МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1986

УДК 534.2

РЕЛАКСАЦИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ В ЖИДКОСТЯХ

КЕЛЬБЕРТ М. Я., ЧАБАН И. А.

Развиваются математические основы диагностики релаксирующих жидкостей при зондировании акустическими импульсами, основанной на регистрации формы этих импульсов. Анализ изменения формы импульса позволяет установить тип релаксации и определить ее параметры: время релаксации, дисперсионный скачок скорости и др. Для расчета формы импульса найдены ядра ползучести для трех основных типов релаксации в жидкостях: кнезеровской, резонансной и релаксации, связанной с диффузионным обменом. Рассчитана форма импульса (первоначально прямоугольного) вблизи фронта для указанных типов релаксации.

1. Локационные методы зондирования с помощью акустических сигналов широко используются во многих областях науки и техники. Особое место эти методы занимают в океанологии, поскольку акустические сигналы являются единственным средством передачи информации под водой. Возможности локационных методов могут быть существенно расширены, если регистрировать не только время прихода сигнала и его величину, но также и изменение его формы. Действительно, импульс давления, проходя через вещество или отражаясь, меняет свою форму вследствие дисперсии скорости звука и зависящего от частоты поглощения, которые являются отражением релаксационных процессов, протекающих в веществе. Анализ формы импульса позволяет установить тип релаксации и найти характеризующие ее параметры (время релаксации, дисперсионный скачок скорости и др.), т. е. является методом диагностики сред.

Под (акустической) релаксацией среды понимают внутренние процессы восстановления ее термодинамического равновесия, нарушенного периодическими изменениями давления в звуковой волне. Такие процессы с теми или иными характерными временами протекают практически во всех веществах. Поскольку различным веществам присущи различные релаксационные процессы с соответствующими характерными временами и уравнениями движения для добавочной термодинамической переменной, то по форме приходящего импульса можно определить, через какую среду прошел или от какой среды отразился импульс. Благодаря этому локация с регистрацией формы импульса позволяет в принципе не только обнаружить препятствие, но и в определенной мере ответить на вопрос, что это за препятствие.

Свободно распространяющиеся в релаксирующей среде звуковые волны ищутся как решения уравнения

$$\frac{1}{c_\infty{}^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi+(R*\Delta)\varphi=0 \qquad (1.1)$$

где Δ — оператор Лапласа, t — время, R — ядро наследственности, φ — давление (сжатие), звездочка означает операцию свертки [1—3]

$$(R*\Delta)\varphi=\int\limits_{-\infty}^{t} R(t-u)\Delta\varphi(\mathbf{r},u)\,du$$

Давление $p=p(t)$ и сжатие (относительное изменение объема) $s=s(t)$, связаны интегральными соотношениями [1, 2]

$$p(t)=E_\infty\left[s(t)-\int_{-\infty}^{t} R(t-u)s(u)\,du\right] \tag{1.2}$$

$$s(t)=E_\infty^{-1}\left[p(t)+\int_{-\infty}^{t} K(t-u)p(u)\,du\right] \tag{1.3}$$

$$R=K-K*K+K*K*K-\dots$$

где E_∞ — мгновенный (высокочастотный) модуль упругости, K — ядро ползучести.

Из (1.2) и (1.3) для периодического изменения сжатия и давления (зависимость от времени берется в виде $\exp(-i\omega t)$) находим следующие выражения для комплексного модуля упругости E^* и комплексной сжимаемости β^*:

$$E^*=E_\infty[1-R^\circ(\omega)],\qquad \beta^*=E_\infty^{-1}[1+K^\circ(\omega)] \tag{1.4}$$

$$R^\circ(\omega)=\int_0^\infty R(t)\exp(i\omega t)\,dt,\qquad K^\circ(\omega)=\int_0^\infty K(t)\exp(i\omega t)\,dt$$

Из (1.4) можно найти выражения для коэффициента поглощения и скорости звука через $K^\circ(\omega)$ (или $R^\circ(\omega)$)

$$\frac{\alpha}{\omega}=\sqrt{\rho}\,\mathrm{Im}\sqrt{\beta^*},\qquad c=[\sqrt{\rho}\,\mathrm{Re}\sqrt{\beta^*}]^{-1} \tag{1.5}$$

где ρ — плотность. Из этих формул при $\alpha\ll\omega/c$ получаем

$$\frac{\alpha}{\omega}=0{,}5cc_\infty^{-2}\,\mathrm{Im}\,K^\circ(\omega),\qquad c=c_\infty[1+\mathrm{Re}\,K^\circ(\omega)]^{-1/2} \tag{1.6}$$

Поскольку $K(t)$ — вещественная функция, то

$$\mathrm{Re}\,K^\circ(\omega)=\int_0^\infty K(t)\cos(\omega t)\,dt,\qquad \mathrm{Im}\,K^\circ(\omega)=\int_0^\infty K(t)\sin(\omega t)\,dt \tag{1.7}$$

Таким образом, все представляющие интерес характеристики среды, определяющие изменение формы импульса давления, выражаются через ядра и их фурье-образы.

Из (1.6), (1.7), в частности, следует, что для положительных при всех $t>0$ ядер при $\omega\to0$ коэффициент поглощения изменяется пропорционально ω^2, в то время как для осциллирующих ядер это уже не так. Для оценки поведения коэффициента поглощения при $\omega\to\infty$ можно пользоваться соотношением [2]

$$\frac{1}{2c_\infty}K\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\leqslant\alpha(\omega)\leqslant\frac{\pi^2}{2c_\infty}K\left(\frac{\pi}{\omega}\right) \tag{1.8}$$

В частности, если ядро сингулярно при $t\to0$ и имеет особенность типа $t^{-\nu}$ $(0<\nu<1)$, из (1.8) следует, что $\alpha\sim\omega^\nu$ при $\omega\to\infty$. Для регулярных ядер, у которых существует конечный предел $\lim K(t)=K(0)<\infty$ при $t\to0$, коэффициент поглощения при $\omega\to\infty$ не зависит от частоты.

Если исключить состояния жидкости, близкие к критическим, можно считать, что в жидкости наблюдается релаксация трех типов: кнезеровская, резонансная и релаксация, связанная с диффузионным обменом. Кнезеровская релаксация [4—6] имеет место во многих индивидуальных маловязких жидкостях (колебательная релаксация, релаксация, связанная с изомерными превращениями, и т. д.) и растворах. В последних она может быть связана с протекающими химическими реакциями между компонентами, с сольватацией, диссоциацией электролита и т. д. В частности, в морской воде наиболее важный процесс кнезеровской релаксации связан с диссоциацией соли $MgSO_4$. Резонансная релаксация [7, 8] имеет место в однородных и микронеоднородных средах, содержащих резонаторы той или иной природы. Вода с газовыми пузырьками — важный для гидроакустики пример жидкой среды с резонансной релаксацией. Релаксация, связанная с диффузионным обменом, имеет место в микронеоднородных средах и наблюдается во взвесях [9], эмульсиях [10, 11] и сильновязких жидкостях [12, 13]. Из этих трех типов релаксации только для релаксации кнезеровского типа в литературе можно найти выражение для ядра [14]. Поэтому прежде всего необходимо вычислить отсутствующие в литературе ядра для резонансной релаксации и релаксации, связанной с диффузионным обменом. Затем будет получено общее выражение для формы прошедшего импульса (первоначально прямоугольного) и рассчитана его форма вблизи фронта для рассматриваемых трех типов релаксации.

2. **Вычисление ядер.** Как известно, релаксация связана с существованием в среде дополнительной термодинамической переменной ξ, определяющей помимо давления и температуры состояние среды (в более сложных случаях существует несколько дополнительных термодинамических переменных). Так, в случае кнезеровской релаксации, связанной с диссоциацией соли $MgSO_4$ в морской воде, ξ имеет смысл концентрации недиссоциированных молекул $MgSO_4$; в случае резонансной релаксации, связанной с колебаниями газовых пузырьков в воде, ξ имеет смысл радиуса пузырька; в случае релаксации, связанной с диффузионным (тепловым) обменом в эмульсии, ξ имеет смысл температуры в зерне. В равновесном состоянии ξ принимает равновесное значение ξ_0, являющееся функцией давления и температуры. При достаточно быстром изменении давления и температуры новое равновесное значение ξ не успевает устанавливаться и появляется отклонение ξ от равновесного значения: $\xi'=\xi-\xi_0$. Адиабатическое сжатие среды s определяется изменением давления и величиной ξ': $s=p/E_0+f\xi'$, где E_0 — низкочастотный модуль упругости, f — некоторый коэффициент. Запаздывающее изменение ξ по отношению к изменению давления и есть тот релаксационный процесс, который приводит к дисперсии скорости звука и аномальному поглощению. Рассматриваемые три типа релаксационных процессов соответствуют трем видам уравнения движения для ξ.

В случае кнезеровской релаксации ξ' при изменении давления изменяется в соответствии с уравнением [5]

$$\dot{\xi}' + \frac{1}{\tau}\xi' = -\frac{\partial\xi_0}{\partial p}\dot{p}$$

где τ — время релаксации при постоянном сжатии, а точки над переменными означают производные по времени. Хотя ядро ползучести для кнезеровской релаксации известно [14], ниже это ядро будет получено из уравнения для ξ', чтобы на этом простом примере продемонстрировать метод, использующийся далее для других ядер. Из приведенного уравнения получаем

$$\xi' = -\frac{\partial\xi_0}{\partial p}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{dp(u)}{du}\exp\left(-\frac{t-u}{\tau}\right)du$$

Подставив это соотношение в выражение для s, получаем

$$s = E_0^{-1}p - \gamma\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{dp(u)}{du}\exp\left(-\frac{t-u}{\tau}\right)du$$

откуда определяется ядро ползучести для кнезеровской релаксации

$$K(t) = \frac{\gamma E_\infty}{\tau}e^{-t/\tau}$$

Величину $\gamma=f\partial\xi_0/\partial p$ можно выразить через высокочастотную c_∞ и низкочастотную c_0 скорости звука и плотность ρ

$$\gamma=(c_\infty^2-c_0^2)/\rho c_0^2 c_\infty^2 \qquad (2.1)$$

так что ядро ползучести и его фурье-образ оказываются следующими:

$$K(t)=\frac{c_\infty^2-c_0^2}{c_0^2\tau}\,e^{-t/\tau} \qquad (2.2)$$

$$K^\circ(\omega)=\frac{c_\infty^2-c_0^2}{c_0^2(1-i\omega\tau)} \qquad (2.3)$$

Величина ξ' в случае резонансной релаксации изменяется в соответствии с уравнением [14, 15]

$$\ddot{\xi}'+d\dot{\xi}'+\omega_0^2\xi'=-\frac{\partial\xi_0}{\partial p}\ddot{p}$$

где $d/2$ — коэффициент затухания колебаний в резонаторе, ω_0 — резонансная частота. Решая его, получаем

$$\xi'=-\frac{\partial\xi_0}{\partial p}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{d^2p(u)}{du^2}\,e^{-\frac{1}{2}d(t-u)}\sin[\omega'(t-u)]\,\frac{du}{\omega'}$$

где $\omega'=(\omega_0^2-d^2/4)^{1/2}$. Подставляя эту формулу в выражение для сжатия и полагая $\gamma=f\partial\xi_0/\partial p$, находим

$$s=E_0^{-1}p-\gamma\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{d^2p(u)}{du^2}\,e^{-\frac{1}{2}d(t-u)}\sin[\omega'(t-u)]\,\frac{du}{\omega'} \qquad (2.4)$$

Величина γ выражается через низко- и высокочастотную скорости звука, так же как и в случае кнезеровской релаксации, соотношением (2.1). Из (1.3) и (2.4) вытекает, что ядро ползучести для резонансной релаксации и его преобразование Фурье имеют вид

$$K(t)=\frac{c_\infty^2-c_0^2}{c_0^2}\,e^{-dt/2}\left[\omega'\sin(\omega't)+d\cos(\omega't)-\frac{d^2}{4\omega'}\sin(\omega't)\right] \qquad (2.5)$$

$$K^\circ(\omega)=\frac{c_\infty^2-c_0^2}{c_0^2}\left(1-\frac{i\omega d}{\omega_0^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-\frac{i\omega d}{\omega_0^2}\right)^{-1} \qquad (2.6)$$

Релаксацию, связанную с диффузионным обменом, разберем на примере сильновязких жидкостей. Последние, согласно существующим представлениям [12, 13], являются двухфазными средами, состоящими из неупорядоченной среды и помещенных в нее упорядоченных областей с некоторой степенью порядка, которая характеризуется величиной ξ_1, имеющей смысл концентрации дырок. Эта величина является дополнительной независимой термодинамической переменной в упорядоченной фазе. Ее равновесное значение ξ_1° меняется при изменении давления, что соответствует перестройке упорядоченных областей. Новое равновесное значение устанавливается благодаря диффузии дырок через границы упорядоченных областей. Запаздывание этого процесса и приводит к дисперсии скорости и избыточному поглощению. Обозначим через ξ_1' и ξ_2' отклонения значений ξ от равновесных в упорядоченной и неупорядоченной фазах. При изменении давления p эти величины изменяются в соответствии с уравнениями [12]

$$\dot{\xi}_1'-D_1\Delta\xi_1'=-\frac{\partial\xi_1^\circ}{\partial p}\dot{p},\qquad \dot{\xi}_2'-D_2\Delta\xi_2'=0 \qquad (2.7)$$

при условиях $\xi_1'=\xi_2'$, $D_1\nabla\xi_1'=D_2\nabla\xi_2'$ на границе фаз. Для простоты предполагаем, что коэффициенты диффузии одинаковы ($D_1=D_2=D$), а упорядоченные области являются шарами радиуса a, расположенными достаточно далеко друг от друга, так что диффузию дырок между каждым таким шаром и неупорядоченной фазой можно рассчитывать независимо.

Интерес представляет связь между давлением p и усредненным сжатием

$$s=\frac{1}{V_1+V_2}\left(\int\limits_{V_1} s_1\,dV_1+\int\limits_{V_2} s_2\,dV_2\right) \tag{2.8}$$

где V_1 и V_2 — объемы, занятые упорядоченной и неупорядоченной фазами. Сжатия s_1 и s_2 определяются давлением и величиной ξ'

$$s_1=pE_{01}^{-1}+f_1\xi_1', \qquad s_2=pE_{02}^{-1}+f_2\xi_2'$$

где E_{01}, E_{02} — статические упругие модули, f_1 и f_2 — некоторые коэффициенты. Находя ξ_1' и ξ_2' из уравнений (2.7), получаем

$$\xi_{1,2}'(r,t)=-\frac{\partial\xi_1^\circ}{\partial p}\frac{1}{\sqrt{\pi D}r}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{dp(u)}{du}\left\{D(t-u)\left(e^{-\varkappa_+^2}-e^{-\varkappa_-^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{\pi}}{2}r[D(t-u)]^{1/2}(\operatorname{erf}\varkappa_+-\operatorname{erf}\varkappa_-)\right\}(t-u)^{-1/2}\,du$$

$$\varkappa_\pm=\frac{r\pm a}{2\sqrt{D(t-u)}}, \qquad \operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-u^2}\,du$$

где r — расстояние от центра шара. Далее, используя сохранение общего числа дырок и проводя интегрирование в (2.8), получим

$$s=E_0^{-1}p-\frac{3\gamma}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{dp(u)}{du}\left[\frac{2}{3\sigma^3}(1-e^{-\sigma^2})+\frac{1}{3\sigma}e^{-\sigma^2}-\frac{1}{\sigma}+\frac{\sqrt{\pi}}{3}\operatorname{erf}\sigma\right]du$$

$$\sigma=\frac{a}{\sqrt{D(t-u)}}, \qquad \gamma=\frac{\partial\xi_1^\circ}{\partial p}\varphi_0(f_1-f_2) \tag{2.9}$$

Здесь φ_0 — относительный объем, занятый упорядоченной фазой, E_0 — статический модуль упругости, $1/E_0=\varphi_0/E_{01}+(1-\varphi_0)/E_{02}$. Величина γ выражается через высоко- и низкочастотную скорости звука c_∞, c_0 и плотность ρ соотношением (2.1). Интегрируя по частям (2.9), находим ядро ползучести для релаксации, связанной с диффузионным обменом, и его преобразование Фурье

$$K(t)=\frac{3}{\sqrt{\pi}}\frac{c_\infty^2-c_0^2}{c_0^2}\left[\frac{\sqrt{D}}{2a\sqrt{t}}(1+e^{-a^2/Dt})-\frac{\sqrt{D^3t}}{a^3}(1-e^{-a^2/Dt})\right]. \tag{2.10}$$

$$K^\circ(\omega)=i\frac{c_\infty^2-c_0^2}{c_0^2}F(\omega\tau_0) \tag{2.11}$$

Выражение для $F(\omega\tau_0)$ приведено в п. 3, $\tau_0=a^2/(2D)$. Отметим, что при $t\to\infty$ $K(t)\sim a^3/(12D^{3/2}t^{5/2})$, а при $t\to 0$ ядро $K(t)$ имеет особенность $t^{-1/2}$; ту же особенность имеет ядро релаксации $R(t)$. Таким образом, среда, обладающая релаксацией, связанной с диффузионным обменом, является, вероятно, первым примером реальной среды, для которой сингулярность ядра обоснована теоретически.

Среды с памятью, описываемые уравнением (1), традиционно изучаются в рамках наследственной теории упругости (НТУ) [1–3]. Отправной точкой НТУ служат экспериментальные данные по упругому последействию в твердых телах. Большое разнообразие типов упругого последействия твердых тел не допускает пока какой-либо систематизации. Поэтому в НТУ обычно оперируют с некоторыми модельными ядрами (ядро Абеля, ядро Работнова и др.), параметры которых можно варьировать, подгоняя их под реальные твердые материалы. Недостаточное понимание физики релаксационных процессов в твердых веществах сказывается, в частности, в том, что в НТУ до сих пор остается открытым вопрос, сингулярны или нет ядра, описывающие реальные среды. Как показано выше, на этот вопрос можно однозначно ответить, развивая НТУ на базе теории для жидких сред: реальные среды могут иметь как сингулярные, так и несингулярные ядра.

3. Приведем выражения для коэффициента поглощения α и скорости звука c как функции частоты и характерного времени для трех рассмотренных типов релаксационных процессов, вычисленные по формулам (1.5). Из огромного числа экспериментальных работ, подтверждающих эти закономерности, приведем лишь несколько для каждого типа релаксации: кнезеровская [16, 17], резонансная [18, 19], релаксация, связанная с диффузионным обменом [20–23].

Кнезеровская релаксация

$$\frac{\alpha}{\omega}=\frac{1}{c_0}\operatorname{Im}\left\{\left[1+\frac{c_\infty^2-c_0^2}{c_\infty^2}\frac{i\omega\tau}{1-i\omega\tau}\right]^{1/2}\right\}$$

$$c=c_0\Big/\operatorname{Re}\left\{\left[1+\frac{c_\infty^2-c_0^2}{c_\infty^2}\frac{i\omega\tau}{1-i\omega\tau}\right]^{1/2}\right\}$$

При $\omega\to0$ и $\omega\to\infty$ соответственно имеем

$$\alpha=\frac{c_\infty^2-c_0^2}{2c_0c_\infty^2}\omega^2\tau,\qquad \alpha=\frac{c_\infty^2-c_0^2}{2c_0^2c_\infty\tau}$$

Резонансная релаксация

$$\frac{\alpha}{\omega}=\frac{1}{c_0}\operatorname{Im}\Omega_1,\qquad c=\frac{c_0}{\operatorname{Re}\Omega_1}$$

$$\Omega_1=\left[1+\frac{c_\infty^2-c_0^2}{c_\infty^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega d}\right]^{1/2}$$

При $\omega\to0$ и $\omega\to\infty$ получаем

$$\alpha=\frac{c_\infty^2-c_0^2}{2c_0c_\infty^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 d,\qquad \alpha=\frac{(c_\infty^2-c_0^2)d}{2c_0^2c_\infty}$$

Релаксация, связанная с диффузионным обменом:

$$\frac{\alpha}{\omega}=\frac{1}{c_\infty}\operatorname{Im}\Omega_2,\qquad c=\frac{c_\infty}{\operatorname{Re}\Omega_2}$$

$$\Omega_2=\left[1+i\frac{c_\infty^2-c_0^2}{c_0^2}F(\omega\tau_0)\right]^{1/2}$$

$$F(\omega\tau_0)=\frac{3}{2}\frac{1}{\omega\tau_0}\frac{[1+(1-i)\sqrt{\omega\tau_0}]\{(1-i)\sqrt{\omega\tau_0}-\operatorname{th}[(1-i)\sqrt{\omega\tau_0}]\}}{(1-i)\sqrt{\omega\tau_0}\{1+\operatorname{th}[(1-i)\sqrt{\omega\tau_0}]\}}$$

При $\omega\to0$ и $\omega\to\infty$ имеем

$$\alpha=\frac{2}{5}\frac{c_\infty^2-c_0^2}{c_0c_\infty^2}\omega^2\tau_0,\qquad \alpha=\frac{3}{8}\frac{c_\infty^2-c_0^2}{c_0^2c_\infty}\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\tau_0}}$$

4. Расчет формы импульса вблизи фронта. Будем считать, что в начальный момент импульс имел прямоугольную форму

$$p(x,0)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant b\\ 0, & |x|>b\end{cases}$$

где x — координата в направлении распространения, b — полуширина импульса. Форма этого импульса при $|x|>b$ как функция времени дается выражением

$$p(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-i\omega t+\frac{i\omega}{c_\infty}\sqrt{1+K^\circ(\omega)}\,|x|\right]\sin\left[\frac{\omega b}{c_\infty}\sqrt{1+K^\circ(\omega)}\right]\frac{d\omega}{\omega}$$

где контур интегрирования обходит полюс $\omega=0$ сверху в полуплоскости $\operatorname{Im}\omega>0$. Для нахождения формы импульса в средах с рассматриваемыми типами релаксации нужно подставить в это выражение полученные выше формулы (2.3), (2.6), (2.11) для $K^\circ(\omega)$. Как известно, фронт импульса распространяется с максимальной для среды скоростью c_∞ [2, 3, 24]. Строгое доказательство этого факта дается с помощью теоремы Пэли — Винера (см., например, [25, гл. 2, § 9], а также [2, гл. 2, § 2]). Поскольку поведение импульса вблизи фронта определяется высокими частотами, то при расчете головной части импульса можно пользоваться высокочастотным асимптотическим представлением для ядер. Приведем окончательные результаты.

В случае кнезеровской релаксации форма импульса вблизи фронта выражается через модифицированную функцию Бесселя 1-го рода $I_0(z)$. В этом случае имеет место следующая картина вступления импульса при больших положительных x $(x\gg\tau c_\infty^2/(c_\infty-c_0))$. При $t<(x-b)/c_\infty$ возмущение отсутствует, при $t=(x-b)/c_\infty$ на фронте появляется скачок. Величина скачка экспоненциально убывает по мере удаления от источника. При $(x-b)/c_\infty<t\leqslant(x+b)/c_\infty$ и $t>(x+b)/c_\infty$ получаем соответственно

$$p(x,t)=0{,}5\exp\left[-K(0)(x-b)(2c_\infty)^{-1}\right]I_0(\theta_-)$$

$$p(x,t)=0{,}5\exp\left[-K(0)(x-b)(2c_\infty)^{-1}\right]I_0(\theta_-)-$$
$$-0{,}5\exp\left[-K(0)(x+b)(2c_\infty)^{-1}\right]I_0(\theta_+)$$

$$\theta_\pm=\left[2K(0)(x\pm b)\left(t-\frac{x\pm b}{c_\infty}\right)(c_\infty\tau)^{-1}\right]^{1/2}$$

где $K(0)$ дается формулой (2.2).

Отметим, что описание импульса вблизи фронта через функции Бесселя не ново и возникало в ряде близких задач [3, 26].

В случае резонансной релаксации возможны два варианта: если $d>\omega_0$, то решение, как и раньше, выражается через модифицированную функцию Бесселя, если $d<\omega_0$, что является более интересным случаем, то форма импульса выражается через обычную функцию Бесселя $J_0(z)$ и непосредственно за фронтом возникают осцилляции. В этом случае при $(x-b)/c_\infty<$ $<t\leqslant(x+b)/c_\infty$ и $t>(x+b)/c_\infty$ имеем соответственно

$$p(x,t)=0{,}5\exp\left[-K(0)(x-b)(2c_\infty)^{-1}\right]J_0(\eta_-)$$

$$p(x,t)=0{,}5\exp\left[-K(0)(x-b)(2c_\infty)^{-1}\right]J_0(\eta_-)-$$
$$-0{,}5\exp\left[-K(0)(x+b)(2c_\infty)^{-1}\right]J_0(\eta_+)$$

$$\eta_\pm=\left[2K(0)(\omega_0^2-d^2)(x\pm b)\left(t-\frac{x\pm b}{c_\infty}\right)(c_\infty d)^{-1}\right]^{1/2}$$

где $K(0)$ дается формулой (2.5).

Наконец, в случае релаксации, связанной с диффузионным обменом, используя (2.10), (2.11), получаем следующую картину вступления импульса при больших положительных x: при $t<(x-b)/c_\infty$ поле отсутствует, при $(x-b)/c_\infty\leqslant t\leqslant(x+b)/c_\infty$ и $t>(x+b)/c_\infty$ имеем

$$p(x,t)=0{,}5(1-\operatorname{erf}\mu_-),\quad p(x,t)=0{,}5(\operatorname{erf}\mu_+-\operatorname{erf}\mu_-)$$

$$\mu_\pm=3(c_\infty^2-c_0^2)(x\pm b)\left(8\sqrt{2}\,c_\infty c_0^2\sqrt{\tau_0}\sqrt{t-\frac{x\pm b}{c_\infty}}\right)^{-1}$$

Импульс вступает бесконечно гладко, как и предсказывается общей теорией [2].

Как следует из полученных выражений, параметры τ, ω_0, d, τ_0 и $(c_\infty-c_0)/c_0$, характеризующие релаксацию, можно найти уже из анализа формы импульса вблизи фронта. После более полного расчета формы импульса эти параметры можно будет определить и по другим частям импульса. Обычно эти параметры извлекаются из зависимостей скорости звука и коэффициента поглощения от частоты. Получение таких зависимостей в лабораторных условиях сопряжено с серьезными техническими трудностями, поскольку для каждого диапазона частот требуется специальная установка. В океанологии эти сведения получают, фильтруя сигнал, обычно с помощью $^1/_3$-октавных фильтров, что приводит к большим погрешностям. Уменьшение полосы пропускания фильтров усложняет и удлиняет обработку сигналов. Преимущество предлагаемого метода состоит в том, что он не отягощен указанными техническими трудностями и годится для работы в реальном масштабе времени.

Авторы искренне благодарны В. А. Боровикову за ценные замечания при обсуждении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
2. *Локшин А. А., Суворова Ю. В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982. 151 с.
3. *Вайнштейн Л. А.* Распространение импульсов.– Успехи физ. наук, 1976, т. 118, № 2, с. 339–367.
4. *Kneser H. O.* Zur Dispersions theorie des Schalles.– Ann. Phys., 1931, № 6. B. 11, S. 761–776.
5. *Мандельштам Л. И., Леонтович М. А.* К теории поглощения звука в жидкостях.– ЖЭТФ, 1937, т. 7, № 3, с. 438–444.
6. *Михайлов И. Г., Соловьев В. А., Сырников Ю. П.* Основы молекулярной акустики. М.: Наука, 1964. 514 с.
7. *Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.* Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР. 238 с.
8. *Hunklinger S., Arnold W.* Ultrasonic properties of glasses at low temperatures.– In: Physical Acoustics. V. 12. N. Y. and a. o.: Acad. press, 1976, p. 155–215.
9. *Рытов С. М., Владимирский В. В., Галанин М. Д.* Распространение звука в дисперсных системах.– ЖЭТФ, 1938, т. 8, № 5, с. 614–621.
10. *Исакович М. А.* О распространении звука в эмульсиях.– ЖЭТФ, 1948, т. 18, № 10, с. 907–912.
11. *Ратинская И. А.* О затухании звука в эмульсиях.– Акуст. журн., 1962, т. 8, № 2, с. 210–215.
12. *Исакович М. А., Чабан И. А.* Распространение волн в сильновязких жидкостях.– ЖЭТФ, 1966, т. 50, № 5, с. 1343–1363.
13. *Чабан И. А.* К вопросу о нелокальной диффузионной теории распространения волн в сильновязких жидкостях.– Акуст. журн., 1980, т. 26, № 2, с. 288–292.
14. *Красильников В. А., Крылов В. В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
15. *Новик А., Берри Б.* Релаксационные явления в кристаллах. М.: Атомиздат, 1975, гл. 14.
16. *Andreae J. H., Heasel E. L., Lamb Y.* Ultrasonic relaxation and the vibrational specific heat of carbon disulphide.– Proc. Phys. Soc. Lond., B, 1956, v. 69, p. 625.
17. *Andreae J. H.* Ultrasonic relaxation in methylene chloride.– Proc. Phys. Soc. Lond., B, 1957, v. 70, № 1, p. 71–76.
18. *Fox F. E., Curley S. R., Larson G. S.* Phase velocity and absorption measurements in water, containing air bubbles.– J. Acoust. Soc. Amer., 1955, v. 27, № 3, p. 534–539.
19. *Silberman E.* Sound velocity and attenuation in bubble mixtures, measured in standing wave tubes.– J. Acoust. Soc. Amer., 1957, v. 29, № 8, p. 925–933.
20. *Кольцова И. С., Михайлов И. Г., Сабуров Б.* Распространение ультразвуковых волн в органических эмульсиях.– Вестн. ЛГУ. Физика. Химия, 1973, № 4, вып. 1.
21. *Михайлов И. Г., Маренина К. Н.* Поглощение ультразвуковых волн во взвесях.– Вестн. ЛГУ. Физика. Химия, 1956, № 22, вып. 4, с. 56–74.
22. *Кривохижа С. В., Фабелинский И. Л.* Экспериментальные исследования распространения ультразвука в вязких жидкостях.– ЖЭТФ, 1966, т. 50, № 1, с. 3–14.
23. *Бердыев А. А., Лысенко В. А., Хемраев Б.* Поглощение и дисперсия ультразвука и гиперзвука в глицерине.– ЖЭТФ, 1973, т. 65, № 3, с. 1040–1044.
24. *Элайсез М., Гарсиа-Молинер Ф.* Распространение волновых пакетов и частотнозависимое внутреннее трение.– В кн.: Физическая акустика. Т. 5. М.: Мир, 1973.
25. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977, гл. 2.
26. *Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е.* Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983, гл. 8.

Москва

Поступила в редакцию
6.V.1985