

УДК 532.72:533.6

## ОБ УЧЕТЕ ПРОДОЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ В ОКРЕСТНОСТИ РАЗРЫВА КАТАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОВЕРХНОСТИ

[ГЕРШБЕЙН Э. А.], КРУПА В. Г.

При исследовании течений около поверхностей со скачкообразным изменением каталитических свойств возникает вопрос о применимости параболических уравнений пограничного и вязкого ударного слоев в окрестности скачка. В настоящей работе решаются три типа задач, в которых учитывается продольная диффузия. В первой вставка с иными каталитическими свойствами располагается в окрестности критической точки, во второй линии разрыва каталитических свойств перпендикулярны, а в третьей параллельны набегающему потоку. На основной поверхности и на поверхности вставки гетерогенные каталитические реакции предполагаются реакциями первого порядка с различными константами скоростей, значения которых изменяются в широком диапазоне. Данные решения сравниваются с решением, полученным в приближении пограничного слоя, и оцениваются области влияния продольной диффузии. В [1-4] решалась задача, аналогичная второй, численным методом [1] и методом Винера - Хопфа для случая перехода с некаталитической поверхности на идеально каталитическую и оценивалась область применимости погранслоя [5].

1. Течение в окрестности критической точки при больших числах Шмидта. Рассмотрим поперечное обтекание бинарной смесью плоской пластины, имеющей вставку с иными каталитическими свойствами и расположенной симметрично относительно критической точки. Пусть координаты  $x'$  и  $y'$ , отнесенные к  $R$ , направлены соответственно вдоль поверхности тела и по нормали к ней; составляющие скорости в набегающем потоке распределены по закону  $u_\infty = Vx'$ ,  $v_\infty = -Vy'$ , где  $V = \text{const}$ . Плотность  $\rho$ , коэффициент вязкости  $\mu$  и число Шмидта  $Sc$  предполагаются постоянными. На поверхности пластины выставляются следующие условия:

$$u=0; \quad v=0; \quad \frac{\mu}{R Sc} \frac{\partial c'}{\partial y'} = \rho k_i' c' \quad (1.1)$$

где  $c'$  — концентрация,  $k_i'$  — константа скорости гетерогенных реакций:  $k_i' = k_1'$ ,  $x' \leq x_0'$ ;  $k_i' = k_2'$ ,  $x' > x_0'$ .

При сделанных выше предположениях динамическая задача отделяется от диффузионной и ее решение приведено в [6]. Предположим далее, что  $Sc \gg 1$ . Так как при этом условии толщина диффузионного слоя много меньше толщины динамического, при решении диффузионной задачи будем использовать следующие распределения скоростей вблизи поверхности тела:

$$u(x', y') = 1,23 V \sqrt{\text{Re}} x' y' \quad (1.2)$$

$$v(x', y') = -0,615 V \sqrt{\text{Re}} y'^2, \quad \text{Re} = \frac{\rho V R}{\mu}$$

Введем новые переменные (1.3) и с учетом (1.2) уравнение диффузии и граничные условия запишем в виде

$$x' = \delta x, \quad y' = \delta y, \quad c' = c_\infty c, \quad k_i' = V k_i, \quad K_i = \text{Re} \delta Sc k_i,$$

$$\delta = (\text{Sc Re } U)^{-1/2} = (1,23 \text{ Sc Re}^{2/3})^{-1/2}, \quad U = \frac{1}{V} \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} \Big|_{y'=0} \quad (1.3)$$

$$yx \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{y^2}{2} \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (1.4)$$

$$c \rightarrow 1, \quad y \rightarrow \infty; \quad \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad x=0; \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0, \quad x \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = K_1 c, \quad y=0; \quad K_1 = K_1, \quad 0 \leq x \leq x_0; \quad K_1 = K_2, \quad x > x_0 \quad (1.5)$$

Задача (1.4), (1.5) решалась численным методом переменных направлений [7] для различных значений параметров  $K_1$ ,  $K_2$  и  $x_0$ . Размеры расчетной области  $y \times x$  составляли  $6 \times 15$ , шаг разностной сетки выбирался равным  $\Delta x = \Delta y = 0,1$ .

Получим сначала решение при  $K_1, K_2$ , стремящихся к нулю и  $x_0 = O(1)$ . Возможны три случая: 1)  $K_1/K_2 = O(1)$ , 2)  $K_2/K_1 \rightarrow \infty$ , 3)  $K_2/K_1 \rightarrow 0$ .

Решение системы (1.4), (1.5) ищем в виде  $c = 1 + Kc_1 + \dots$ , где  $K = K_1$  для первого и третьего случаев и  $K = K_2$  для второго.

Вид уравнения и граничных условий при  $x=0, x \rightarrow \infty$  совпадает с (1.4), (1.5); при  $y \rightarrow \infty, c_1 \rightarrow 0$ . Граничные условия при  $y=0$  имеют следующий вид для всех трех случаев соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1}{\partial y} = 1, \quad 0 \leq x \leq x_0; \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = \frac{K_2}{K_1}, \quad x > x_0 \\ \frac{\partial c_1}{\partial y} = 0, \quad 0 \leq x \leq x_0; \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = 1, \quad x > x_0 \\ \frac{\partial c_1}{\partial y} = 1, \quad 0 \leq x \leq x_0; \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = 0, \quad x > x_0 \end{aligned}$$

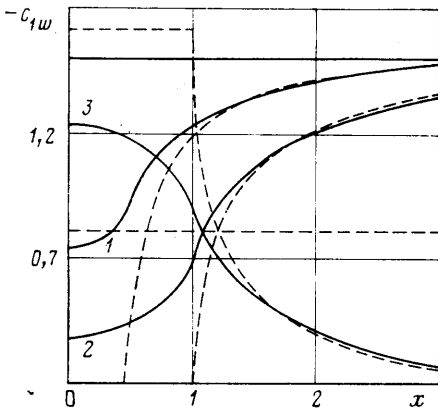
Таким образом, в первом случае осталось два определяющих параметра задачи:  $x_0$  и  $K_2/K_1$ , во втором и третьем — один  $x_0$ . Отметим, что при известном решении задачи во втором случае  $c_1 = \varphi(x, y)$ , решение задачи в третьем случае находится по формуле

$$c_1 = -\varphi(x, y) + \int_0^y e^{-y^{3/6}} dy + B, \quad B = -\frac{2}{6^{2/3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

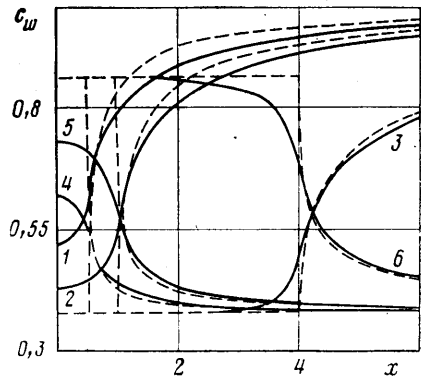
При этом графики зависимостей  $c_{1w}(x)$  во втором и третьем случаях симметричны относительно прямой  $c_1 = 0,5$ . Данные зависимости для второго случая приведены на фиг. 1 для размеров вставок  $x_0 = 0,5$  и  $1,0$  (1, 2) и третьего случая (3, штриховые линии — решение задачи в пограничном приближении, полученные методом [8]).

Рассмотрим случай, когда  $K_1$  или  $K_2$  являются величинами порядка единицы. Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 2 для  $x_0 = 0,5$  (1, 4);  $x_0 = 1,0$  (2, 5);  $x_0 = 4,0$  (3, 6). Кривые 1—3 соответствуют  $K_1 = 1,0, K_2 = 0$ ; 4—6 —  $K_1 = 0,1, K_2 = 1$ . Там же штриховыми линиями приведено решение задачи в пограничном приближении.

Анализ полученных решений показывает, что отличие решений в точке  $x_0 = 0$  при  $x_0 \leq 1$  значительно, при  $x_0 \rightarrow 2$  отличие решений в этой точке убывает и становится относительно небольшим. При дальнейшем увеличении координаты точки разрыва образуется область, примыкающая к  $x=0$ , в которой пограничное решение справедливо, а отличие решений



Фиг. 1



Фиг. 2

локализуется в основном в окрестности точки разрыва  $|x-x_0| \leq 1,5-2,0$  для  $x_0 \sim 4$ . Для больших  $x_0$  асимптотическое решение задачи совпадает с решением задачи, приведенной в п. 2.

Рассмотренные случаи соответствуют плоскому течению в пограничном слое в окрестности критической точки затупленного тела с радиусом затупления  $R$ . Таким образом, если вставка с иными каталитическими свойствами помещается в окрестность критической точки симметрично относительно  $x=0$  и ее размеры  $l \leq (3-4)R\delta$ , то диффузионные потоки к поверхности вставки должны находиться из решения эллиптической задачи. Если размеры вставки  $l \geq 8R\delta$ , то продольную диффузию следует учитывать в окрестности точки разрыва  $|x-0,5l| \leq (1,5-2,0)R\delta$ , где  $x, l$  — размерные величины.

**2. Течение около плоской пластины в окрестности точки разрыва каталитических свойств.** Рассмотрим продольное обтекание плоской пластины бинарной смесью газов с  $\mu = \text{const}$ ,  $\rho = \text{const}$ ,  $Sc = \text{const}$ . Пусть в точке  $x' = x_0'$  каталитическая активность поверхности претерпевает разрыв. Профиль скорости будем считать линейным ( $u = U'y'$ ,  $v = 0$ ). Тогда уравнение диффузии и граничные условия в окрестности точки разрыва можно записать в следующем виде:

$$y \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (2.1)$$

$$c = c_0(1 + K_1 y), \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = K_1 c, \quad y=0: \quad K_1 = K_1, \quad x < 0, \quad K_1 = K_2, \quad x \geq 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = K_1 c_0, \quad y \rightarrow \infty; \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0, \quad x \rightarrow \infty$$

$$\delta_1 x = \frac{x' - x_0'}{x_0'}, \quad \delta_1 y = \frac{y'}{x_0'}, \quad k_i = \frac{k_i'}{V_\infty}$$

$$K_i = \frac{Re \delta_1 Sc k_i \rho}{\mu}, \quad \delta_1 = \left( \frac{\mu}{\rho U Re Sc} \right)^{1/2}$$

$$U = \frac{U' x_0'}{V_\infty}, \quad \rho = \frac{\rho'}{\rho_\infty}, \quad \mu = \frac{\mu'}{\mu_*}, \quad Re = \frac{\rho_\infty V_\infty x_0'}{\mu_*}, \quad Sc = \frac{\mu'}{\rho' D'}$$

где штрихами отмечены размерные величины.

В задаче (2.1) — (2.2) три параметра:  $c_0, K_1, K_2$ . Рассмотрим различные случаи соотношений между ними.

Предположим, что на основной поверхности зона релаксации к равновесию гетерогенных каталитических больше  $x_0$ . При  $c_0=O(1)$ ,  $K_1=O(\delta_1^\alpha)$ ,  $K_2=O(\delta_1^\beta)$  ( $\alpha>0$ ,  $\beta>0$ ),  $\delta_1\rightarrow 0$  решение задачи (2.1), (2.2) ищем в виде  $c=c_0(1+Kc_1+\dots)$ , где  $K=K_1$  при  $\alpha\leq\beta$ ,  $K=K_2$  при  $\alpha>\beta$ . Уравнение для главного члена  $c_1$  совпадает с уравнением (2.1). Граничные условия принимают следующий вид:

$$\alpha\leq\beta: \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = 1 \quad (x<0), \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = \frac{K_2}{K_1} \quad (\alpha=\beta, x\geq 0)$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial y} = 0 \quad (\alpha<\beta, x\geq 0), \quad y=0$$

$$c_1=y, \quad x\rightarrow -\infty; \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = 1, \quad y\rightarrow \infty$$

$$\alpha>\beta: \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = 0 \quad (x<0), \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = 1 \quad (x\geq 0), \quad y=0$$

$$c_1=0, \quad x\rightarrow -\infty; \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = 0, \quad y\rightarrow \infty$$

Условие при  $x\rightarrow\infty$  сохраняет свой вид.

При  $K_1=O(\delta_1^\alpha)$  ( $\alpha>0$ ),  $K_2=O(\delta_1^\beta)$  ( $\beta\leq 0$ ) решение задачи (2.1), (2.2) при  $\delta_1\rightarrow 0$  ищем в виде  $c=c_1+\dots$ . Тогда уравнение для главного члена совпадает с уравнением (2.1). Граничные условия имеют вид

$$y=0: \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = 0 \quad (x<0, \beta\leq 0), \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = K_2 c_1 \quad (x\geq 0, \beta=0)$$

$$c_1=0 \quad (x\geq 0, \beta<0)$$

$$c_1=c_0, \quad x\rightarrow -\infty; \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = 0, \quad y\rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} = 0, \quad x\rightarrow \infty$$

В случае  $\beta<0$  зоной релаксации от  $c=c_0$  до  $c=0$  при  $x>0$  пренебрегаем. Отметим, что данная задача ( $\beta<0$ ) решалась в работах [1-4].

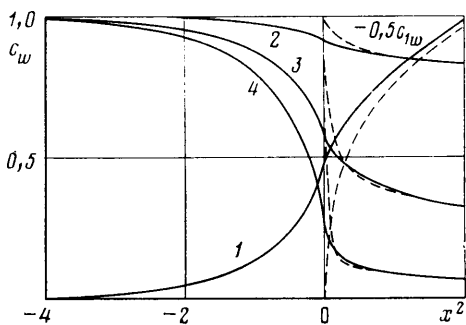
Рассмотрим случай, когда зона релаксации гетерогенных реакций к равновесию много меньше  $x_0'$ . В этом случае  $c_0=0$ ,  $\partial c/\partial y'=Q\neq 0$ . Решение задачи ищем в виде  $c=c_1\delta_1+\dots$ . Уравнение диффузии для  $c_1$  в окрестности разрыва совпадает с (2.1). Граничные условия следующие:

$$c_1=Qy, \quad x\rightarrow -\infty; \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = Q, \quad y\rightarrow \infty; \quad \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} = 0, \quad x\rightarrow \infty$$

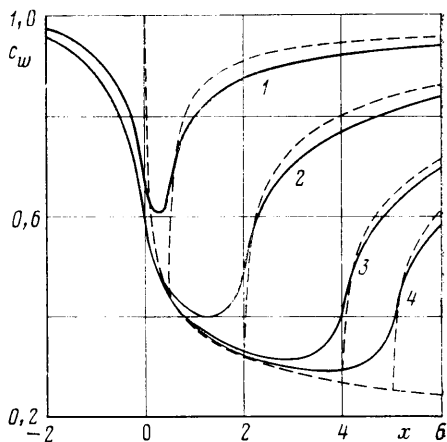
$$y=0: \quad c_1=0, \quad x<0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = K_2 c_1, \quad x\geq 0$$

Для численного решения сформулированных выше задач использовался метод переменных направлений с шагами разностной сетки  $\Delta x=\Delta y=0,1$ . Измельчение разностной сетки в 2 раза приводило к изменению концентрации в точке разрыва, не превышающему 2,5% для  $K_1=0$ ,  $K_2=1$ . В других точках изменение концентрации было меньше.

Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 3 (штриховые линии — погранслоное приближение). На фиг. 3 линия 1 соответствует зависимости  $-0,5c_1(x, 0)$ , полученной при решении задачи (2.1), (2.4). Отметим, что решение  $c_1^*$  задачи (2.1), (2.3) при  $\alpha<\beta$  получается из реше-



Фиг. 3



Фиг. 4

ния  $c_1$  задачи (2.1), (2.4) по формуле  $c_1^* = y - c_1$ . Линии 2–4 соответствуют решению задачи (2.1), (2.2) с  $K_1=0$ ,  $K_2=1$ ; 1,0; 6,0.

Анализ полученных решений показывает, что влияние продольной диффузии на диффузионные потоки к поверхности тела локализовано в окрестности  $-4-3 \leq x \leq 1-1,5$ .

В случае течения несжимаемой жидкости в ламинарном пограничном слое на плоской пластине с учетом того, что  $U=0,332\sqrt{\text{Re}}$ , имеем  $\delta_1 = (0,332 \text{ Sc})^{-1/2} \text{ Re}^{-1/4}$ .

Рассмотрим течение той же смеси газов около вставок, поверхность которых имеет иные каталитические свойства. Будем предполагать, что размеры вставок порядка  $\delta_1 x_0'$ . Постановка задачи совпадает с (2.1), (2.2), за исключением условия при  $y=0$ , которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial y} = K_1 c, \quad x < 0, \quad x > s; \quad \frac{\partial c}{\partial y} = K_2 c, \quad 0 \leq x \leq s$$

где  $\delta_1 s x_0'$  — длина вставки.

Расчеты данной задачи были проведены тем же методом и на той же разностной сетке для различных значений  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $s$ . На фиг. 4 приведена зависимость  $c_w(x)$  для  $K_1=0$ ,  $K_2=1$  и значений  $s=0,5$ ; 2; 4; 5 (линии 1–4 соответственно). Штриховые линии — решение задачи в пограничном приближении. Анализ диффузионных потоков в тело показывает, что при  $s \leq 2$  области  $x > s$  и  $x < 0$  сильно влияют не только на область вставки, но и друг на друга. При  $2 \leq s \leq 4$  влияние указанных областей друг на друга становится слабым, но продолжает оставаться сильным на области вставки. При дальнейшем увеличении размеров вставки внутри вставки появляется область, в которой справедливо погранслоное приближение.

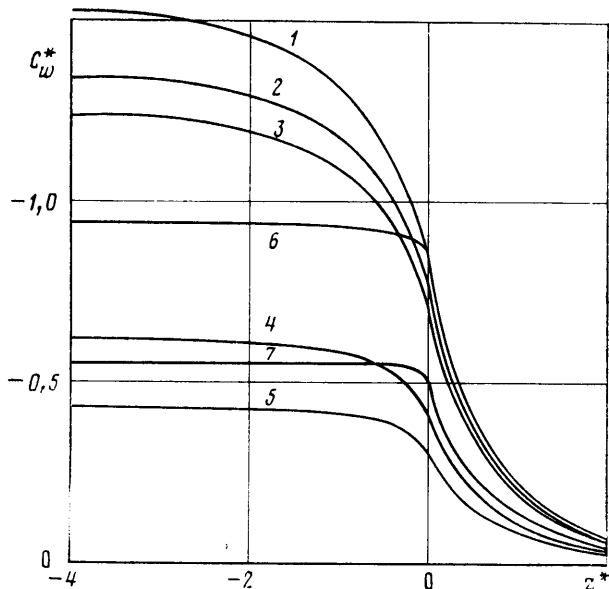
**3. Течение около плоской пластины в окрестности границы прямоугольной вставки.** Рассмотрим вставку, ограниченную сторонами прямоугольного угла, направленными параллельно ( $x' = z_0' = \text{const}$ ) и перпендикулярно ( $x' = x_0' = \text{const}$ ) вектору скорости набегающего потока.

Будем исходить из уравнения диффузии и граничных условий, записанных в виде

$$y \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (3.1)$$

$$c = c_0(1 + K_1 y), \quad x = 0; \quad \frac{\partial c}{\partial y} = K_1 c_0, \quad y \rightarrow \infty, \quad x > 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = K_2 c, \quad y = 0, \quad x > 0, \quad z > 0 \quad (3.3)$$



Фиг. 5

$$\frac{\partial c}{\partial y} = K_3 c, \quad y=0, \quad x>0, \quad z \leq 0 \quad (3.4)$$

$$c = c_1(x, y), \quad z \rightarrow \infty; \quad c = c_2(x, y), \quad z \rightarrow -\infty \quad (3.5)$$

где  $c_1$  — решение системы (3.1), (3.2), (3.3),  $c_2$  — (3.1), (3.2), (3.4), с опущенным членом  $\partial^2 c / \partial z^2$ ;  $\delta_1 x = (x' - x_0') / x_0'$ ,  $\delta_1 y = y' / x_0'$ ,  $\delta_1 z = (z' - z_0') / x_0'$ ,  $\delta_1$  определено в п. 2.

При постановке задачи для простоты решения был опущен член  $\partial^2 c / \partial x^2$  в (3.1). Как было показано в п. 2, его влияние на диффузионные потоки к телу становятся малыми при  $x \gg 1$ .

Перепишем уравнения (3.1) — (3.5) в следующих переменных (\* опускаем):

$$x^* = x, \quad y^* = y/x^{1/2}, \quad z^* = z/x^{1/2}, \quad c = c_0 + c^* x^{1/2}$$

$$yx \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{y^2}{3} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{yz}{3} \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{y}{3} c \quad (3.6)$$

$$x \geq 0, \quad y=0: \quad \frac{\partial c}{\partial y} = K_2 (c_0 + c^* x^{1/2}), \quad z > 0; \quad \frac{\partial c}{\partial y} = K_3 (c_0 + c^* x^{1/2}). \quad (3.7)$$

$$z \leq 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y} = K_1 c_0, \quad y \rightarrow \infty; \quad c = \frac{c_1 - c_0}{x^{1/2}}, \quad z \rightarrow \infty; \quad c = \frac{c_2 - c_0}{x^{1/2}}, \quad z \rightarrow -\infty$$

В качестве начального берется автомодельное решение системы (3.6), (3.7) при  $x=0$ .

Задача (3.6), (3.7) решалась численно методом переменных направлений [7], причем за маршевую переменную принималась координата  $x$ .

На фиг. 5 приведены зависимости  $10c_w^*(z^*)$ , рассчитанные для  $K_1 = -K_2 = 0$ ,  $K_3 = 0,1$  (2, 3) и зависимости  $c_w^*(z^*)$  для  $K_3 = 1,0$  (4, 5);  $K_3 = 10$  (6, 7) и значений  $x=1,0$  (2, 4, 6);  $x=5$  (3, 5, 7). Линия 1 соответствует  $c_w^*/K_3$ ,  $x=0$ .

Как видно из фиг. 5, длина области влияния продольной диффузии при  $z > 0$  примерно одинакова для всех  $K_3$  и слабо зависит от  $x$  в указанном диапазоне ( $x \leq 5$ ). Область влияния продольной диффузии при  $z < 0$  сильнее зависит от  $K_3$ . С увеличением  $K_3$  она несколько уменьшается. Для  $K_3 \leq 0,1$  эта область заключена в пределах  $|z| \leq 3$ , для  $K_3 \geq 1$  — в пределах  $-1 < z < 3$  (для  $x \geq 1$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ling S. C.* Heat transfer from a small isothermal spanwise strip on an insulated boundary.— Trans. ASME, Ser. C. J. Heat Transfer, 1963, v. 85, № 3, p. 230–236.
2. *Springer S. G., Pedley T. J.* The solution of heat transfer problems by the Wiener-Hopf technique. 1. Leading edge of a hot film.— Proc. Roy. Soc., Lond., 1973, Ser. A, v. 333, № 1594, p. 347–362.
3. *Springer S. G.* The solution of heat-transfer problems by the Wiener-Hopf technique. II. Trailing edge of a hot film.— Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A, 1974, A337, № 1610, p. 395–412.
4. *Попов Д. А.* Задача с разрывными граничными условиями и приближение диффузионного погранслоя.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 1, с. 109–117.
5. *Levêque M. A.* Transmission de chaleur par convection.— Ann. Mines., 1928, v. 13, p. 201–362.
6. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
7. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
8. *Петузов И. В.* Численный расчет двумерных течений в пограничном слое.— В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964, с. 304–325.

Москва

Поступила в редакцию  
4.IX.1985