

УДК 533.6.011:537.84

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЦ НА ДВУМЕРНЫЕ ЗВУКОВЫЕ ИМПУЛЬСЫ В ПРОВОДЯЩЕМ ГАЗЕ

ДОБРЫДНЕВ Б. В., РУТКЕВИЧ И. М.

Теоретические исследования влияния нелокальных объемных электромагнитных воздействий на эволюцию газодинамических возмущений в слабоионизированной плазме проводились в ряде работ последних лет [1–6]. В [1] рассматривалось влияние дальнего действия на развитие одномерных звуковых колебаний, возбуждаемых локализованным начальным возмущением в ограниченном объеме проводящего газа в присутствии магнитного поля. В [2] получено решение задачи о гидравлическом ударе в канале с непроводящими стенками. Взаимодействия одномерных возмущений с внешней электрической цепью при сверхзвуковых течениях плазмы в каналах исследовались аналитически в [3, 4] и численно в [5, 6]. Вместе с тем до последнего времени не было исследовано влияние нелокального характера амперовых сил на динамику неоднородных звуковых импульсов, создаваемых при $t=0$ в произвольно малой области проводящего газа и испытывающих в дальнейшем отражения от границ. Рассмотрение таких импульсов представляется существенным для теории акустических процессов в каналах и разработки методов диагностики низкотемпературной плазмы.

В данной статье рассматривается эволюция двумерных звуковых импульсов, распространяющихся в проводящем подпространстве поперек внешнего магнитного поля. Рассмотрены случаи диэлектрической и идеально проводящей границ. Показано, что новые по сравнению с классической акустикой особенности структуры возмущений возникают сразу после достижения стенки цилиндрическим звуковым фронтом.

1. Малые нестационарные возмущения, наложенные на стационарное состояние слабо проводящего газа, описываются уравнениями, математическая структура которых обсуждалась в [1, 7]. Эти уравнения включают в себя газодинамическую подсистему гиперболического типа относительно возмущений скорости и термодинамических параметров, образующих вектор \mathbf{f} , и уравнение для возмущения электрического потенциала ϕ' , которое не содержит производных по времени и эллиплично по пространственным переменным. Последнее обстоятельство ответственно за существование решений, описывающих эффекты дальнего действия — точечное начальное возмущение \mathbf{f}_0 при $t > 0$ может стать отличным от нуля вне классической области влияния, т. е. перед звуковым фронтом, расходящимся от источника возмущения. Для возникновения такой ситуации необходимо, чтобы возмущение электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla\phi'$ имело нелокальный характер уже при $t = +0$.

В случае безграничной среды единственной причиной возникновения нелокального возмущения поля \mathbf{E}' является формирование объемного заряда ρ_e' за счет начального возмущения ЭДС индукции или компонент тензора проводимости. Появление возмущения ρ_e' за счет возмущений проводимости и параметра Холла в рамках линейной теории возможно только в том случае, когда невозмущенная плотность тока \mathbf{j} отлична от нуля. В случае $\mathbf{j} = 0$, который рассматривается ниже, величина ρ_e' возникает только за счет возмущения ЭДС индукции $\mathbf{V}' \times \mathbf{B}$ и определяется

Формулой

$$\rho_e' = -\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi' = -\varepsilon_0 \left[\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{V}' + \beta B \left(\frac{\partial V_x'}{\partial x} + \frac{\partial V_y'}{\partial y} \right) \right] \quad (1.1)$$

Эта формула получена из линеаризованного закона Ома и уравнения непрерывности для возмущения плотности тока $\operatorname{div} \mathbf{j}' = 0$. При этом предполагалось, что магнитная индукция $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$ и параметр Холла β постоянны. Необходимым условием для возникновения дальнего действия является отличие от нуля правой части (1.1). Однако этого условия недостаточно; поскольку даже при $\rho_e' \neq 0$ в безграничной среде возмущения могут оказаться локализованными внутри классической области влияния. Дивергенция и ротор амперовой силы $\mathbf{F}' = \mathbf{j}' \times \mathbf{B}$ определяются формулами

$$\operatorname{div} \mathbf{F}' = -\sigma B \left(\frac{\partial V_x'}{\partial x} + \frac{\partial V_y'}{\partial y} \right) - B \beta \frac{\partial j_z'}{\partial z}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{F}' = B \frac{\partial \mathbf{j}'}{\partial z} \quad (1.2)$$

Поскольку для двумерных возмущений ($\partial/\partial z = 0$) сила \mathbf{F}' потенциальна, то завихренность $\operatorname{rot} \mathbf{V}'$ сохраняется в движущейся частице газа и определяется начальной завихренностью $\operatorname{rot} \mathbf{V}'_0$ при $t=0$. Такая ситуация будет иметь место, если начальное газодинамическое возмущение \mathbf{f}_0 не зависит от z .

Представим произвольное двумерное ($\partial/\partial z = 0$) возмущение скорости в виде суммы потенциальной $\mathbf{V}^{(1)}$ и вихревой $\mathbf{V}^{(2)}$ составляющих так, что

$$\mathbf{V}^{(1)} = \nabla \Phi(x, y, t), \quad \mathbf{V}^{(2)} = \operatorname{rot} [\Psi(x, y, t) \mathbf{e}_z] \quad (1.3)$$

Здесь Φ и $\Psi \mathbf{e}_z$ — скалярный и векторный потенциалы возмущения скорости. Из (1.1) и (1.3) получим следующее уравнение для возмущения электрического потенциала:

$$\rho_e' / \varepsilon_0 = -\nabla^2 \varphi' = \nabla^2 (B \Psi - \beta B \Phi) \quad (1.4)$$

Гармоническая во всей плоскости (x, y) функция $\chi = \varphi + B \Psi - \beta B \Phi$, удовлетворяющая условию $\nabla \chi \rightarrow 0$ при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, должна быть константой. Поэтому в отсутствие границ возмущение электрического поля определяется выражением

$$\mathbf{E}' = B \nabla (\Psi - \beta \Phi) \quad (1.5)$$

Из (1.3), (1.5), линеаризованного закона Ома и уравнения $\operatorname{div} \mathbf{j}' = 0$ найдем выражение для возмущения плотности тока \mathbf{j}'

$$\mathbf{j}' = \operatorname{rot}(g \mathbf{e}_z), \quad g = \sigma B \Phi \quad (1.6)$$

где g — функция электрического тока. Вторая формула (1.6) верна в отсутствие границ, так как при ее выводе использовалось условие $\mathbf{j}' \rightarrow 0$ при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$. Из линеаризованных уравнений неразрывности и движения с учетом (1.3) и (1.6) получим уравнения для возмущения плотности газа ρ' и функций Φ, Ψ

$$\frac{d\rho'}{dt} + \rho \nabla^2 \Phi = 0, \quad \rho \frac{d\Phi}{dt} + a^2 \rho' + Bg = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{d\nabla^2 \Psi}{dt} = 0 \quad \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (1.8)$$

Здесь a — невозмущенная скорость звука, u — невозмущенная скорость поступательного потока, которая считается направленной вдоль оси x . Поскольку в основном состоянии $\mathbf{j} = 0$, то при $u \neq 0$ в плазме имеется невозмущенное однородное электрическое поле $\mathbf{E} = u B \mathbf{e}_y$.

Из вида системы (1.7) при $g = \sigma B \Phi$ следует, что при финитных начальных условиях для Φ и ρ' (т. е. равных нулю вне некоторой конечной об-

ласти Ω) величины $V^{(1)}$ и ρ' будут равны нулю вне классической области влияния начальных данных. Границей этой области будет огибающая элементарных звуковых фронтов, излучаемых частицами газа, которые при $t=0$ находились на границе области Ω . Если начальное распределение Ψ_0 также финитно, то из (1.8) следует, что область локализации вихревых возмущений $V^{(2)} = \text{rot}(\Psi e_z)$ конечна и в момент времени t состоит из частиц, находившихся внутри Ω при $t=0$.

Из проведенного рассмотрения и формул (1.5), (1.6) следует, что в однородной безграничной плазме двумерные возмущения в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, не приводят к эффектам дальнего действия. Хотя локализованные газодинамические возмущения с $\partial/\partial z=0$ вызывают разделение зарядов, электрическое поле этих зарядов, определяемое формулой (1.5), оказывается локализованным внутри классической области влияния. Для трехмерных возмущений или двумерных возмущений, меняющихся в направлении z , а также в случае неоднородной плазмы этот вывод несправедлив. Для двумерных возмущений в однородной плазме при $\partial/\partial z=0$ эффекты дальнего действия проявляются благодаря наличию границ. Именно эта ситуация исследуется ниже.

2. Рассмотрим двумерные акустические возмущения ($V' \equiv V^{(1)}$) в однородной плазме, занимающей область D с границей Γ . В ограниченной области локальное выражение функции электрического тока g через акустический потенциал Φ (вторая формула (1.6)) уже не имеет места. Решение дифференциального уравнения относительно g

$$\nabla^2 g = \sigma B \nabla^2 \Phi \quad (2.1)$$

в общем случае имеет вид $g = \sigma B \Phi + H$, где H — гармоническая функция, вид которой определяется граничными условиями на Γ .

Выбирая в качестве единиц координаты времени, потенциала скоростей Φ и функции H величины l , l/a , al и $\rho a^2/B$ соответственно, где l — характерный пространственный масштаб задачи, приходим к следующей системе уравнений (в безразмерной форме):

$$\frac{D^2 \Phi}{Dt^2} - \nabla^2 \Phi + \frac{D}{Dt} (N\Phi + H) = 0, \quad \nabla^2 H = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x}, \quad M = \frac{u}{a}, \quad N = \frac{\sigma B^2 l}{\rho a} \quad (2.3)$$

Здесь D/Dt — безразмерный оператор полной производной по времени, M — невозмущенное число Маха, N — параметр МГД-взаимодействия. Общая постановка начально-краевой задачи для системы (2.2) имеет следующий вид:

$$\Phi(x, y, 0) = \Phi_0(x, y), \quad \left(\frac{D\Phi}{Dt} + H \right)_{t=0} = - \frac{\rho'(x, y, 0)}{\rho} - N\Phi_0 \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{\Gamma} = 0, \quad \left\{ \frac{\partial (N\Phi + H)}{\partial \tau} \right\}_{\Gamma_1} = 0, \quad \left\{ \frac{\partial H}{\partial n} - \beta \frac{\partial}{\partial \tau} (N\Phi + H) \right\}_{\Gamma_2} = 0 \quad (2.5)$$

Здесь Γ — граница области, занятой проводящим газом, Γ_1 и Γ_2 — непроводящий и идеально проводящий участки этой границы соответственно, $\partial/\partial \tau$ и $\partial/\partial n$ — операторы дифференцирования в направлении касательной τ и нормали n к Γ , причем единичные векторы этих направлений выбраны так, что $\tau \times n = e_z$. Первое соотношение (2.5) — условие непротекания для возмущений скорости на стенке, второе и третье соотношения (2.5) выражают отсутствие возмущений нормальной составляющей плотности тока на непроводящей стенке и тангенциального электрического поля на электродной стенке.

Из формулировки начально-краевой задачи (2.2)–(2.5) следует, что

эффекты дальнего действия не проявляются при $H \equiv \text{const}$. Такая ситуация имеет место для идеально проводящей границы, если $\beta=0$. В случае диэлектрической стенки (при любом β), а также для идеально проводящей стенки при $\beta \neq 0$, нетривиальное распределение H возникает при $t > t_1$, где t_1 — момент времени, в который классический звуковой фронт впервые достигает стенки.

3. Найдем решение, описывающее «элементарный» двумерный акустический импульс, возбуждаемый в полупространстве $y > 0$ над диэлектрической или металлической стенкой. Примем, что начальное возмущение потенциала скоростей равно нулю, а начальное возмущение плотности газа имеет вид дельта-функции, локализованной в точке $x=0, y=1$. В случае диэлектрической стенки необходимо решить следующую начально-краевую задачу для системы уравнений (2.2):

$$\Phi_0=0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + H \right)_0 = -q \delta(x) \delta(y-1) \quad (3.1)$$

$$y=0: \frac{\partial \Phi}{\partial y}=0, \quad N\Phi+H=0; \quad x^2+y^2 \rightarrow \infty: \nabla \Phi \rightarrow 0, \quad \nabla H \rightarrow 0$$

В дальнейшем будем предполагать, что в невозмущенном состоянии газ неподвижен ($u=0$). Для однородной плазмы с нулевым невозмущенным током это допущение не ограничивает общности рассмотрения, так как в случае точечного начального возмущения в поступательном потоке решение для $u \neq 0$ получается из решения задачи для покоящегося газа заменой x на $x-Mt$.

Решение задачи (2.2), (3.1) можно получить с помощью преобразования Фурье по координате x и преобразования Лапласа по времени, полагая

$$\{\Phi^*, H^*\} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\Phi, H\} e^{-ikx-st} dx dt \quad (3.2)$$

$$\{\Phi, H\} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} i} \int_{s_0-i\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\Phi^*, H^*\} e^{ikx+st} dk ds$$

Здесь Φ^* и H^* — трансформанты функций Φ и H , а прямая $\text{Re } s = s_0$ проходит, как обычно, правее всех особенностей подынтегрального выражения на комплексной плоскости s . Функции Φ^* и H^* имеют вид

$$\Phi^* = \Phi_l^* + \Phi_n^* \quad (3.3)$$

$$H^* = qN(N+s) [\sqrt{2\pi}(N|k|+hs)]^{-1} e^{-(h+|k|v)}, \quad h = \sqrt{k^2+s^2+N_s}$$

$$\Phi_l^* = -q(2h\sqrt{2\pi})^{-1} \{e^{-h|v-1|} + e^{-h(v+1)}\}, \quad (3.4)$$

$$\Phi_n^* = qN[\sqrt{2\pi}(N|k|+hs)]^{-1} \{ |k| e^{-h(v+1)} - h e^{-(|k|v+h)} \}$$

Здесь Φ_l^* и Φ_n^* — трансформанты локальной Φ_l и нелокальной Φ_n составляющих потенциала скоростей. Функция Φ_l является решением первого уравнения (2.2) при условии $H \equiv 0$. Это решение совпадает с полным акустическим потенциалом в случае идеально проводящей стенки, если $\beta=0$. Выражение для Φ_l имеет вид

$$\Phi_l = -\frac{q}{2\pi} \left\{ \frac{\text{ch}(\frac{1}{2}N\sqrt{R_+}) \eta(R_+)}{\sqrt{R_+}} + \frac{\text{ch}(\frac{1}{2}N\sqrt{R_-}) \eta(R_-)}{\sqrt{R_-}} \right\} e^{-\frac{1}{2}Nt} \quad (3.5)$$

$$R_{\pm} = t^2 - x^2 - (y \mp 1)^2$$

Здесь η — единичная функция Хевисайда. В отсутствие МГД-взаимодействия ($N=0$) из (3.2)–(3.4) получим

$$\Phi_{N=0} \equiv (\Phi_l)_{N=0} = -\left(\frac{q}{2\pi} \right) \left[\frac{\eta(R_+)}{\sqrt{R_+}} + \frac{\eta(R_-)}{\sqrt{R_-}} \right] \quad (3.6)$$

Решение (3.6) задачи об отражении от плоской границы цилиндрического импульса, описываемого обычным волновым уравнением, неоднократно рассматривалось в акустике и электродинамике (см., например, [8]). В акустике непроводящего газа этому решению отвечает классическая картина наложения падающего (первое слагаемое в (3.6)) и отраженного от жесткой стенки цилиндрического импульса (второе слагаемое). Область, заполненная возмущениями, представляет собой круговой сегмент, ограниченный фронтом падающей волны ($R_+=0$) и стенкой. Суперпозиция падающей и отраженной волн внутри сегмента, ограниченного отраженным фронтом ($R_-=0$) и стенкой, обеспечивает выполнение граничного условия $V_y'=0$. Окружности, изображающие падающий и отраженный фронты в момент времени $t>1$, имеют одинаковые радиусы, а их центры расположены симметрично относительно прямой $y=0$.

Распределения скорости и возмущения плотности, отвечающие решению (3.6), на поверхностях падающего и отраженного фронтов являются сингулярными и представляют собой обобщенные функции. При $q>0$ фронты падающей и отраженной волн представляют собой импульсы сжатия бесконечной интенсивности. Непосредственно за этими фронтами имеет место разрежение газа, которое существует бесконечно долгое время. Последний эффект связан с известными свойствами решений задачи Коши для волнового уравнения в четномерном пространстве (нарушение принципа Гюйгенса [9]). Радиальное возмущение скорости имеет бесконечную интенсивность на фронте каждой из волн и при $q>0$ направлено по движению фронта. В области разрежения (за фронтом) частицы газа движутся против направления распространения волны.

Эффекты дальнего действия описываются нелокальной составляющей акустического потенциала Φ_n , трансформанта которой Φ_n^* определяется второй формулой (3.4). Распределения Φ_n и H становятся отличными от нуля только при $t>1$, т. е. после достижения стенки фронтом падающей волны. При произвольных значениях $N(t-1)$ обратные преобразования Фурье – Лапласа не выражаются через табулированные функции. В связи с этим ограничимся рассмотрением случая $N(t-1)\ll 1$, для которого можно найти асимптотический вид решения с помощью разложения по малому параметру. Анализ этого случая позволяет проследить начальный этап развития мелокальных газодинамических возмущений. Использование решения задачи об эволюции локализованного начального возмущения в полупространстве для получения качественной картины развития аналогичного возмущения в МГД-канале допустимо лишь для безразмерных времен $t<2d/l$, где $2d$ – расстояние между противоположными стенками, а $l\leq d$ – расстояние от источника до ближайшей из стенок. Условие $N(t-1)\ll 1$ будет выполнено, если $N_d=\sigma B^2 d/\rho a\ll 1$. Малые значения параметра N_d реализуются во многих практически интересных случаях течений слабоионизованной плазмы в каналах. В линейном приближении по N для H и Φ_n получим следующие выражения:

$$H(qN/\pi)(r_+/2)^{1/2}w^{-1}\eta(t-1), \quad \Phi_n = \Phi_c + \Phi_i$$

$$w = [(t^2-1+y^2-x^2)^2+4x^2y^2]^{1/2}, \quad r_+ = w + t^2 - 1 + y^2 - x^2 \quad (3.7)$$

$$\Phi_c = \frac{qN}{2\pi} \left\{ 2 \ln \left[\frac{|x|\sqrt{-R_-} + t(y+1)}{p} \right] \eta(-R_-)\eta(t-y-1) + \ln \left(\frac{t^2-x^2}{p} \right) \eta(R_-) \right\} \quad (3.8)$$

$$\Phi_i = -\frac{qN}{2\pi} \ln \left(\frac{t^2+t\sqrt{2r_+}+w}{p} \right) \eta(t-1), \quad p = x^2 + (y+1)^2$$

Здесь Φ_c и Φ_i – составляющие нелокального потенциала скоростей Φ_n , описывающие сжимаемое и несжимаемое движения соответственно.

Приведем также выражения для H , Φ_c и Φ_i , отвечающие задаче о звуковом импульсе, возбуждаемом над идеально проводящей стенкой

$$H = \frac{qN\beta}{\sqrt{2}\pi(1+\beta^2)w} (\beta\sqrt{r_+} - \sqrt{r_-} \text{sign } x)\eta(t-1) \quad (3.9)$$

$$\Phi_c = \frac{qN\beta}{2\pi(1+\beta^2)} \left\{ 2\beta \ln \left[\frac{|x|\sqrt{-R_-} + t(y+1)}{p} \right] \eta(-R_-)\eta(t-y-1) + \left[\beta \ln \left(\frac{t^2-x^2}{p} \right) - 2 \arctg \left(\frac{x\sqrt{R_-}}{t(y+1)} \right) \right] \eta(R_-) \right\}$$

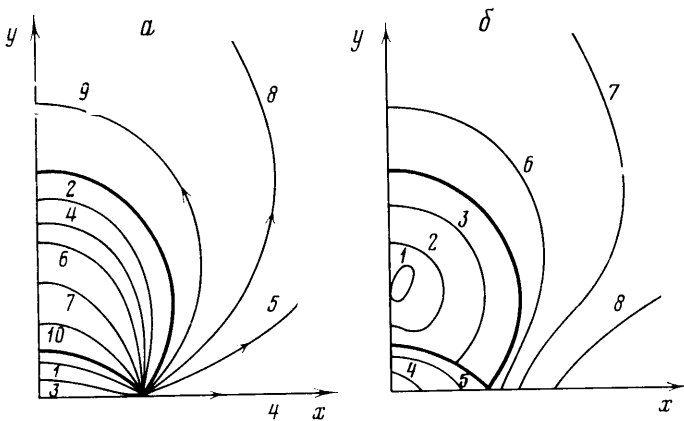
$$\Phi_i = -\frac{qN\beta}{2\pi(1+\beta^2)} \left\{ \beta \ln \left(\frac{t^2+t\sqrt{2r_+}+w}{p} \right) + \right.$$

$$+ \arcsin \left(\frac{2x}{m} \right) - \arcsin \left(\frac{t\sqrt{2r_-}}{m} \right) \operatorname{sign} x \} \eta(t-1)$$

$$r_- = w - (t^2 - 1 + y^2 - x^2), \quad m = [(1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2]^{1/2}$$

Формулы (3.9), как и (3.7), (3.8), получены в линейном приближении по N .

4. Рассмотрим основные качественные свойства полученных решений. Влияние нелокальных эффектов на структуру отраженного импульса определяется функцией H и нелокальными компонентами потенциала скоростей. Знание распределений Φ и H позволяет найти все электро- и газодинамические возмущения. Для возмущений плотности газа, скорости, электрического поля, плотности тока и амперовой силы, нормиро-



Фиг. 1

ванных на величины ρ , a , aB , saB и saB^2 соответственно, получаются следующие выражения:

$$\rho' = - \left(\frac{\partial}{\partial t} + N \right) (\Phi_i + \Phi_e), \quad \mathbf{V}' = \nabla \Phi, \quad \Phi = \Phi_i + \Phi_e + \Phi_s \quad (4.1)$$

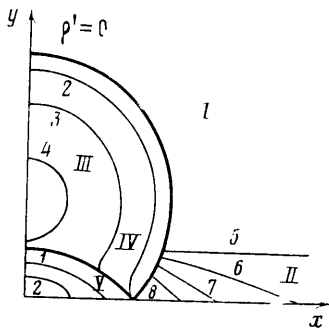
$$(4.2)$$

$$\mathbf{E}' = -\beta \nabla \left(\Phi + \frac{H}{N} \right) + \nabla H \times \frac{\mathbf{e}_z}{N}, \quad \mathbf{j}' = \nabla \left(\Phi + \frac{H}{N} \right) \times \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{F}' = -\nabla \left(\Phi + \frac{H}{N} \right)$$

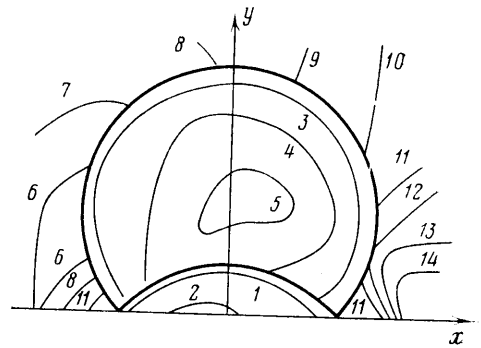
Эти формулы справедливы для двумерных возмущений в однородной ограниченной плазме при любых N и произвольной форме границы. При этом функция H связана с несжимаемой составляющей потенциала Φ_i соотношением $\partial \Phi_i / \partial t + N \Phi_i = -H$.

В случае диэлектрической стенки возмущения газодинамических параметров и амперовой силы не зависят от параметра Холла. Величина β влияет только на распределения объемного заряда и электрического поля. При $0 < t < 1$ по газу распространяется цилиндрический звуковой импульс, который описывается первым слагаемым в (3.5). Вдоль фронта течет сингулярный азимутальный ток, а за фронтом — азимутальные токи противоположного направления. При $\beta \neq 0$ имеется радиальное возмущение \mathbf{E}' , локализованное в той же области, что и газодинамические возмущения ($R_+ \geq 0$).

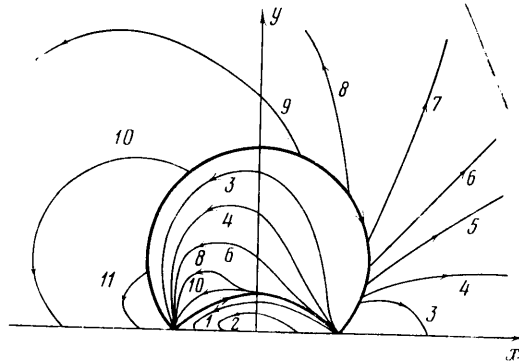
При $t > 1$ включаются эффекты дальнего действия — электрические токи и возмущения скорости заполняют все плазменное полупространство. На фиг. 1 показаны линии электрического тока (1, a) и линии уровня безразмерного потенциала скоростей (1, б) над диэлектрической стенкой в момент времени $t = 1,5$ при $N = 0,1$ и $q = 2\pi$. Функция тока g нормирована



Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3

на величину $\sigma \Delta V$. Утолщенными линиями на этих рисунках показаны границы классических звуковых фронтов $R_+ = 0$ и $R_- = 0$. Кривым 1–10 на фиг. 1, а отвечают значения безразмерной функции тока: $-0,5; -0,4; -0,2; 0; 0,1; 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8$. Кривым 1–8 на фиг. 1, б отвечают значения $\Phi = -0,75; -0,8; -1; -2; -3; -0,03; -0,02; -0,01$. Точки пересечения падающего и отраженного фронтов друг с другом и со стенкой $y=0, x = \pm(t^2-1)^{1/2}$ — узловые особые точки векторного поля \mathbf{j}' .

Суммарный баланс токов в узловых точках равен нулю благодаря тому, что токи, втекающие в узел из областей регулярности, компенсируются противоположно направленными сингулярными токами, текущими вдоль фронтов $R_+ = 0, R_- = 0$. Анализ решения показывает, что распределение электрического потенциала вдоль диэлектрической стенки $\varphi(x, 0, t)$ при $t > 1$ отлично от нуля только вне отрезка, соединяющего особые точки, т. е. при $|x| > (t^2-1)^{1/2}$. Поэтому временная зависимость φ в произвольной точке стенки $P = \{x = \Delta, y = 0\}$ отлична от нуля только на конечном интервале времени $1 < t < (1 + \Delta^2)^{1/2}$. Данный пример показывает, что ход осциллограммы потенциала $\varphi_w(t)$, измеряемого зондом на диэлектрической стенке, может принципиально отличаться от поведения газодинамических возмущений. В рассмотренной ситуации датчик регистрирует нарастание $\varphi_w(t)$ от момента достижения стенки падающим фронтом в точке $x = y = 0$ до момента его прихода в точку P . При $t > (1 + \Delta^2)^{1/2}$ точка P попадает на эквипотенциаль, соединяющую особые точки. В результате сигнал $\varphi_w(t)$ обрывается, хотя нестационарные процессы в плазме продолжают.

Качественное поведение возмущений плотности (или давления) имеет следующую особенность. При $t > 1$ возмущения плотности заполняют не все плазменное полупространство, а лишь его часть G

$$G: x^2 + (y-1)^2 < t^2, \quad 0 < y < t-1 \quad (4.3)$$

Область G представляет собой объединение классической области влияния (сегмента, ограниченного стенкой и падающим фронтом) и слоя бесконечной протяженности, ограниченного снизу стенкой, а сверху — плоским фронтом, уходящим от стенки со скоростью звука. Такой же вид имеет область G и в случае электродной стенки. На фиг. 2 показаны линии постоянных значений безразмерного возмущения плотности над идеально проводящей стенкой в момент времени $t=1,5$ при $N=0,3$, $\beta=1$, $q=2\pi$. Кривым 1—8 на этой фигуре отвечают следующие значения ρ' : -3 ; -1 ; $-0,5$; 0 ; $0,02$; $0,05$; $0,1$.

Области I—V, показанные на фиг. 2, характеризуются различным поведением возмущений ρ' . В области I возмущения плотности отсутствуют. В области II возмущения ρ' существуют исключительно за счет эффекта дальнего действия. В случае $q>0$ в этой области возникает волна сжатия, фронт которой является плоским и распространяется со скоростью звука от стенки внутрь плазмы. Влияние стенки не сказывается на поведении возмущений в области III ($R_+>0$, $y>t-1$), где распределение ρ' обладает центральной симметрией. В области IV ($R_+>0$, $R_-<0$, $0<y<t-1$) имеет место суперпозиция возмущения ρ' , которое могло бы существовать в безграничной плазме, с возмущением, обусловленным влиянием дальнего действия. В областях II—IV распределение ρ' симметрично по координате x . Симметрия ρ' по x нарушается только в области V ($R_+>0$, $R_->0$, $y>0$), где имеет место суперпозиция возмущений плотности в падающей и отраженной цилиндрических волнах и отраженной волне с плоским фронтом, обусловленной влиянием дальнего действия. Аналогичная картина возмущений ρ' имеет место и в случае диэлектрической стенки с тем отличием, что распределение ρ' симметрично по x всюду, в том числе и в области V.

Рассмотренное поведение возмущений плотности, выражающееся в их мгновенном распространении вдоль границы при $t=1$ и формировании отраженной волны, движущейся со скоростью звука от границы, является общим свойством двумерных акустических импульсов в однородной ограниченной плазме. Легко показать, что двумерные возмущения ρ' удовлетворяют однородному уравнению гиперболического типа, которое в случае покоящейся невозмущенной плазмы имеет вид (в безразмерных переменных)

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \nabla^2 \rho' + N \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0 \quad (4.4)$$

В отличие от первого уравнения (2.2), которому удовлетворяет потенциал скоростей Φ , уравнение (4.4) не содержит функцию H . Это объясняется тем, что влияние амперовой силы на развитие возмущений ρ' в объеме определяется только ее дивергенцией, которая в случае двумерных возмущений пропорциональна локальной производной $\partial \rho' / \partial t$. Возмущения ρ' , описываемые однородным уравнением гиперболического типа, не могут иметь бесконечную скорость распространения внутри плазменного объема.

Механизм влияния дальнего действия на возмущения плотности заключается в следующем. В момент касания стенки фронтом падающего звукового импульса на стенке «мгновенно» (в газодинамическом временном масштабе) образуются поверхностные заряды, создающие электрическое поле во всем объеме плазмы. Тангенциальные электрические токи, возникающие сразу на всей границе, создают нормальную к границе амперову силу, которая мгновенно включает нормальный градиент давления на непроницаемой стенке. В результате вдоль всей границы сразу возбуждается отраженная волна давления, движущаяся внутрь плазмы с конечной скоростью. В отличие от возмущений плотности возмущения скорости при $t>1$ заполняют все плазменное полупространство. При этом в области I, где $\rho' \equiv 0$ (см. фиг. 2), осуществляется несжимаемое потенциальное течение газа. Характер этого течения над диэлектрической стенкой ясен из вида линий уровня Φ (фиг. 1, б).

Асимптотика несжимаемой составляющей потенциала Φ над диэлектрической стенкой при $y \rightarrow \infty$ такая же, как у потенциала диполя, ориентированного вдоль оси y . Характер возмущенного движения над электродной стенкой более сложен. В этом случае при $\beta \neq 0$ отсутствует симметрия по координате x у распределений плотности тока и поля скоростей. Линии электрического тока и линии уровня по-

тенциала скоростей над идеально проводящей стенкой показаны на фиг. 3 и 4 соответственно. В расчетах принято $N=0,3$, $\beta=1$, $q=2\pi$. Кривым 1–11 на фиг. 3 отвечают следующие значения безразмерной функции тока (нормированной на величину σaBl): -2 , -1 ; $-0,5$; $-0,2$; $-0,1$; 0 ; $0,1$; $0,2$; $0,3$; $0,5$; 1 . Кривым 1–14 на фиг. 4 отвечают значения безразмерного потенциала скоростей $\Phi=-3$; -2 ; $-1,5$; -1 ; $-0,8$; $-0,1$; $-0,08$; $-0,06$; $-0,04$; $-0,02$; 0 ; $0,02$; $0,04$; $0,06$.

В случае идеально проводящей стенки эффекты дальнего действия проявляются только при $\beta \neq 0$. Распределение тока и газодинамических параметров над электродной стенкой в предельном случае $\beta \rightarrow \infty$ становятся такими же, как в случае диэлектрической стенки. Это объясняется тем, что при $\beta \rightarrow \infty$ угол между векторами \mathbf{j}' и $\mathbf{E}_* = \mathbf{E}' + \mathbf{V}' \times \mathbf{V}$ стремится к $\pi/2$, а вектор \mathbf{E}_* на непроницаемой проводящей стенке направлен по нормали.

В заключение отметим, что при отражении двумерных звуковых импульсов от границ проводящего газа определяющую роль в возникновении нелокальных эффектов играет электрическое поле поверхностных зарядов, образующихся на границах.

Авторы благодарны участникам семинара Г. А. Любимова за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руткевич И. М. Влияние дальнего действия на возбуждение звука в проводящем газе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 1, с. 135–143.
2. Walker J. S. Solitary fluid transients in rectangular ducts with transverse magnetic fields.— Z. angew. Math. und Phys., 1978, v. 29, № 1, p. 35–53.
3. Rutkevich I. M. Appearance of free acoustic oscillations in supersonic flow of low-temperature plasma in a magnetic field.— In: 15-th Intern. conf. on phenomena in ionized gases, Minsk, 1981. Contributed papers. Pt I, p. 333–334.
4. Руткевич И. М. О спектре газодинамических возмущений и устойчивости сверхзвукового потока плазмы при джоулевом разогреве.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 6, с. 154–162.
5. Виноградова Г. Н., Панченко В. П. Влияние возмущений на устойчивость течения и характеристики фарадеевского МГД-генератора.— Теплофизика высоких температур, 1981, т. 19, № 2, с. 407–414.
6. Виноградова Г. Н., Губарев А. В., Лаптев С. А., Панченко В. П. О динамическом гистерезисе магнитогазодинамических течений в каналах.— Теплофизика высоких температур, 1983, т. 21, № 6, с. 1139–1144.
7. Руткевич И. М., Синкевич О. А. Волны и неустойчивости в низкотемпературной плазме.— Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. Механика жидкости и газа, 1981, т. 14, с. 127–204.
8. De Hoop A. T. Pulsed electromagnetic radiation from a line source in a two-media configuration.— Radio Sci., 1979, v. 14, № 3, p. 253–268.
9. Адамар Ж. Задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 351 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.XI.1985