

УДК 532.529.6

**САМОСОГЛАСОВАННЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНЫХ
ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЕРТИКАЛЬНО СТЕКАЮЩЕЙ
ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ**

КРАСНЫЙ Ю. П., МИХО В. В.

Получено уточненное по сравнению с предыдущими работами нестационарное нелинейное уравнение, описывающее волнообразование на поверхности вертикально стекающей жидкой пленки. Методом теории возмущений исследованы решения данного уравнения. Рассчитаны волновые характеристики стационарного режима стекания.

Нелинейные волны на поверхности вертикально стекающих пленок жидкости изучались экспериментально [1–3] и теоретически [3–6]. Из эксперимента известно, что даже при самых малых числах Рейнольдса ламинарное течение пленки неустойчиво. Развитие неустойчивости приводит к переходу течения в волновой режим, причем возникающие волны сначала растут по амплитуде и достигают некоторого критического ее значения, после чего волна становится стационарной. Процесс выхода волны на стационарный режим рассматривался в [7], где численными методами было показано, что вне зависимости от начальных условий волна с течением времени становится стационарной. При аналитическом подходе к задаче о волнообразовании рассматриваются обычно только характеристики установившегося течения, для выяснения которых используются различные дополнительные предположения. При этом не доказывается сам факт выхода волны на стационарный режим. Представляется, что динамика роста волны и волновые характеристики установившегося течения должны получаться естественным образом из решения нестационарного нелинейного уравнения, описывающего волнообразование.

При получении волнового уравнения, следуя [3–6], будем предполагать, что профиль гидродинамической скорости в пленке жидкости имеет автомодельный вид (см. [2]). Однако в отличие от [3–6] будем учитывать, что в слое стекающей жидкости присутствуют вязкие напряжения, которые должны быть особенно заметны при малых расходах и большой вязкости жидкости. Как будет видно из дальнейшего, наличие вязких напряжений играет существенную роль в стабилизации волнового режима при малых числах Рейнольдса.

Уравнения движения и уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости, движущейся по наклонной подложке (фиг. 1), имеют вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_x = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (P + \rho g_1 z) + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_x + g_2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_z = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (P + \rho g_1 z) + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_z \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

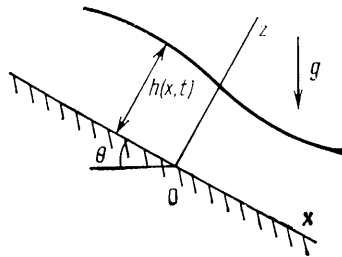
$$g_1 = g \cos \theta, \quad g_2 = g \sin \theta \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{v}(x, z, t) = (v_x, 0, v_z)$ — гидродинамическая скорость, $P(x, z, t)$ — давление, ρ, ν — плотность и кинематическая вязкость жидкости; g — ускорение свободного падения.

Систему уравнений (1)–(4) необходимо дополнить граничными условиями на твердой подложке и на свободной поверхности

$$\begin{aligned}
 v_z &= 0 \quad (z=0) \\
 (-P + \sigma_{zz})n_z + \sigma_{zx}n_x &= -(P_0 + P_\alpha)n_z \quad (z=h) \\
 (-P + \sigma_{xx})n_x + \sigma_{xz}n_z &= -(P_0 + P_\alpha)n_x \\
 P_\alpha &= -\alpha_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial h}{\partial x} / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2} \right] \\
 \sigma_{ik} &= \rho v \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)
 \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $h(x, t)$ – толщина пленки, $P_0 = \text{const}$ – атмосферное давление, P_α – капиллярное давление, α_0 – коэффициент поверхностного натяжения жидкости, σ_{ik} – тензор вязких напряжений, n_i – проекции на координат-



Фиг. 1

ные оси единичного вектора, направленного нормально к свободной поверхности. Интегрируя уравнение (2) по z с учетом граничных условий (5), получим закон изменения давления внутри жидкости

$$\begin{aligned}
 P(x, z, t) &= P_0 + P_\alpha + \rho g_1 (h - z) - 2\nu\rho \frac{1 + h'^2}{1 - h'^2} \frac{\partial v_x}{\partial x} \Big|_{z=h} + \\
 &+ \rho \int_h^z \left[\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_z - \frac{\partial v_z}{\partial t} - \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_z \right] dz, \quad h' = \frac{\partial h}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Давление $P(x, z, t)$ отличается от гидростатического капиллярного давления $P_0 + P_\alpha + \rho g_1 (h - z)$, что обусловлено наличием вязких напряжений и инерционных сил. Это обстоятельство не учитывалось в [3–6].

Согласно автомодельному приближению [2], можно перейти от локальной гидродинамической скорости жидкости $v_x(x, z, t)$ к средней по сечению пленки скорости $v(x, t)$

$$v_x(x, z, t) = v(x, t) f\left(\frac{z}{h}\right), \quad \int_0^1 f(\xi) d\xi = 1$$

Будем рассматривать длинные волны малой амплитуды. В соответствии с этим предположением возникают два малых параметра: $\beta = h_0/\lambda \ll 1$ и $\alpha = a/h_0 \ll 1$, где h_0 – средняя толщина пленки, λ – характерный линейный масштаб возмущения, a – характерная амплитуда волн.

Перейдем к новым искомым функциям

$$\psi = \frac{h(x, t) - h_0}{h_0}, \quad u = \frac{v(x, t) - \langle v \rangle}{v_0}$$

где v_0 – характерная скорость распространения волн, а $\langle v \rangle$ – средняя по

сечению скорость течения в ламинарном режиме. Ясно, что в случае горизонтальной пленки $\langle v \rangle = 0$; если же пленка стекает по наклонной подложке, то $\langle v \rangle = v_0 = Q/h_0$, где Q — расход жидкости.

Введем новые безразмерные переменные и параметры

$$z' = \frac{z}{h_0}, \quad x' = \frac{x}{\lambda}, \quad t' = \frac{v_0}{\lambda} t, \quad v' = \frac{v}{v_0 h_0} = \frac{1}{\text{Re}}$$

$$\alpha_0' = \frac{\alpha_0}{\rho v_0^2 h_0}, \quad g_i' = \frac{h_0}{v_0^2} g_i, \quad v_0' = \frac{\langle v \rangle}{v_0}$$

Следуя [8], будем полагать, что по порядку величины $\alpha \sim \beta^2$. Оставим в уравнении (1) только члены до второго порядка малости по $\alpha \sim \psi \sim u$ включительно. Проинтегрируем это уравнение по z от 0 до h с учетом (3) и (6) и дополним его уравнением свободной поверхности

$$v_z = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} v_x \quad (z=h)$$

которое с учетом (3) удобно переписать в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^h v_x dz \right] = 0$$

В результате получим систему двух дифференциальных уравнений относительно ψ и u

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + (2\gamma - 1)(v_0' + u) \frac{\partial u}{\partial x'} + [(\gamma - 1)v_0'^2 + g_1'] \frac{\partial \psi}{\partial x'} + (\gamma - 1)(2v_0' u - v_0'^2 \psi) \frac{\partial \psi}{\partial x'} =$$

$$= \beta^2 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x'^3} [(\alpha_0' + \delta_2 v_0'^2) \psi - \delta_1 v_0' u] - \frac{\partial^3}{\partial x'^2 \partial t'} (\sigma_1 u - \sigma_2 v_0' \psi) \right\} +$$

$$+ v' \beta \frac{\partial^2}{\partial x'^2} (\chi u - \mu_2 v_0' \psi) + \beta^{-1} [g_2' - v' (\mu_1 - 3\mu_2) (v_0' - 2v_0' \psi + 3v_0' \psi^2 + u - 2u\psi)]$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t'} + v_0' \frac{\partial \psi}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial x'} (u\psi) = 0$$

Здесь

$$\gamma = \int_0^1 f^2(\xi) d\xi, \quad \mu_1 = \frac{df}{d\xi} \quad (\xi=0), \quad \mu_2 = \frac{df}{d\xi}, \quad \chi = f(\xi) \quad (\xi=1)$$

$$\delta_1 = \int_0^1 d\xi \int_1^\xi d\xi_1 f(\xi_1) \int_0^{\xi_1} f(\xi_2) d\xi_2, \quad \delta_2 = \int_0^1 d\xi \int_1^\xi d\xi_1 f(\xi_1) \int_0^{\xi_1} \xi_2 \frac{df}{d\xi_2} d\xi_2$$

$$\sigma_1 = \int_0^1 d\xi \int_1^\xi d\xi_1 \int_0^{\xi_1} f(\xi_2) d\xi_2, \quad \sigma_2 = \int_0^1 d\xi \int_1^\xi d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \xi_2 \frac{df}{d\xi_2} d\xi_2$$

При волнообразовании на горизонтальной подложке скорость $v_x(x, z, t)$ не зависит от z (см. [8]), поэтому $f(\xi) \equiv 1$. Вычислив параметры (8) и подставив их в (7), получим уравнение Кортевега — де Вриза — Бюргера для волн на мелкой воде.

В случае стекания жидкой пленки по вертикальной стенке функция профиля скорости $f(\xi)$ принимает вид (см. [2, 4])

$$f(\xi) = 3\xi(1 - 1/2\xi)$$

Вычислив параметры (8) и проделав преобразования, аналогичные приведенным в [3], сведем систему (7) (при $\beta=1$) к уравнению

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t'} + 1,69 \frac{\partial}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t'} + 0,71 \frac{\partial}{\partial x'} \right) \psi - 1,7 \left(\frac{\partial}{\partial t'} + 1,3 \frac{\partial}{\partial x'} \right) \times \\ & \times \left(\frac{\partial}{\partial t'} + 0,81 \frac{\partial}{\partial x'} \right) \psi^2 + \left[(\alpha_0' - 0,52) \frac{\partial^4}{\partial x'^4} - 0,275 \frac{\partial^4}{\partial x'^2 \partial t'^2} - \right. \\ & \left. - 0,707 \frac{\partial^4}{\partial x'^3 \partial t'} \right] \psi = \frac{3}{\text{Re}} \left[- \left(\frac{\partial}{\partial t'} + 3 \frac{\partial}{\partial x'} \right) \psi + 3 \left(\frac{\partial}{\partial t'} + 2 \frac{\partial}{\partial x'} \right) \psi^2 + \right. \\ & \left. + 0,5 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'} \right) \psi \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Это уравнение отличается от полученных ранее в [3, 4] численными коэффициентами и наличием в правой части последнего слагаемого, связанного с учетом в выражении (6) для $P(x, z, t)$ динамических и вязкостных членов. Уравнение (9) справедливо как при малых числах Рейнольдса ($\text{Re} \leq 1$), так и при больших ($\beta \text{Re} \gg 1$).

Рассмотрим сначала последний случай. При $\beta \text{Re} \gg 1$ с точностью до первого порядка малости по α (9) принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} + 1,69 \frac{\partial}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t'} + 0,71 \frac{\partial}{\partial x'} \right) \psi = 0$$

Подставляя следующее отсюда соотношение $\partial/\partial t' \approx -1,69\partial/\partial x'$ в члены второго порядка малости уравнения (9) и переходя к новой искомой функции $w = 1,3\psi$, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial t'} + 1,7 \frac{\partial w}{\partial x'} + w \frac{\partial w}{\partial x'} - \alpha_0' \frac{\partial^3 w}{\partial x'^3} = \epsilon I \\ & I = \int \left(\frac{\partial w}{\partial t'} + 3 \frac{\partial w}{\partial x'} \right) dx' \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введен малый параметр $\epsilon = 3/\text{Re}$. Данное уравнение совпадает с полученным в [3]. При дальнейшем его исследовании (см. [3]) в правой части делалась замена производной по времени $\partial w/\partial t'$ на $-c' \partial w/\partial t' \approx -1,7 \partial w/\partial x'$ и производилось интегрирование. На самом деле, такая замена не совсем правомерна, так как фазовая скорость $c' = c/v_0$ мало отличается от значения $c' = 1,7$ только в том случае, если амплитуда волны a мала и зависимость c' от амплитуды можно пренебречь. С увеличением a волны становятся нелинейными и c' начинает существенно зависеть от амплитуды. Важно обратить внимание на тот факт, что уравнение (10) представляет собой уравнение Кортевега — де Вриза с подкачкой энергии, описываемой правой частью. Поэтому эволюция волны и выход ее на стационарный режим должны определяться конкуренцией слагаемых, входящих в правую часть уравнений (10). И хотя величина ϵI не велика по сравнению с другими членами уравнения, с ней следует обходиться более корректно.

В рамках данного приближения параметр ϵ мал, поэтому для решения уравнения (10) можно использовать метод медленно меняющихся коэффициентов (см. [9, 10]). В соответствии с данным методом будем считать правую часть уравнения (10) малым возмущением, влияющим на решение этого уравнения. При отсутствии возмущения, т. е. при $\epsilon = 0$, решение имело бы следующий вид (см. [8]):

$$w_0(x', t') = -b^2 \varphi(\xi)$$

$$\varphi(\xi) = dn^2(\xi, s) - \frac{E(s)}{K(s)}, \quad \xi = b \frac{x' - \eta(t')}{\sqrt{12\alpha_0'}}, \quad \eta(t') = c't' \quad (11)$$

$$\lambda' = \frac{\lambda}{h_0} = \frac{2}{b} \sqrt{12\alpha_0'} K(s) \quad (12)$$

$$c' = 1,7 + \left[\frac{E(s)}{K(s)} - \frac{2-s^2}{3} \right] b^2 = 1,7 + mb^2 \quad (13)$$

Здесь $dn(\xi, s)$ — эллиптическая функция Якоби с модулем s и периодом $2K(s)$, что соответствует длине волны λ' ; $K(s)$ и $E(s)$ — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода, c' — фазовая скорость волны.

Параметр s ($0 \leq s \leq 1$) служит мерой нелинейности волны. При $s \ll 1$ эллиптические функции близки к тригонометрическим, а при $s=1$ периодическая волна переходит в одиночную. Параметр b связан с амплитудой волны. Действительно, если через a обозначить разность между максимальным и минимальным значениями $w_0(x', t')$, то в соответствии со свойствами функции $dn(\xi, s)$ амплитуда $a = b^2 s^2$. Решение $w_0(x', t')$ выбрано так, чтобы

$$\int_0^{\lambda} w_0(x', t') dx' = 0$$

Таким образом, общее решение уравнения (10) ищем в виде разложения (см. [10, 11])

$$w(x', t') = w_0(x', t') + \varepsilon w_1(\xi, t') + \dots \quad (14)$$

где функция $w_1(\xi, t')$ периодична по ξ с периодом $2K(s)$, а зависимость величин b^2 и η от времени определяется дифференциальными уравнениями

$$\frac{db^2}{dt'} = \varepsilon A_1(b^2) + \dots, \quad \frac{d\eta}{dt'} = c'(b^2) + \varepsilon B_1(b^2) + \dots \quad (15)$$

В начальный момент времени имеем

$$w_1(\xi, t') = 0, \quad b^2(t') = b_0^2 \quad (t' = 0)$$

Это означает, что при $s \ll 1$ в качестве начальных условий выбирается синусоидальная волна, а при $s=1$ — уединенная волна. Подстановка (14), (15) в волновое уравнение (10) приводит к следующему уравнению для функции $w_1(\xi, t')$:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t'} - \frac{b^3}{\sqrt{12\alpha_0'}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[m w_1 + \frac{1}{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} + \varphi w_1 \right] = f[\varphi] \quad (16)$$

$$f[\varphi] = -b^2 [1,3 - mb^2] \varphi + A_1 \left(\varphi + \frac{\xi}{2} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) - \frac{b^3}{\sqrt{12\alpha_0'}} B_1 \frac{d\varphi}{d\xi} \quad (17)$$

Введенные в (15) неизвестные функции $A_1(b^2)$ и $B_1(b^2)$ определяются из условия отсутствия в $w_1(\xi, t')$ членов, возрастающих со временем. Как было показано в [10], это условие сводится к требованию ортогональности функций φ и $d\varphi/d\xi$ к правой части уравнения (16), т. е. к выполнению условий

$$\langle f[\varphi] \varphi \rangle = \left\langle f[\varphi] \frac{d\varphi}{d\xi} \right\rangle = 0, \quad \langle G \rangle = \int_0^{2K(s)} G(\xi) d\xi \quad (18)$$

Из (18) сразу находим

$$A_1(b^2) = b^2 (\beta_1 - \gamma_1 b^2), \quad B_1(b^2) = \frac{q_1}{b^3} A_1(b^2)$$

$$\beta_1 = \frac{1,3\langle\varphi^2\rangle}{\langle\varphi^2\rangle + 1/2\langle\xi\varphi\varphi'\rangle}, \quad \gamma_1 = \frac{m}{1,3}\beta_1, \quad q_1 = \sqrt{3\alpha_0'}\langle\xi(\varphi')^2\rangle\langle(\varphi')^2\rangle^{-1},$$

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{d\xi}$$

Подставляя выписанные соотношения в первое из уравнений (15) и решая его, получаем

$$b^2 = \frac{b_0^2\beta_1\gamma_1^{-1}\exp(\varepsilon\beta_1 t')}{\beta_1\gamma_1^{-1} + b_0^2[\exp(\varepsilon\beta_1 t') - 1]} \quad (19)$$

Данное соотношение позволяет исследовать динамику изменения амплитуды возникающих волн. Из (19) видно, что если начальное значение амплитуды волны $a_0 = b_0^2 s^2$ равно нулю, то ее значение $a = b^2 s^2$ остается равным нулю для любого момента времени t' и ламинарный режим стекания не нарушается. Однако такое течение неустойчиво. Так как при стекании жидкости случайные малые толчки практически неизбежны, то на поверхности пленки автоматически возбуждаются волны с монотонно нарастающей амплитудой. Для почти гармонических возмущений значение параметра s близко к нулю. При этом $\beta_1 > 0$ и $\gamma_1 > 0$. При выполнении данных соотношений величина $b^2(t')$ с увеличением времени плавно стремится к стационарному устойчивому значению $b_{st}^2 = \beta_1/\gamma_1$. Вследствие этого волна выходит на стационарный режим с амплитудой $a_{st} = b_{st}^2 s^2 = 1,3s^2/m$. Стабилизация волнового режима происходит благодаря тому, что при стационарном значении амплитуды a_{st} член $3\partial w/\partial x'$ в правой части уравнения (10), соответствующий положительной подкачке энергии, компенсируется членом $\partial w/\partial t'$, ответственным за отрицательную подкачку. Дальнейшее увеличение амплитуды привело бы к превалированию в правой части (10) слагаемых, соответствующих отрицательной подкачке энергии, что вернуло бы величину a к устойчивому стационарному значению a_{st} . Заметим, что при $s \rightarrow 0$ из (12), (13) следует

$$c_{st}' = 3, \quad \lambda_{st}' = 5,51\sqrt{\alpha_0'} \quad (20)$$

Иная ситуация наблюдается для сильно нелинейных уединенных волн, для которых параметр s близок к единице. При этом $\beta_1 > 0$, $\gamma_1 < 0$ и при увеличении времени знаменатель выражения (19) обращается в ноль. В результате величина $b^2(t')$ неограниченно растет. Таким образом, солитонные решения уравнения (9) при больших значениях числа Рейнольдса неустойчивы.

Рассмотрим теперь случай малых чисел Рейнольдса, когда $Re \ll 1$. При выполнении этого условия для длинных волн в линейном приближении по ψ из (9) следует

$$\frac{\partial\psi}{\partial t'} \approx -3 \frac{\partial\psi}{\partial x'}$$

Поэтому можно предположить, что при учете в (9) нелинейных членов фазовая скорость волны должна в соответствии с малостью амплитуды a не слишком отличаться от значения $c' = 3$. Исходя из этого в членах второго порядка малости уравнения (9) можно использовать соотношение:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t'} \approx [-3 + c_1 a] \frac{\partial\psi}{\partial x'}$$

где c_1 — некий неизвестный коэффициент.

В результате такой процедуры и перехода к новой искомой функции $w = 6\psi$ получаем

$$\frac{\partial w}{\partial t'} + 3 \frac{\partial w}{\partial x'} + w \frac{\partial w}{\partial x'} + \frac{\partial^3 w}{\partial x'^3} = \varepsilon_1 \left[3,6 \frac{\partial^2 w}{\partial x' \partial t'} + 7,8 \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} + 1,07 \frac{\partial^2 w^2}{\partial x'^2} - \right.$$

$$-(\alpha_0' - 1) \frac{\partial^4 w}{\partial x'^4} \quad (21)$$

где $\varepsilon_1 = \text{Re}/3$ — малый параметр. К данному уравнению применимы те же соображения, которые использовались для исследования волнового уравнения (10), поэтому решение $w(x', t')$ можно искать в виде

$$w(x', t') = b^2 \varphi(\xi) + \varepsilon_1 w_1(\xi, t') + \dots$$

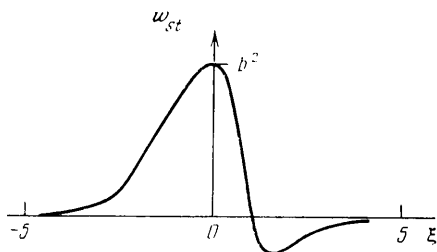
$$\xi = b \frac{x' - \eta(t')}{\sqrt{12}}, \quad \frac{db^2}{dt'} = \varepsilon_1 A_1(b^2) + \dots, \quad \frac{d\eta}{dt'} = c'(b^2) + \varepsilon_1 B_1(b^2) + \dots$$

$$w_1(\xi, t') = 0, \quad b^2(t') = b_0^2 \quad (t' = 0)$$

Для длины волны и фазовой скорости получаем формулы

$$\lambda' = \frac{2}{b} \sqrt{12} K(s), \quad c' = 3 - mb^2 \quad (22)$$

Исследование, аналогичное проведенному выше, показывает, что в пределе малых чисел Рейнольдса волна выходит на устойчивый стационарный режим как при почти гармонических возбуждениях ($s \ll 1$), так и



Фиг. 2

при солитонных ($s=1$). При этом величина b^2 стремится к стационарному значению

$$b_{st}^2 = 3 \left\langle \varphi \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} \right\rangle \left(3,6 \left\langle \varphi \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} \right\rangle + 1,07 \left\langle \varphi \frac{d^2 \varphi^2}{d\xi^2} \right\rangle - \frac{\alpha_0' - 1}{12} \left\langle \varphi \frac{d^4 \varphi}{d\xi^4} \right\rangle \right)^{-1} \quad (23)$$

В случае почти гармонических волн $s \rightarrow 0$, $\varphi(\xi) \approx (s^2/2) \cos 2\xi$ и из (22), (23) сразу следует, что в стационарном режиме у таких волн

$$b_{st}^2 = \frac{9}{\alpha_0' + 2,6}, \quad c_{st}' = 3 - \frac{b_{st}^2}{3}, \quad \lambda_{st}' = \frac{\pi \sqrt{12}}{b_{st}} \quad (24)$$

Естественно, что установившееся значение амплитуды $a_{st} \sim s^2 b_{st}^2 \rightarrow 0$. В случае уединенных волн $s=1$, $\varphi(\xi) = 1/\text{ch}^2 \xi$ имеем

$$b_{st}^2 = \frac{12,6}{\alpha_0' - 1}, \quad c_{st}' = 3 + \frac{b_{st}^2}{3}, \quad \lambda_{st}' \rightarrow \infty \quad (25)$$

Величина стационарной амплитуды a (с учетом того, что $w = 6\psi$) равна $b_{st}^2/6$. Заметим, что в случае уединенных волн амплитуда a не мала, поэтому имеет смысл решать уравнение, аналогичное (16) в случае малых чисел Рейнольдса, для определения поправки $w_1(\xi, t')$ к форме волны. Соответствующее решение приводит в стационарном режиме к следующему результату:

$$w_{st}(\xi) = b_{st}^2 \varphi(\xi) + \varepsilon_1 w_{1st}(\xi) + \dots = \frac{b_{st}^2}{\text{ch}^2 \xi} \{1 - D \text{th} \xi \ln(\text{ch} \xi)\} \quad (26)$$

$$D = b_{st} \sqrt{12} \text{Re}(\alpha_0' + 1,14) / 24$$

Здесь b_{st} определено в (25). Отметим, что выражение (26) получено методом возмущений по малому параметру $\epsilon_1 = \text{Re}/3$. Поэтому профиль волны (26) должен хорошо описывать эксперимент лишь при $\text{Re} \ll 1$. Для примера на фиг. 2 изображен вид функции $w_{st}(\xi)$ при $D=3$. Видно, что передний фронт солитонного решения искажается и возникает тенденция к появлению у солитона осциллирующего предвестника. Однако ярко выраженные осцилляции появляются лишь при учете следующих членов теории возмущений. Подобный же профиль солитонного решения получен для малых Re в [6, 12] численными методами. При увеличении числа Рейнольдса осциллирующая добавка к солитонному решению в (26) расстет, что согласуется с результатами [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости.— ЖЭТФ, 1949, т. 19, вып. 2, с. 105–120.
2. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В., Орлов В. В. Мгновенный профиль скорости в волновой пленке жидкости.— Инж.-физ. журн., 1973, т. 33, № 3, с. 399–404.
3. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волнообразование при течении пленки жидкости на вертикальной стенке. ПМТФ, 1979, № 6, с. 77–87.
4. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости.— ЖЭТФ, 1948, т. 18, № 1, с. 3–18.
5. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1, с. 43–51.
6. Цвелодуб О. Ю. Стационарные бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4, с. 142–145.
7. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О нестационарных волнах в слое вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 3, с. 151–154.
8. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
9. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.
10. Мак-Лафлин Д., Скотт Э. Многосолитонная теория возмущений.— В сб.: Солитоны в действии. М.: Мир, 1981, с. 210–268.
11. Красный Ю. П., Михо В. В. Нелинейные волны на поверхности свободно стекающей вертикальной пленки жидкости.— Инж.-физ. журн., 1985, т. 48, № 3, с. 375–381.
12. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. Режимы двумерных волн тонкого слоя вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 3, с. 63–67.

Одесса

Поступила в редакцию
12.XI.1984.