МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1986

УДК 533.72

О ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ СКОЛЬЖЕНИЯ ОТ ХАРАКТЕРА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОЛЕКУЛ ГАЗА С ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

САВКОВ С. А., ЮШКАНОВ А. А.

Разработан метод решения граничных задач кинетической теории газов, позволяющий использовать граничные условия в наиболее общем виде. В качестве примера рассмотрено обобщенное граничное условие Максвелла, учитывающее зависимость коэффициента аккомодации от угла падения молекул газа.

При решении граничных задач кинетической теории газов возникает необходимость определения граничных условий. Обычно используют условия Максвелла [1–5]

$$f^+=qf^{(0)}-(1-q)f^-,\qquad f^{(0)}=n\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}\exp\left\{-\frac{mv^2}{2kT}\right\} \tag{1}$$

где f^- и f^+ – функции распределения падающих и отраженных от поверхности молекул; $f^{(0)}$ – равновесная максвелловская функция распределения. При этом полагается, что коэффициент аккомодации q не зависит от скорости падения молекул.

В настоящей работе предлагается метод решения граничных задач кинетической теории газов, позволяющий использовать граничные условия в наиболее общем виде [6]

$$f^+=\Omega f^- \tag{2}$$

$$\Omega f^-=-\int\limits_{v_n'<0}\frac{v_n'}{v_n}R(\mathbf{v},\mathbf{v}')f(\mathbf{v}')d\mathbf{v}'$$

где $R(\mathbf{v},\mathbf{v}')$ – вероятность того, что молекула со скоростью $\mathbf{v}'$ в результате отражения от поверхности приобретет скорость $\mathbf{v}$. Вычисления проводятся на примере задач о тепловом и изотермическом скольжении простого газа.

Рассмотрим газ, находящийся над твердой плоской стенкой в поле тангенциального к ней градиента температуры, при условии, что касательная компонента скорости газа равномерно возрастает с удалением от стенки и совпадает по направлению с grad T. Выберем декартову систему координат с началом на поверхности стенки, осью x, направленной по нормали к стенке, осью y – вдоль поверхности в направлении grad T.

Поведение газа описывается функцией распределения молекул газа по скоростям, которая определяется из уравнения Больцмана [6]

$$\mathbf{v}(\nabla)f=-I(f) \tag{3}$$

$$I(f)=\int(ff_1-f'f_1')gb\,db\,d\varepsilon\,d\mathbf{v}_1,\qquad \mathbf{g}=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}$$

где $I(f)$ – интеграл столкновений; b – прицельный параметр столкновения молекул со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}$; ε – азимутальный угол столкновения.

Если изменения массовой скорости газа $\mathbf{u}$ и температуры T малы на длине свободного пробега λ, то функцию распределения можно представить в виде

$$f^{\pm}=f^{(0)}\left[1+2c_yG_y+2\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}\frac{\partial u_y}{\partial x}x+\psi+\varphi^{\pm}\right] \tag{4}$$

$$\psi=-A\left(\frac{5}{2}-c^2\right)\frac{\partial \ln T}{\partial y}-Bc_xc_y\frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$A=-3\mu\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}, \quad B=4\lambda\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}$$

$$\mathbf{c}=\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}\mathbf{v}, \quad \mathbf{G}=\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}\mathbf{u}$$

где m — масса молекул газа; n — число молекул в единице объема; μ — коэффициент кинематической вязкости газа; k — постоянная Больцмана.

Метод полупространственных моментов [1—3] приводит к следующему выражению для $\varphi^{\pm}$:

$$\varphi^{\pm}=\frac{1}{2}(a_0{}^{+}+a_0{}^{-})c_y+\frac{1}{2}(a_0{}^{+}-a_0{}^{-})c_y\operatorname{sign}c_x+$$
$$+\frac{1}{2}(a_1{}^{+}+a_1{}^{-})c_xc_y+\frac{1}{2}(a_1{}^{+}-a_1{}^{-})c_xc_y\operatorname{sign}c_x \tag{5}$$

$$a_i{}^{\pm}=(\beta_i{}^{\pm}e^{-\alpha x})\,\mathrm{const}$$

Для молекул, взаимодействующих как твердые сферы, $\alpha=2{,}2015$; $\beta_0{}^{-}=0{,}2385$; $\beta_1{}^{+}=-0{,}9843$; $\beta_1{}^{-}=0{,}1250$ [3].

Для однозначного определения функции распределения воспользуемся условием (2). Поскольку функция распределения ищется моментным способом, то и граничное условие тоже представим в моментной форме. Обратим внимание на то, что условие (2) можно ввести непосредственно в уравнение Больцмана (3), записывая последнее в виде

$$v_x\frac{\partial f}{\partial x}=I(f)+\delta(x)\frac{1}{2}\left[(1+\operatorname{sign}c_x)v_x\Omega f^{+}+(1-\operatorname{sign}c_x)v_xf^{-}\right] \tag{6}$$

$$\delta(x)=1 \quad (x=0), \qquad \delta(x)=0 \quad (x\neq 0)$$

Действительно, интегрируя (6) по x в интервале от 0 до ε при $\varepsilon\to 0$, получим

$$\int_0^{\varepsilon\to 0} v_x\frac{\partial f}{\partial x}dx=v_xf=\begin{cases} v_x\Omega f^{-}, & v_x>0\\ v_xf^{-}, & v_x<0\end{cases}$$

Отсюда следует, что для получения моментных граничных условий необходимо вычислять моменты не от уравнения (2), а от уравнения

$$v_xf^{+}=v_x\Omega f^{-} \tag{7}$$

Умножая (7) последовательно на $(m/2kT)v_yd\mathbf{v}$ и $(m/2kT)^{3/2}v_xv_yd\mathbf{v}$ и интегрируя по положительному полупространству скоростей, получим моментные граничные условия

$$\int_{c_x>0} c_xc_yf^{+}\,d\mathbf{v}=\int_{c_x>0} c_xc_y\Omega f^{-}\,d\mathbf{v}, \qquad \int_{c_x>0} c_x^2c_yf^{+}\,d\mathbf{v}=\int_{c_x>0} c_x^2c_y\Omega f^{-}\,d\mathbf{v} \tag{8}$$

Подставляя функцию распределения (5) в условия (8), вычислим скорость скольжения

$$u=K_{sl}\lambda\frac{\partial u}{\partial x}+K_{Tsl}\mu\frac{\partial \ln T}{\partial y} \tag{9}$$

$$K_{Sl}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{I_2N_2-I_5N_1}{I_1N_2-I_4N_1},\qquad K_{TSl}=\frac{3}{2}\frac{I_6N_1-I_3N_2}{I_1N_2-I_4N_1}$$

$$I_1=1-\{c_xc_y,\, c_y\},\qquad I_2=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\{c_xc_y,\, c_xc_y\}$$

$$I_3=\frac{1}{2}-\left\{c_xc_y,\, c_y\left(\frac{5}{2}-c^2\right)\right\},\qquad I_4=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\{c_x^2c_y,\, c_y\}$$

$$I_5=1-\{c_x^2c_y,\, c_xc_y\},\qquad I_6=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{c_x^2c_y,\, c_y\left(\frac{5}{2}-c^2\right)\right\}$$

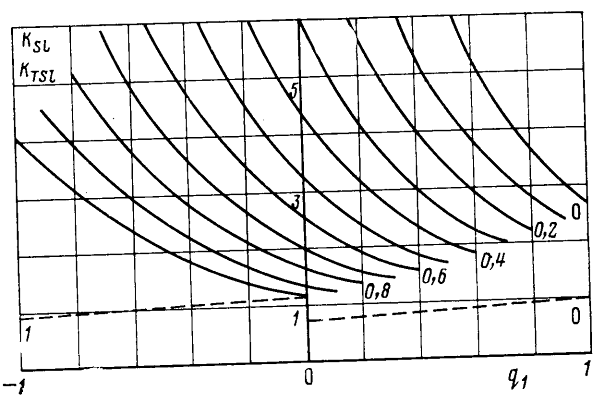
$$N_1=-1-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\beta_1^{+}+\beta_0^{-}\{c_xc_y,\, c_y\}+\beta_1^{-}\{c_xc_y,\, c_xc_y\}$$

$$N_2=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\beta_1^{+}+\beta_0^{-}\{c_x^2c_y,\, c_y\}+\beta_1^{-}\{c_x^2c_y,\, c_xc_y\}$$

$$\{A,B\}=\frac{4}{\pi}\int\limits_{c_x>0}\exp(-c^2)A\Omega B\,d\mathbf{c}$$

где K_{Sl}, K_{TSl} — коэффициенты изотермического и теплового скольжения соответственно.

Ядро рассеяния $R(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ зависит от закона взаимодействия атомов газа и поверхности, температуры и характера обработки поверхности. Учитывая, что в настоящее время нет достаточно надежных сведений о характере взаимодействия газа с поверхностью, рассмотрим в качестве примера обобщенное граничное условие Максвелла



Фиг. 1

$$c_xf^{+}=c_xq(\theta)f^{(0)}+c_x[1-q(\theta)]f^{-}\tag{10}$$

где θ — угол падения молекул на стенку.

Разложим $q(\theta)$ в ряд Фурье (члены с $\sin n\theta$ отсутствуют по соображениям симметрии)

$$q(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n\cos n\theta\tag{11}$$

Ограничиваясь двумя первыми членами разложения, получим

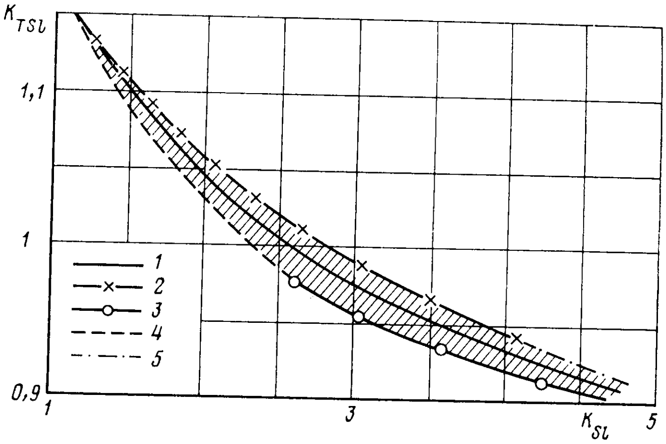
$$c_x f^+ = c_x[q_0+q_1\cos\theta]f^{(0)}+c_x[1-q_0-q_1\cos\theta]f^- \tag{12}$$

Из физических соображений следует, что q_0 изменяется в интервале от 0 до 1, а q_1 — в интервале от $-q_0$ до $1-q_0$.

После несложных вычислений получим

$$I_2N_2-I_4N_1=0{,}1844q_0+0{,}0268q_0^2+0{,}0983q_1+$$
$$+0{,}0074q_1^2+0{,}0297q_1q_2$$
$$I_2N_2-I_5N_1=0{,}3268-0{,}0610q_0-0{,}0512q_0^2-$$
$$-0{,}0684q_1-0{,}0141q_1^2-0{,}0566q_0q_1$$
$$I_6N_1-I_3N_2=0{,}0922q_0+0{,}0700q_0^2+0{,}0759q_0q_1+0{,}0492q_1$$

На фиг. 1 представлены графики зависимости коэффициентов изотермического (сплошная линия) и теплового (штриховая линия) скольжения от q_1 при фиксированных значениях q_0.



Фиг. 2

Следует отметить, что использование граничного условия (12) не приводит к однозначной связи коэффициентов теплового и изотермического скольжения, которая имеет место при использовании максвелловского граничного условия (1). На фиг. 2 заштрихована область, в которой лежат значения коэффициентов скольжения, допускаемые модельным граничным условием (12): кривая *1* — значения K_{Sl} и K_{TSl}, вычисленные при $q_0=0-1$, $q=0$; *2* — $q_0=1$, $q_1=-1-0$; *3* — $q_0=0$, $q_1=0-1$; *4* — $q_0+q_1=1$; *5* — $q_0+q_1=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Maxwell J. C.* The scientific papers. N. Y.: Dover, 1965, v. 1, 607 p.; v. 2, 806 p.
2. *Derjaguin B. V., Yalamov Yu. I.* The theory of thermophoresis and diffusiophoresis of aerosol particles and their experimental testing.— In: Topics in Current Aerosol Research. Pt. 2. Oxford a. o.: Pergamon Press, 1972, p. 1–200.
3. *Ивченко И. Н., Яламов Ю. И.* Кинетическая теория течения газа, находящегося над твердой стенкой в поле градиента скорости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 6, с. 139–143.
4. *Ивченко И. Н., Яламов Ю. И.* Тепловое скольжение неоднородно нагретого газа вдоль твердой плоской поверхности.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 6, с. 59–66.
5. *Поддоскин А. Б., Юшканов А. А., Яламов Ю. И.* Теория термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц.— Журн. техн. физики, 1982, т. 52, № 11, с. 2253–2261.
6. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.VII.1985