

УДК 533.6.011

**ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНОГО КОНТУРА
КОНИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТЕЛА МИНИМАЛЬНОГО
СОПРОТИВЛЕНИЯ, ДВИЖУЩЕГОСЯ В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ**

БУНИМОВИЧ А. И., ЯКУНИНА Г. Е.

Исследования формы тел минимального сопротивления, движущихся в разреженном газе во всем диапазоне высот полета в настоящее время проводятся на основе использования моделей локального взаимодействия [1]. Соответствующие теоретические исследования для случая тел вращения опубликованы в [2, 3], для пространственных крыловых тел — в [4], подробные численные исследования приведены в [2, 5-7]. В настоящей работе проведено аналитическое исследование с целью определения оптимальной формы пространственных тел, обладающих минимальным сопротивлением в промежуточной области высот полета в разреженном газе.

1. Постановка задачи. В предположениях «гипотезы локальности» коэффициент сопротивления летящего тела может быть записан в форме [1]

$$c_F = \frac{1}{S_0} \int_{S^*} [(A_2 - B_1)(\mathbf{v}\mathbf{n})^3 + A_1(\mathbf{v}\mathbf{n})^2 + B_1(\mathbf{v}\mathbf{n})] dS$$

где A_1, A_2, B_1 — коэффициенты режима, зависящие от свойств среды, $\mathbf{v} = (\mathbf{u}/u)$ и \mathbf{n} — орты скорости и внешней нормали к поверхности тела соответственно. Интегрирование ведется по обращенной к потоку части поверхности тела S^* , где $(\mathbf{v}\mathbf{n}) \geq 0$. Воспользуемся цилиндрической системой координат (r, θ, z) . Рассмотрим класс пространственных тел, обладающих свойством гомотетии, уравнение поверхности которых зададим в виде

$$r = f(z)R(\theta) \tag{1.1}$$

Если L — длина тела, то в безразмерной форме уравнение (1.1) примет вид

$$r/L = \varphi(\xi)\rho(\theta), \quad \xi = z/L, \quad \rho(\theta) = R(\theta)/L, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1$$

Для площади миделя тела в безразмерной форме имеем выражение

$$\sigma = \frac{S}{L^2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta \tag{1.2}$$

Ограничимся рассмотрением тонких конусоидальных тел, для которых

$$(\rho\varphi')^2 \ll 1, \quad \varphi = \xi, \quad \varphi' = d\varphi/d\xi = 1$$

Тогда, вводя обозначения

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}, \quad \Phi(\rho, \rho') = (\rho^2 + \rho'^2)^{-1}, \quad \chi(\rho, \rho', \varphi') = \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2 + (\rho\varphi')^2}$$

и учитывая, что

$$(\mathbf{v}\mathbf{n}) = \rho\varphi'\chi^{-1}, \quad dS = \rho\varphi\chi d\xi d\theta$$

коэффициент c_F можно переписать в форме

$$c_F = I(\rho, \rho', \theta) = \frac{1}{2\sigma} \int_0^{2\pi} [(A_2 - B_1)\rho^6 \Phi + A_1 \rho^4 \Phi^{1/2} + B_1 \rho^2] d\theta \quad (1.3)$$

Следовательно, для нахождения формы поперечного контура тела минимального сопротивления нужно решить вариационную задачу для функционала $I(\rho, \rho', \theta)$ в классе кусочно-гладких функций $\rho(\theta)$ с изопериметрическим условием (1.2) и условиями замкнутости контура

$$\rho(0) = \rho(2\pi) = \rho_0$$

2. Общее решение. Вводя неопределенный множитель Лагранжа, запишем подынтегральную функцию функционала (1.3) в виде

$$F(\rho, \rho', \lambda) = (A_2 - B_1)\rho^6 \Phi + A_1 \rho^4 \Phi^{1/2} + (B_1 + \lambda)\rho^2$$

Для того чтобы контур был оптимальным, необходимо выполнение условия Лежандра ($F_{\rho'\rho'} = \partial^2 F / \partial \rho'^2$)

$$F_{\rho'\rho'} = 2(A_2 - B_1)\rho^6 (3\rho''^2 - \rho^2)\Phi^3 + A_1 \rho^4 (2\rho''^2 - \rho^2)\Phi^{5/2} \geq 0 \quad (2.1)$$

Если в (2.1) положить $\rho' = 0$, то получим

$$F_{\rho'\rho'} = -2(A_2 - B_1)\rho^2 - A_1 \rho < 0$$

так как всегда [8]

$$A_2 - B_1 \geq 0, \quad A_1 \geq 0$$

и не существует среды, для которой одновременно $A_2 = B_1$, $A_1 = 0$. Следовательно, для оптимального контура $\rho' \neq 0$, а значит, он имеет разрывы производной, так как в силу гладкости контура и условий (1.4) производная ρ' должна была бы обращаться в нуль по крайней мере в четырех точках.

В угловых точках оптимального контура при подходе слева и справа должны выполняться условия Веерштрасса — Эрдмана

$$\begin{aligned} [(A_2 - B_1)\rho^2 \rho' \Phi^2 + A_1 \rho' \Phi^{3/2}]_+ - \delta\rho &= 0 \\ [(A_2 - B_1)(\rho^2 + 3\rho'^2)\Phi^2 + A_1(\rho^4 \Phi^{1/2} + \rho^6 \rho'^2 \Phi^{5/2})]_+ - \delta\theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $[f]_+^- = f^+ - f^-$ — разность значений f до и после угловой точки.

Так как условия (2.2) записаны для всей промежуточной области высот полета и должны выполняться в предельных случаях $A_1 = 0$, $(A_2 - B_1) \neq 0$ («плотный газ») и $A_1 \neq 0$, $(A_2 - B_1) = 0$ (свободномолекулярное течение разреженного газа), то их следует переписать в форме

$$\begin{aligned} [(A_2 - B_1)\rho' \Phi^2]_+ - \delta\rho &= 0, & [A_1 \rho' \Phi^{3/2}]_+ - \delta\rho &= 0 \\ [(A_2 - B_1)(\rho^2 + 3\rho'^2)\Phi^2]_+ - \delta\theta &= 0, & [A_1 \rho^4 \Phi^{1/2} (1 + \rho^2 \rho'^2 \Phi^2)]_+ - \delta\theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Угловые точки контура могут: а) лежать на окружности $\rho = \rho_0$, тогда из (2.3) следует, что

$$\rho_+ = -\rho_-$$

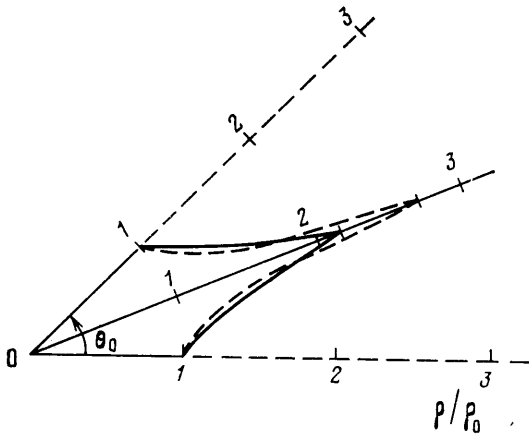
где ρ_- — значение производной перед угловой точкой, ρ_+ — за ней; б) располагаться произвольно, тогда из (2.3) следует, что

$$\rho_+ = \pm \infty, \quad \rho_- = \mp \infty \quad (2.4)$$

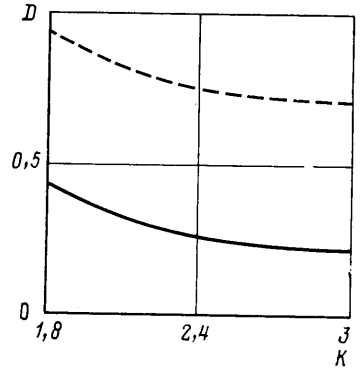
Уравнение Эйлера для функционала (1.3) имеет вид

$$(A_2 - B_1)\rho^6 (\rho^2 + 3\rho'^2)\Phi^2 + A_1 \rho^4 (\rho^2 + 2\rho'^2)\Phi^{3/2} + (B_1 + \lambda)\rho^2 = c_1 \quad (2.5)$$

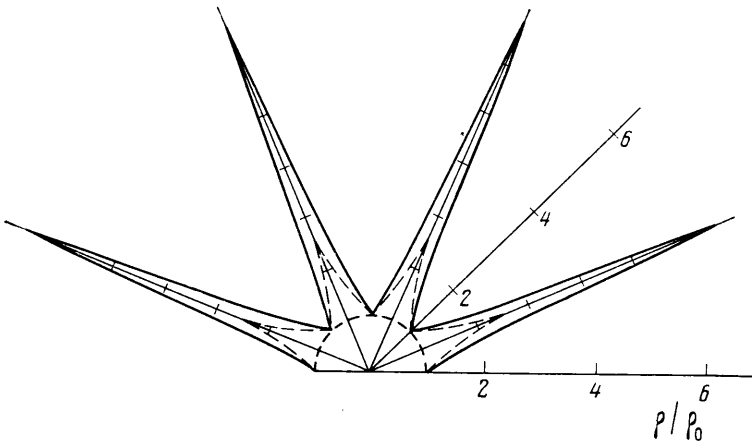
Так как в (2.5) входят только четные степени ρ' , то учитывая (2.4), приходим к следующему выводу: поперечный контур состоит из дуг, сим-



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

метричных относительно луча, проходящего через угловую точку (фиг. 1), т. е. две симметричные дуги $\rho' > 0$ и $\rho' < 0$ образуют цикл, который повторяется m раз, где m — целое число, а угол при вершине элемента цикла $\theta_0 = 2\pi/m$.

Рассмотрим случай задания минимального радиуса ρ_0 . Для определенности ограничимся рассмотрением половины цикла, где $\rho' > 0$. Максимальный радиус обозначим ρ_f .

На основании (2.4) имеем $\rho_f' = \infty$. Но тогда из (2.5) следует

$$\begin{aligned} (B_1 + \lambda)\rho_f^2 &= c_1, & (B_1 + \lambda)(\rho_f^2 - \rho^2) &\geq 0, \\ c_1 &\geq 0, & (B_1 + \lambda) &\geq 0, & \rho_f &= [c_1 / (B_1 + \lambda)]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Сделав в уравнении Эйлера (2.5) замену переменных, приведем его к виду

$$\begin{aligned} Z^4 - 2A_1 D \rho^3 Z^3 - 3(A_2 - B_1) D \rho^4 Z^2 + A_1 D \rho^3 Z + 2(A_2 - B_1) D \rho^4 &= 0 \\ Z &= \Phi^{1/2} \rho^{-1}, & c_1 - (B_1 + \lambda) \rho^2 &= 1/D(\rho) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решение этого уравнения четвертой степени относительно Z определяется весьма громоздкой формулой.

3. Случай $(\rho'/\rho)^2 \gg 1$. Рассмотрим предельный случай, когда

$$(\rho'/\rho)^2 \gg 1, \quad Z = \rho'/\rho \quad (3.1)$$

После отбрасывания малых членов из (2.7) получим квадратное уравнение

$$Z^2 - 2A_1 D \rho^3 Z - 3(A_2 - B_1) D \rho^4 = 0 \quad (3.2)$$

Если его решение обозначить

$$[\psi(\rho)]^{-1} = Z = 2D [2A_1 \rho^3 + \sqrt{4A_1^2 \rho^6 + 12(A_2 - B_1) \rho^4 D^{-1}}] \quad (3.3)$$

то

$$\theta = \int_{\rho_0}^{\rho_f} \frac{\psi(\rho)}{\rho} d\rho \quad (3.4)$$

Из фиг. 1 видно, что

$$\frac{\theta_0}{2} = \frac{\pi}{m} = \int_{\rho_0}^{\rho_f} \frac{\psi(\rho)}{\rho} d\rho$$

Следовательно

$$m = \pi \left[\int_{\rho_0}^{\rho_f} \frac{\psi(\rho)}{\rho} d\rho \right]^{-1} = m(\rho_0, c_1, \lambda) \quad (3.5)$$

Из условия задания площади миделя (1.2) следует

$$\sigma = m \int_{\rho_0}^{\rho_f} \rho \psi(\rho) d\rho \quad (3.6)$$

Исключая из (3.5) и (3.6) параметр m , получим

$$\frac{\sigma}{\pi} = \int_{\rho_0}^{\rho_f} \rho \psi(\rho) d\rho \left[\int_{\rho_0}^{\rho_f} \frac{\psi(\rho)}{\rho} d\rho \right]^{-1} = K_1(\rho_0, c_1, \lambda) = K \rho_0^2 \quad (3.7)$$

где $K_1 = \sigma/\pi$ — параметр формы искомого оптимального тела. Функциональные зависимости $m(\rho_0, c_1, \lambda)$ и $K_1(\rho_0, c_1, \lambda)$ получаются с учетом того, что ρ_f определено выражением (2.6), а $\psi(\rho)$ — выражением (3.3). Задание значений ρ_0 , σ и m позволяет определить из (3.5) и (3.7) величины c_1 и λ , после чего из (3.3) определяется $\psi(\rho)$, а из (3.4) — решение поставленной задачи.

4. Предельные случаи. Основной результат решения определяется выражением (3.2). Рассмотрим предельные случаи ньютоновского гиперзвукового и свободномолекулярного течений разреженного газа.

В случае ньютоновского течения имеем $A_2 \neq 0$, $B_1 = A_1 = 0$. Из (3.3) следует

$$\frac{\rho'}{\rho} = \sqrt{\frac{3A_2 \rho^4}{c_1 - \lambda \rho^2}} \quad (4.1)$$

На основании (3.4) и (4.1) получим

$$\theta = \sqrt{\frac{\lambda}{3A_2}} \int_{\rho_0}^{\rho_f} \sqrt{\rho_f^2 - \rho^2} \rho^{-6} d\rho \quad (4.2)$$

Условие $(\rho'/\rho)^2 \gg 1$ в силу (4.1) можно переписать в форме

$$[\lambda(\rho_f^2 - \rho_0^2) \rho^{-4}] \ll 1 \quad (4.3)$$

Если воспользоваться обозначениями, введенными в [9]

$$t = (\rho/\rho_0)^2, \quad t_f = (\rho_f/\rho_0)^2$$

то условие (4.3) и выражение (4.2) запишутся соответственно в виде

$$\frac{\lambda(t_f-1)}{\rho_0^2} \ll 1, \quad \theta = \frac{1}{2\rho_0} \sqrt{\frac{\lambda}{3A_2}} \int_1^t \sqrt{t_f-t} t^{-2} dt$$

что полностью совпадает с результатами [9].

В случае свободномолекулярного течения разреженного газа имеем $A_1 \neq 0$, $A_2 = B$. Из (3.3) следует

$$\rho'/\rho = 2A_1 \rho^3 D = 2A_1 \rho^3 / [c_1 - (B_1 + \lambda) \rho^2] \quad (4.4)$$

Для уравнения цикла оптимального контура из (3.4) и (4.4) получим выражение в явном виде

$$\theta = \frac{\rho - \rho_0}{2A_1 \rho \rho_0} \left\{ \frac{c_1}{3} \left[\frac{\rho^2 + \rho \rho_0 + \rho_0^2}{\rho^2 \rho_0^2} \right] - (B_1 + \lambda) \right\}$$

Функциональные зависимости (3.5) и (3.7) также записываются в явной форме, после чего решение задачи полностью определено.

5. Поперечный контур оптимального тела в разреженном газе. В предположении (3.1) с учетом (3.3) определена форма поперечного контура тела минимального сопротивления при полете в атмосфере Земли. Расчет проводился на БЭСМ-6 при значениях $\rho_0 = 0,1$, $m = 8$ и K в диапазоне 1,7–3 для ряда промежуточных высот полета. Значения параметров режима A_1 , A_2 , B_1 принимались в соответствии с данными [8].

Результаты расчета формы поперечного контура приведены на фиг. 1, где сплошная линия соответствует «плотному газу», а штриховая — свободномолекулярному течению разреженного газа. Видно, что с увеличением высоты полета в разреженном газе $\rho_f = \max \rho(\theta)$ возрастает.

Вид поперечного контура оптимального тела для промежуточной высоты полета $H = 100$ км при значениях $K = 1,7$ (штриховой) и $K = 3$ (сплошной контур) приведены на фиг. 2 (показаны симметричные верхние половины контуров). На фиг. 3 показано отношение сопротивления звездообразного тела D_T к сопротивлению эквивалентного конуса D_K в «плотном газе» (сплошная линия) и свободномолекулярном потоке (штриховая линия) при различных значениях K . Для промежуточных высот соответствующие значения $D = D_T/D_K$ (располагаются внутри указанного диапазона). Звездообразное тело оптимально по сопротивлению во всем диапазоне высот, однако эффективность использования звездообразных тел по сравнению с эквивалентными телами вращения уменьшается с увеличением высоты полета (разреженности газа). Это вызвано тем, что с увеличением высоты полета растет вклад касательных сил в величину суммарного сопротивления, а звездообразное тело имеет большую поверхность, чем соответствующее тело вращения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бунимович А. И. Соотношения между силами, действующими на тела, движущиеся в разреженном газе, в потоке света в гиперзвуковом ньютоновском потоке. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 4, с. 89–95.
2. Бунимович А. И., Дубинский А. В., Кузьменко В. И. Об аэродинамических и тепловых характеристиках и оптимальной форме тел, обтекаемых разреженным газом. — В кн.: Динамика разреженного газа. Тр. 6-й Всесоюз. конф., июль, 1979. Ч. 2. Новосибирск, 1980, с. 49–54.
3. Дубинский А. В. Исследование и оптимизация аэродинамических характеристик в разреженном газе на основе аналитических и численных методов. — В кн.: Динамика разреженного газа и пограничного слоя. М., 1980, с. 50–68. Рукопись деп. в ВИНТИ 25.09.80, № 4218–80 Деп.

4. Дубинский А. В. Некоторые классы оптимальных пространственных тел при обтекании в условиях гипотезы локального взаимодействия.— В кн.: Динамика разреженного газа и пограничного слоя. М., 1980, с. 81–101. Рукопись деп. в ВИНТИ 25.09.80, № 4218–80 Деп.
5. Бунимович А. И., Дубинский А. В. Оптимальные тупоносые тела вращения в газе различной разреженности.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 3, с. 158–161.
6. Бунимович А. И., Кузьменко В. И. Аэродинамические и тепловые характеристики пространственных звездчатых тел в разреженном газе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 4, с. 181–183.
7. Бунимович А. И., Кузьменко В. И. Аэродинамические и тепловые характеристики звездчатых тел, обтекаемых под углом атаки гиперзвуковым потоком разреженного газа.— Вестн. МГУ. Сер. 4, Математика, механика, 1984, № 2, с. 74–77.
8. Галкин В. С., Ерофеев А. И., Толстых А. И. Приближенный метод расчета аэродинамических характеристик тел в гиперзвуковом потоке разреженного газа.— Тр. ЦАГИ, 1977, вып. 1833, с. 11–27.
9. Гонор А. Л. Конические тела наименьшего сопротивления в гиперзвуковом потоке газа.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 2, с. 383–386.

Москва

Поступила в редакцию
6.V.1985