МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1986

УДК 532.546

ФИЛЬТРАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА О ДВУХ ОКРУЖНОСТЯХ

ЯРМИЦКИЙ А. Г.

В [1] предпринята попытка методом конформных отображений обобщить известную фильтрационную теорему об окружности [2, 3] на случай двух круговых областей одинакового радиуса, заполненных одной и той же средой.

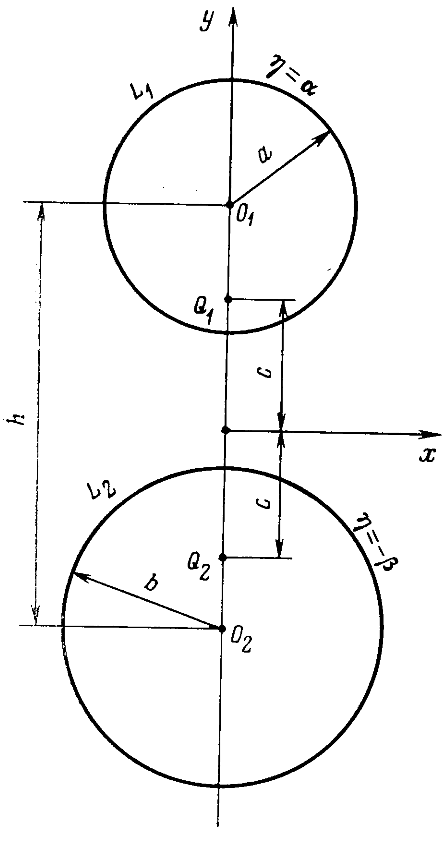
Ниже с использованием биполярных координат дается обобщение указанной теоремы для круговых включений разных радиусов и различных проницаемостей. В качестве предельного случая приводится соответствующая теорема для двух соприкасающихся включений. Изложение иллюстрируется примерами, из которых описанные в литературе результаты вытекают как частные случаи.

1. Пусть невозмущенное плоскопараллельное течение в среде с проницаемостью k_0 описывается комплексным потенциалом $f(z)$ $(z=x+iy)$.

С помощью функции

$$z=-c\,\mathrm{ctg}(\zeta/2)\quad(\zeta=\xi+i\eta)\tag{1.1}$$

где $2c$ — расстояние между полюсами Q_1 и Q_2, введем в плоскости комплексной переменной z биполярную систему координат (фигура).



Все особенности функции

$$F(\zeta)=f(-c\,\mathrm{ctg}\,(\zeta/2))\tag{1.2}$$

по предположению находятся вне окружностей $L_1(\eta=\alpha)$ и $L_2(\eta=-\beta)$, т. е. в области $-\beta<\eta<\alpha$. Радиусы окружностей L_1 и L_2 соответственно равны $a=c/\mathrm{sh}\,\alpha$ и $b=c/\mathrm{sh}\,\beta$. Межцентровое расстояние $h=c(\mathrm{cth}\,\alpha+\mathrm{cth}\,\beta)$. Области, ограниченные этими окружностями, заполнены средами с проницаемостями k_1 и k_2.

Комплексный потенциал возмущенного течения вне рассматриваемых окружностей обозначим через w_0, а комплексные потенциалы фильтрационных течений в областях с проницаемостями k_1 и k_2 — через w_1 и w_2.

Имеет место следующая теорема: плоскопараллельная фильтрация в среде с проницаемостью k_0, возмущенная внесением круговых включений проницаемостями k_1 и k_2, определяется комплексными потенциалами

$$w_0=F(\zeta)+\lambda_1\Phi_1(\zeta-2i\alpha)+$$
$$+\lambda_2\Phi_2(\zeta+2i\beta)$$

$$w_j=(1-\lambda_j)\Phi_j(\zeta)+D_j \quad (j=1,\ 2) \tag{1.3}$$

Здесь

$$\Phi_1(\zeta)=\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}(\lambda_1\lambda_2)^m\{[F(\zeta+im\gamma)-C_1]+\lambda_2[\bar F(\zeta+2i\beta+im\gamma)-\bar C_2]\}$$

$$\Phi_2(\zeta)=\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}(\lambda_1\lambda_2)^m\{[F(\zeta-im\gamma)-C_2]+\lambda_1[\bar F(\zeta-2i\alpha-im\gamma)-\bar C_1]\}$$

$$\gamma=2(\alpha+\beta), \qquad \lambda_j=\frac{k_0-k_j}{k_0+k_j}$$

$$C_j=f[(-1)^{j-1}ic], \qquad D_j=\begin{cases}\dfrac{C_j-\lambda_j\bar C_j}{1+\lambda_j} & (\lambda_j\neq-1)\\ C_j & (\lambda_j=-1)\end{cases}$$

Функции $\Phi_1(\zeta)$ и $\Phi_2(\zeta)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}\Phi_1(\zeta)&=F(\zeta)+\lambda\bar\Phi_2(\zeta+2i\beta)-C_1\\ \Phi_2(\zeta)&=F(\zeta)+\lambda_1\bar\Phi_1(\zeta-2i\alpha)-C_2\end{aligned} \tag{1.4}$$

Доказательство теоремы сводится к непосредственной проверке выполнения граничных условий на окружностях L_j $(j=1;\ 2)$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} w_0&=\begin{cases}\dfrac{1+\lambda_j}{1-\lambda_j}\operatorname{Re} w_j & (\lambda_j\neq-1)\\ \operatorname{Re} C_j & (\lambda=-1)\end{cases}\\ \operatorname{Im} w_0&=\operatorname{Im} w_j\end{aligned} \tag{1.5}$$

выражающих непрерывность давлений и нормальных скоростей на границах скачкообразного изменения проницаемости.

При этом оказываются полезными две других формы записи первой из формул (1.3), получаемых с использованием (1.4)

$$\begin{aligned}w_0&=\Phi_1(\zeta)+\lambda_1\bar\Phi_1(\zeta-2i\alpha)+C_1\\ w_0&=\Phi_2(\zeta)+\lambda_2\bar\Phi_2(\zeta+2i\beta)+C_2\end{aligned} \tag{1.6}$$

Кроме того, так как функция $\Phi_1(\zeta)$ и $\Phi_2(\zeta)$ не имеют особенностей в областях $\operatorname{Im}\zeta>\alpha$ и $\operatorname{Im}\zeta<-\beta$ соответственно, то их не имеют и течения внутри указанных областей.

Переписав (1.6) в виде

$$w_0=\Phi_1(\zeta)+\Phi_2(\zeta)-F(\zeta)+C_1+C_2 \tag{1.7}$$

заметим, что вне окружностей L_1 и L_2 нет особых точек, помимо определенных функцией $F(\zeta)$. Таким образом, комплексные потенциалы w_j $(j=0,\ 1,\ 2)$ не вводят новых особенностей в течение.

2. Рассмотрим частные случаи. Прежде всего отметим, что при $\lambda_2=0$ $(k_2=k_0)$ получаем известную фильтрационную теорему об окружности [2, 3]. К тому же результату приводит предельный переход $\beta\to+\infty$, при котором окружность $\eta=-\beta$ вырождается в точку.

Если проницаемости сред внутри окружностей одинаковы, т. е. $k_1=k_2$ или $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, выражения (1.3) принимают вид

$$w_0=F(\zeta)+\lambda[\bar\Phi_1(\zeta-2i\alpha)+\bar\Phi_2(\zeta+2i\beta)]$$

$$w_j=(1-\lambda)\Phi_j(\zeta)+D_j \quad (j=1,\,2)$$

$$\Phi_1(\zeta)=\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}\lambda^{2m}\{[F(\zeta+im\gamma)-C_1]+\lambda[\bar F(\zeta+2i\beta+im\gamma)-\bar C_2]\}$$

$$\Phi_2(\zeta)=\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}\lambda^{2m}\{[F(\zeta-im\gamma)-C_2]+\lambda[\bar F(\zeta-2i\alpha-im\gamma)-\bar C_1]\}$$

В частности, при $\lambda=\pm 1$

$$w_0=F(\zeta)\pm[\bar\Phi_1(\zeta-2i\alpha)+\bar\Phi_2(\zeta+2i\beta)]$$

Верхний знак здесь и ниже соответствует двум непроницаемым круговым включениям, нижний – паре каверн. В последнем случае

$$w_j=2\Phi_j(\zeta)+C_j \quad (j=1,\,2)$$

$$\Phi_1(\zeta)=\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}\{[F(\zeta+im\gamma)-C_1]\pm[\bar F(\zeta+2i\beta+im\gamma)-\bar C_2]\}$$

$$\Phi_2(\zeta)=\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}\{[F(\zeta-im\gamma)-C_2]\pm[\bar F(\zeta-2i\alpha-im\gamma)-\bar C_1]\}$$

При $\lambda_1=-\lambda_2=\lambda$ $(k_1k_2=k_0^2)$

$$w_0=F(\zeta)+\lambda[\bar\Phi_1(\zeta-2i\alpha)-\bar\Phi_2(\zeta+2i\beta)]$$

$$w_1=(1-\lambda)\Phi_1(\zeta)+D_1; \qquad w_2=(1+\lambda)\Phi_2(\zeta)+D_2$$

$$\Phi_1(\zeta)=\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}(-1)^m\lambda^{2m}\{[F(\zeta+im\gamma)-C_1]-\lambda[\bar F(\zeta+2i\beta+im\gamma)-\bar C_2]\}$$

$$\Phi_2(\zeta)=\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}(-1)^m\lambda^{2m}\{[F(\zeta-im\gamma)-C_2]+\lambda[\bar F(\zeta-2i\alpha-im\gamma)-\bar C_1]\}$$

Полагая $\lambda=\pm 1$, получаем комплексные потенциалы плоскопараллельной фильтрации при наличии непроницаемого включения и каверны.

3. Рассмотренная теорема допускает геометрическую интерпретацию, аналогичную интерпретации фильтрационной теоремы об одной окружности [2, 3], с той лишь разницей, что в данном случае при описании течения вне окружностей каждой особой точке комплексного потенциала невозмущенного потока соответствует не одна, а бесконечное (счетное) множество дополнительных особенностей, вводимых внутрь окружностей. Течение внутри какой-либо из окружностей L_1 и L_2 определяется дополнительными (фиктивными) особенностями (помимо особых точек функции $F(\zeta)$), вводимыми в область, ограниченную другой окружностью.

Оставаясь на той же координатной линии $\xi=\xi_0$, что и особенность невозмущенного течения, дополнительные особенности, вводимые внутрь окружностей, сгущаются в направлении к полюсам биполярной системы координат.

Интенсивности всех особенностей легко определяются из теоремы. Описанный метод построения течения представляет собой обобщение метода отображения особых точек [3] на случай двух круговых границ зон различной проницаемости.

4. В качестве примера рассмотрим прямолинейно-поступательное течение со скоростью U в среде с проницаемостью k_0, искаженное внесением двух круговых включений с проницаемостями k_1 и k_2. Простоты ради будем считать невозмущенный поток перпендикулярным отрезку, соединяю-

щему центры этих включений. Тогда

$$f(z)=Uz, \qquad F(\zeta)=-Uc\operatorname{ctg}(\zeta/2)$$

$$\Phi_1(\zeta)=-Uc\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}(\lambda_1\lambda_2)^m\left[\left(\operatorname{ctg}\frac{\zeta+im\gamma}{2}+i\right)+\lambda_2\left(\operatorname{ctg}\frac{\zeta+2i\beta+im\gamma}{2}+i\right)\right]$$

$$\Phi_2(\zeta)=-Uc\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}(\lambda_1\lambda_2)^m\left[\left(\operatorname{ctg}\frac{\zeta-im\gamma}{2}-i\right)+\lambda_1\left(\operatorname{ctg}\frac{\zeta-2i\alpha-im\gamma}{2}-i\right)\right] \tag{4.1}$$

Если обозначить

$$\varphi(\zeta)=-i\left(1+2\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}e^{in\zeta}\right)$$

и учесть, что

$$\operatorname{ctg}\frac{\zeta}{2}=\begin{cases}\varphi(\zeta) & (\operatorname{Im}\zeta>0)\\ \bar{\varphi}(\zeta) & (\operatorname{Im}\zeta<0)\end{cases}$$

то выражениям (4.1) можно придать более компактный вид

$$\Phi_1(\zeta)=F(\zeta)+2Uci\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\frac{1+q_{1n}}{1-q_{1n}q_{2n}}q_{2n}e^{in\zeta}-Uci$$

$$\Phi_2(\zeta)=F(\zeta)-2Uci\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\frac{1+q_{2n}}{1-q_{1n}q_{2n}}q_{1n}e^{-in\zeta}+Uci$$

$$q_{1n}=\lambda_1e^{-2n\alpha}, \qquad q_{2n}=\lambda_2e^{-2n\beta}$$

В частном случае, когда включения имеют одинаковый радиус (т. е. $a=b$ или $\alpha=\beta$) и заполнены одной и той же средой (так что $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$), имеем $\Phi_2(\zeta)=\Phi_1(\zeta)=\Phi(\zeta)$ и, согласно (1.3), (1.7), получаем

$$\begin{aligned} w_0&=\Phi(\zeta)+\bar{\Phi}(\zeta)-F(\zeta) && (-\alpha<\operatorname{Im}\zeta<\alpha)\\ w_1&=(1-\lambda)\Phi(\zeta)+Uci && (\operatorname{Im}\zeta>\alpha)\\ w_2&=(1-\lambda)\bar{\Phi}(\zeta)-Uci && (\operatorname{Im}\zeta<-\alpha)\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$w_2(\zeta)=\bar{w}_1(\zeta)$$

Так как в рассматриваемом случае $q_{1n}=q_{2n}=q_n=\lambda e^{-2n\alpha}$, то

$$\Phi(\zeta)=\Phi_1(\zeta)=\bar{\Phi}_2(\zeta)=F(\zeta)+2Uci\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\frac{q_n}{1-q_n}e^{in\zeta}-Uci$$

и выражения (4.2) принимают вид

$$\begin{aligned} w_0&=-Uc\left(\operatorname{ctg}\frac{\zeta}{2}+4\lambda\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\frac{\sin n\zeta}{e^{2n\alpha}-\lambda}\right) && (-\alpha<\operatorname{Im}\zeta<\alpha)\\ w_1&=-(1-\lambda)Uc\left(\operatorname{ctg}\frac{\zeta}{2}-2\lambda i\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\frac{e^{in\zeta}}{e^{2n\alpha}-\lambda}\right)+\lambda Uci && (\operatorname{Im}\zeta>\alpha)\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$w_2=-(1-\lambda)Uc\left(\operatorname{ctg}\frac{\zeta}{2}+2\lambda i\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\frac{e^{-in\zeta}}{e^{2n\alpha}-\lambda}\right)-\lambda Uci\qquad(\operatorname{Im}\zeta<-\alpha)$$

В случае двух круговых каверн ($\lambda=-1$) имеем

$$w_0=-Uc\left(\operatorname{ctg}\frac{\zeta}{2}-4\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\frac{\sin n\zeta}{e^{2n\alpha}+1}\right)\qquad(-\alpha<\operatorname{Im}\zeta<\alpha)$$

$$w_1=-2Uc\left(\operatorname{ctg}\frac{\zeta}{2}+2i\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\frac{e^{in\zeta}}{e^{2n\alpha}+1}\right)-Uci\qquad(\operatorname{Im}\zeta>\alpha)$$

$$w_2=-2Uc\left(\operatorname{ctg}\frac{\zeta}{2}-2i\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\frac{e^{-in\zeta}}{e^{2n\alpha}+1}\right)+Uci\qquad(\operatorname{Im}\zeta<-\alpha)$$

а при обтекании пары непроницаемых включений ($\lambda=1$) приходим к результату, совпадающему с полученным в [4]

$$w_0=-Uc\left(\operatorname{ctg}\frac{\zeta}{2}+4\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\frac{\sin n\zeta}{e^{2n\alpha}-1}\right)\quad(|\operatorname{Im}\zeta|<\alpha)$$

5. Рассмотрим предельный случай, когда $\alpha\to 0$ и $\beta\to 0$ одновременно с $c\to 0$, так что $a=c/\operatorname{sh}\alpha$ и $b=c/\operatorname{sh}\beta$ остаются неизменными. Он соответствует касанию двух круговых границ раздела зон различной проницаемости. Из (1.1) следует, что при этом $\zeta\to 0$ и, стало быть, $z=-2c/\zeta$.

Имеем

$$\begin{gathered}w_0=\Psi_1(Z)+\Psi_2(Z)-f(z)+2f(0)\\ w_j=(1-\lambda_j)\Psi_j(Z)+D_j\quad(j=1,\,2)\end{gathered}\tag{5.1}$$

$$\Psi_1(Z)=\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}(\lambda_1\lambda_2)^m\left\{\left[f\left(\frac{iABh}{Z+m}\right)-f(0)\right]+\lambda_2\left[\bar f\left(\frac{iABh}{Z+A+m}\right)-\bar f(0)\right]\right\}$$

$$\Psi_2(Z)=\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}(\lambda_1\lambda_2)^m\left\{\left[f\left(\frac{iABh}{Z-m}\right)-f(0)\right]+\lambda_1\left[\bar f\left(\frac{iABh}{Z-B-m}\right)-\bar f(0)\right]\right\}$$

$$D_j=\begin{cases}\dfrac{f(0)-\lambda_j\bar f(0)}{1+\lambda_j} & (\lambda_j\neq-1)\\ f(0) & (\lambda_j=-1)\end{cases},\qquad Z=\frac{iABh}{z}$$

где $A=a/h$, $B=b/h$, $h=a+b$ — межцентровое расстояние.

6. Пусть, к примеру, как и в п. 4, неискаженное течение описывается комплексным потенциалом $f(z)=Uz$. Тогда

$$\Psi_1(Z)=UiABh\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}(\lambda_1\lambda_2)^m\left(\frac{1}{Z+m}+\lambda_2\frac{1}{Z+A+m}\right)$$

$$\Psi_2(Z)=UiABh\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}(\lambda_1\lambda_2)^m\left(\frac{1}{Z-m}+\lambda_1\frac{1}{Z-B-m}\right)$$

Для проверки найдем комплексный потенциал обтекания двух соприкасающихся непроницаемых включений ($\lambda_1=\lambda_2=1$). В этом случае

$$\Psi_1(Z)=UiABh\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}\left(\frac{1}{m+Z}+\frac{1}{m+A+Z}\right)$$

$$\Psi_2(Z)=-UiABh\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}\left(\frac{1}{m-Z}+\frac{1}{m+B-Z}\right)$$

На основании (5.1) получаем

$$w_0=UiABh\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}\left(\frac{1}{m+Z}-\frac{1}{m-Z}+\frac{1}{m+A+Z}-\frac{1}{m+B-Z}\right)-Uz=$$
$$=UiABh[\psi(-Z)-\psi(Z)+\psi(B-Z)-\psi(A+Z)]-Uz \tag{6.1}$$

где $\psi(z)$ – пси-функция Эйлера.

Используя известные функциональные соотношения для пси-функции [5]

$$\psi(^1/_2+Z)-\psi(^1/_2-Z)=\pi\operatorname{tg}\pi Z$$
$$\psi(Z)-\psi(-Z)=-(Z^{-1}+\pi\operatorname{ctg}\pi Z)$$

при одинаковых радиусах включений ($a=b$) выражению (6.1) удается придать особенно простой вид [6]

$$w_0=U\pi a\operatorname{cth}(\pi a/z)$$

В случае двух соприкасающихся каверн различного радиуса ($\lambda_1=\lambda_2=-1$) имеем

$$\Psi_1(Z)=UiABh\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}\left(\frac{1}{m+Z}-\frac{1}{m+A+Z}\right)=UiABh[\psi(A+Z)-\psi(Z)]$$

$$\Psi_2(Z)=-UiABh\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}\left(\frac{1}{m-Z}-\frac{1}{m+B-Z}\right)=-UiABh[\psi(B-Z)-\psi(-Z)]$$

В соответствии с (5.1) находим

$$w_0=UiABh\{\psi(A+Z)-\psi(B-Z)-$$
$$-[\psi(Z)-\psi(-Z)]\}-Uz$$
$$w_1=2UiABh[\psi(A+Z)-\psi(Z)]$$
$$w_2=-2UiABh[\psi(B-Z)-\psi(-Z)]$$

Если радиусы каверн одинаковы ($a=b$), то

$$w_0=\frac{1}{2}Uai\left\{\psi\left(\frac{1}{2}+Z\right)-\psi\left(\frac{1}{2}-Z\right)-[\psi(Z)-\psi(-Z)]\right\}-Uz=$$
$$=U\pi a\operatorname{sh}^{-1}(\pi a/z)$$

Рассмотрим теперь случай, когда каверна радиуса a соприкасается с непроницаемым включением радиуса b. В этом случае ($\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$) получаем

$$\Psi_1(Z)=UiABh\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{m+Z}+\frac{1}{m+A+Z}\right)=UiABh[\beta(A+Z)+\beta(Z)]$$

$$\Psi_2(Z)=-UiABh\sum_{m\geqslant 0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{m-Z}-\frac{1}{m+B-Z}\right)=$$
$$=UiABh[\beta(B-Z)-\beta(-Z)]$$

$$\beta(z)=\frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{z+1}{2}\right)-\psi\left(\frac{z}{2}\right)\right]$$

Согласно (5.1), имеем

$$w_0=UiABh[\beta(Z)-\beta(-Z)+$$
$$+\beta(A+Z)+\beta(B-Z)]-Uz$$
$$w_1=2UiABh[\beta(A+Z)+\beta(Z)]$$

При $a=b$ будем иметь

$$w_0={}^1/_2Uai[\beta(Z)-\beta(-Z)+$$
$$+\beta({}^1/_2+Z)+\beta({}^1/_2-Z)]-Uz$$
$$w_1=Uai[\beta({}^1/_2+Z)+\beta(Z)]$$

Привлекая функциональные соотношения для функции $\beta(z)$

$$\beta(Z)-\beta(-Z)=Z^{-1}+\pi\sin^{-1}\pi Z$$
$$\beta\left(\frac{1}{2}+Z\right)+\beta\left(\frac{1}{2}-Z\right)=\pi\cos^{-1}\pi Z$$

получим для комплексного потенциала внешнего течения более компактное выражение

$$w_0=U\pi a\left(\operatorname{ch}\frac{\pi a}{2z}+i\operatorname{sh}\frac{\pi a}{2z}\right)\left(\operatorname{sh}\frac{\pi a}{z}\right)^{-1}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Радыгин В. М., Копаев А. В.* Теорема о двух окружностях.– В кн.: Движение растворимых примесей в фильтрационных потоках. Тула, 1983, с. 52–55.
2. *Голубева О. В.* Обобщение теоремы об окружности на фильтрационные течения.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 1, с. 113–116.
3. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш школа, 1972. 368 с.
4. *Ариэ Микио, Кия Масару.* Обтекание кругового цилиндра простым потоком с поперечным сдвигом при наличии плоской стенки.– Нихон кикай гаккай ромбунсю. Trans. Japan Soc. Mech. Engrs, 1967, v. 33, № 246, p. 242–248.
5. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с
6. *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.

Жданов

Поступила в редакцию
17.VII.1985