. Приближенные аналитические выражения для интегральных экспонент можно получить при δ/R, $\delta_T/R\ll1$ или при δ/R, $\delta_T/R\gg1$, воспользовавшись асимптотическими разложениями.

Укажем, как включается в приведенную выше схему эффект зависимости коэффициента динамической вязкости от температуры: $\eta=\eta_0(1+NT')$, $N=\eta_0^{-1}\partial\eta/\partial T$. Поскольку изменения температуры, обусловленные звуковыми и температурными волнами, зависят от координаты, коэффициент η также зависит от координаты. Поэтому при расчетах должны быть приняты во внимание слагаемые с производными от η в уравнении Навье — Стокса (1.3). Все дополнительные слагаемые, появляющиеся при $\eta=\eta_0(1+NT')$, нелинейны. Поэтому зависимость коэффициента динамической вязкости от температуры не меняет рассеянного поля первого порядка малости. Но поля средней скорости и давления изменяются на некоторые величины $\langle\mathbf{u}_\eta''\rangle$ и $\langle p_\eta''\rangle$. Расчеты этих изменений выполняются аналогично расчетам полей $\langle\mathbf{u}''\rangle$ и $\langle p''\rangle$. После этого по формуле (1.4) проводится вычисление дополнительной средней силы, связанной с зависимостью коэффициента динамической вязкости от температуры.

4. Результаты и их обсуждение. В случае δ/R, $\delta_T/R\ll1$ для СС $\langle\Pi\rangle$ получаем следующее выражение:

$$\langle\Pi\rangle=\pi\rho_0(kR)^3\,\mathrm{Re}\left\{(A_1-3u_0k^{-1})^*\left[A_0\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(i-1)\delta R^{-1}\right)+\right.\right.$$
$$+A_2\frac{1}{45}(2-3i\delta R^{-1})+A_0N(\gamma-1)a^{-1}\delta^2R^{-2}\times$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{2}+Z\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\varkappa_T\varkappa^{*-1}-(2\varkappa_T-2\varkappa^*)^{-1}\varkappa_T\right)\right)\right]-$$
$$\left.-\frac{2}{3}k^{-1}u_0A_0^*+\frac{1}{3}(1+i)(\gamma-1)\delta_TR^{-1}A_0A_1^*Z\right\}$$

где Re означает действительную часть.

В случае δ/R, $\delta_T/R \gg 1$ для СС получаем

$$\langle\Pi\rangle = \pi\rho_0 (kR)^3 \operatorname{Re}\left\{ (A_1 - 3u_0 k^{-1})^* \left[\frac{1}{3}(1-i)\delta R^{-1}\left(A_0 - \frac{4}{25}A_2\right) - \right.\right.$$

$$- \frac{1}{6} i\delta^2 R^{-2}\left(A_0 - \frac{2}{5}A_2\right) + i(\gamma-1)a^{-1}\delta^2 R^{-2} N A_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{24}Z\right) -$$

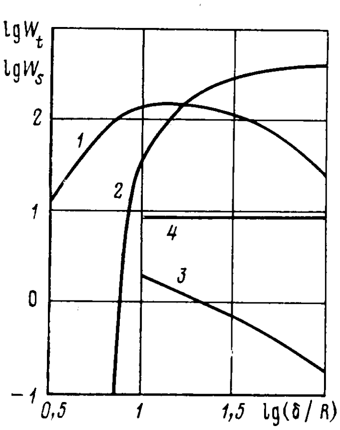
$$\left.\left. - \frac{1}{16} i(\gamma-1)\delta^2 R^{-2} A_0 Z \right] - \frac{2}{3}k^{-1}u_0 A_0^* + \frac{1}{3}(1+i)(\gamma-1)\delta_T R^{-1} A_0 A_1^* Z \right\}$$

В приведенных формулах отброшены слагаемые высшего порядка по δ/R, δ_T/R или R/δ, R/δ_T. В случае δ/R, $\delta_T/R \ll 1$ к этим слагаемым относится модифицированная сила Духина.

Согласно (4.1), (4.2), СС зависит от целого ряда параметров. Это затрудняет ее анализ в общем виде для произвольных A_0, A_1, A_2. Тем не менее в случае δ/R, $\delta_T/R \ll 1$ может быть установлена одна важная особенность; слагаемое, пропорциональное N, если $N(\gamma-1)a^{-1}$ не очень велико (для воздуха $N(\gamma-1)a^{-1} \approx 0{,}36$, для воды $\approx -0{,}55$), мало по сравнению с остальными слагаемыми в (4.1) и может быть отброшено. Остающееся выражение, как можно убедиться, совпадает с точностью до главного по δ/R, δ_T/R члена с СРД (3.4) в реальной среде, которая не зависит от полей акустических течений и находится непосредственно по полям первого порядка малости. Укажем, что помимо расчета по формуле (3.4) СРД может быть определена более простым независимым способом [4]. Таким образом, если в случае δ/R, $\delta_T/R \ll 1$ при расчете СС использовать удаленную поверхность интегрирования, то с самого начала можно ограничиться вычислением СРД и не принимать во внимание акустические течения. Если же расчет СС проводить, используя в качестве поверхности интегрирования поверхность тела (формула (3.6)), акустические течения обязательно должны быть учтены.

Значительно более сложным представляется случай δ/R, $\delta_T/R \gg 1$, так как различие между СС и СРД при этом велико. Независимо от того, где проходит поверхность интегрирования, при расчете СС должны быть обязательно приняты во внимание акустические течения.

Найдем выражение для СС в случае δ/R, $\delta_T/R \ll 1$ для конкретных невозмущенных полей. Обозначим через z координату вдоль оси симметрии невозмущенного поля. Если невозмущенное поле есть плоская бегущая волна $v_i' = v_0 e^{ikz}$, то имеем $A_0 = -ik^{-1}$, $A_1 = 3k^{-1}$, $A_2 = 5ik^{-1}$ и из (4.1) находим



$$\langle\Pi\rangle = \pi\rho_0 k R^3 v_0^2 [G(8/27)(\rho_1\rho_0^{-1} - 1)^2 \times$$
$$\times R^3\delta^{-3} + (\gamma-1)\delta_T R^{-1}(\operatorname{Re} Z + \operatorname{Im} Z)$$

Для невозмущенной стоячей волны $v_i' = v_0 \sin k(z+z_0)$ имеем $A_0 = -k^{-1}\cos kz_0$, $A_1 = 3k^{-1}\sin kz_0$, $A_2 = 5k^{-1}\cos kz_0$ и из (4.1) получаем

$$\langle\Pi\rangle = \pi\rho_0 k R^3 v_0^2 \frac{1}{2}\sin 2kz_0 \times$$
$$\times \left[G\left(\frac{2\rho_1}{\rho_0} + 1\right) R^4\delta^{-4}\frac{40\rho_1 - 16\rho_0}{243\rho_0} + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma-1}{R}\delta_T(\operatorname{Im} Z - \operatorname{Re} Z) \right]$$

При δ/R, $\delta_T/R \gg 1$ для плоских бегущей и стоячей волн из (4.2) находим соответственно

$$\langle\Pi\rangle = \pi\rho_0 k R^3 v_0^2 \left\{ G\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - 1\right)\left[-\frac{22R}{15\delta} - \frac{8R^2\rho_1}{27\delta^2\rho_0} - \right.\right.$$

$$- \frac{\gamma-1}{12}\left(\operatorname{Im} Z + \left(\frac{R}{\delta} + \frac{4R^2\rho_1}{9\delta^2\rho_0}\right)\operatorname{Re} Z\right) + \frac{\gamma-1}{3a} N \left(\frac{5}{6}\operatorname{Im} Z + (2 - \operatorname{Re} Z) \times\right.$$

$$\times\left(\frac{R}{\delta}+\frac{4R^2\rho_1}{9\delta^2\rho_0}\right)\bigg)\bigg]+\frac{\gamma-1}{R}\delta_T(\operatorname{Re}Z+\operatorname{Im}Z)\bigg\}$$

$$\langle\Pi\rangle=\pi\rho_0kR^3v_0^2\frac{1}{2}\sin kz_0\bigg\{G\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}-1\right)\bigg[\frac{16R^3\rho_1}{45\delta^3\rho_0}-\frac{2}{3}- \tag{4.3}$$

$$-\frac{\gamma-1}{12}\bigg(\operatorname{Re}Z+\left(\frac{R}{\delta}+\frac{4R^2\rho_1}{9\delta^2\rho_0}\right)\operatorname{Im}Z+\frac{\gamma-1}{3a}N\bigg(2-\frac{5}{6}\operatorname{Re}Z-$$

$$-\frac{20R^2\rho_1}{54\delta^2\rho_0}\operatorname{Im}Z\bigg)\bigg]+\frac{2}{3}G+(\gamma-1)\frac{\delta_T}{R}(\operatorname{Im}Z-\operatorname{Re}Z)\bigg\}$$

Согласно (4.3), поведение СС в значительной мере зависит от свойств среды и материала тела. Однако для тяжелого тела ($\rho_1 \gg \rho_0$) в отличие от случая δ/R, $\delta_T/R \ll 1$, СС направлена против СРД в реальной среде. Такая ситуация, например, реализуется для водяной капли в воздухе и для металлической частицы в воде. Представляя СС для плоских бегущей и стоячей волн в виде

$$\langle\Pi\rangle=-\pi\rho_0kR^3v_0^2W_t,\quad \langle\Pi\rangle=-\pi\rho_0kR^3v_0^2\sin 2kz_0W_s$$

проведем для иллюстрации зависимости СС от δ/R в случае δ/R, $\delta_T/R \gg 1$ расчет множителей W_t, W_s. Результаты расчета для водяной капли в воздухе и железной частицы в воде представлены на фигуре. Кривые *1*, *2* соответствуют водяной капле, *3*, *4* – железной частице. В качестве невозмущенного поля взяты бегущая (*1*, *3*) и стоячая волны (*2*, *4*).

Отметим, что для невозмущенной плоской стоячей волны существует экспериментальное подтверждение возможности дрейфа взвеси частиц в звуковом поле в сторону, противоположную направлению СРД [10].

Автор признателен М. А. Миронову за плодотворные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 519 с.
2. *Горьков Л. П.* О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости.– Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 1, с. 88–91.
3. *Westervelt P. J.* The theory of steady forces caused by sound waves.– J. Acoust. Soc. Amer., 1951, v. 23, № 4, p. 312–315.
4. *Данилов С. Д., Миронов М. А.* О силе радиационного давления, действующей на малую частицу в звуковом поле.– Акуст. журн., 1984, т. 30, № 4, с. 567–473.
5. *Данилов С. Д.* Средняя сила, действующая на малую сферу в поле бегущей волны в вязкой жидкости.– Акуст. журн., 1985, т. 31, № 1, с. 45–49.
6. *Медников Е. П.* Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 263 с.
7. *Жук А. П.* Взаимодействие твердой частицы со звуковой волной в вязкой жидкости.– Прикл. мех. (Киев), 1983, т. 19, № 11, с. 92–99.
8. *Гузь А. Н., Жук А. П.* О силах, действующих на сферическую частицу в звуковом поле в вязкой жидкости.– Докл. АН СССР, 1984, т. 274, № 6, с. 1312–1316.
9. *Духин С. С.* Теория дрейфа аэрозольной частицы в стоячей звуковой волне.– Коллоид. журн., 1960, т. 22, № 1, с. 128–130.
10. *Аветисян А. Г., Аракелян В. С., Багдасарян О. В., Дудоян А. К.* О поведении тяжелой частицы в вязкой жидкости в поле стоячей ультразвуковой волны.– Акуст. журн., 1985, т. 31, № 3, с. 385–386.

Москва

Поступила в редакцию
23.I.1985