

УДК 532.529

**МАССОПЕРЕНОС К ПАКЕТАМ И ПУЗЫРЯМ
В ПСЕВДООЖИЖЕННОМ СЛОЕ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ
РЕЙНОЛЬДСА**

ГАЛИЕВА Л. М., ГУПАЛО Ю. П.

На основании модели установившегося движения жидкой и твердой фаз вблизи пакета частиц или пузыря в развитом псевдоожигженном слое в приближении Стокса [1] исследуется процесс массопередачи к пакету (пузырю) при достаточно быстром его всплывании, когда образуется область замкнутой циркуляции огибающего агента (облако). Внутри такого облака, окружающего локальную неоднородность псевдоожигженного слоя, происходит интенсивное перемешивание жидкой фазы, а массообмен между облаком и окружающей средой осуществляется за счет диффузии. Методом сращиваемых асимптотических разложений получено аналитическое решение задачи о поле концентрации и диффузионном потоке вещества на поверхность облака при малых и больших числах Пекле. Последнее определяется по относительной скорости пакета, радиусу облака и эффективному коэффициенту диффузии.

В предельном случае нулевой концентрации твердой фазы внутри пакета полученное решение описывает массопередачу к пузырю в псевдоожигженном слое. Проводится сравнение с соответствующими результатами, полученными ранее в рамках модели твердой фазы как невязкой жидкости [2]. Показано, что влияние вязкости на массопередачу к пузырю наиболее существенно при больших числах Пекле и поправка к полному диффузионному потоку на поверхность области замкнутой циркуляции за счет влияний вязкости может достигать 40%.

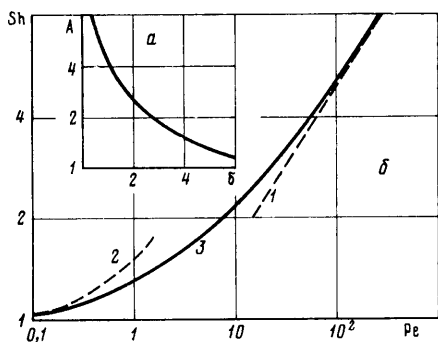
1. Постановка задачи о массообмене пакета с непрерывной фазой. Рассмотрим в приближении Стокса движение сферического пакета частиц, пористость которого больше пористости окружающего псевдоожигженного слоя. При скорости пакета U_d , превышающей по величине скорость жидкой фазы v_0 в промежутках между частицами, пакет заключен внутри концентрического с ним облака замкнутой циркуляции жидкой фазы [1]. Радиус облака a_c выражается через единственный действительный корень кубического уравнения [1]

$$\frac{2\sigma^3}{\delta+1} \left(\frac{\delta\beta}{4(1+\beta)} - \frac{\alpha-1}{\alpha+2} \right) - \frac{2+3\beta}{2(1+\beta)} \frac{\sigma\delta}{\delta+1} + 1 = 0 \quad (1.1)$$

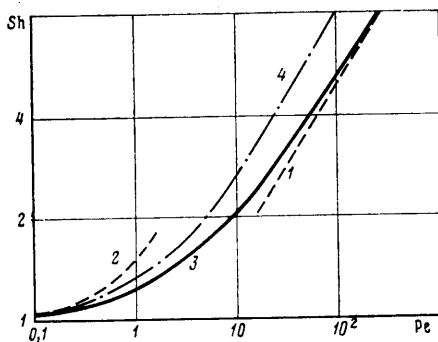
$$\sigma = \frac{a}{a_c}, \quad \delta = \frac{U_d}{v_0}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon'k'}{\varepsilon k}, \quad \beta = \frac{\mu_s'}{\mu_s}, \quad U_d = \frac{2d_s(\varepsilon-\varepsilon')ga^2}{3\mu_s} \frac{1+\beta}{2+3\beta}$$

Здесь a — радиус пакета, d_s и μ_s — плотность и эффективная сдвиговая вязкость твердой фазы, k и ε — коэффициент проницаемости и пористость слоя, штрихом отмечены величины, относящиеся к области течения внутри пакета. На фиг. 1, a в соответствии с (1.1) изображена зависимость $A = a_c/a$ от δ для случая ожигжения слоя песка крупностью 0,3–0,5 мм воздухом [1]. В качестве примера рассматривается пакет с пористостью $\varepsilon' = 0,65$ в слое с пористостью $\varepsilon = 0,45$.

В сферической системе координат (r, θ, φ) , связанной с центром пакета, с полярной осью, направленной вертикально вниз, рассмотрим массообмен пакета с непрерывной фазой псевдоожигженного слоя. Функция



Фиг. 1



Фиг. 2

тока, описывающая движение жидкой фазы вне пакета, имеет вид [1]

$$\psi_* = -U_a a^2 \left(\frac{r_*^2}{2a^2} - \frac{2+3\beta}{4(1+\beta)} \frac{r_*}{a} + \frac{\beta}{4(1+\beta)} \frac{a}{r_*} \right) \sin^2 \theta - v_0 a^2 \left(\frac{r_*^2}{2a^2} + \frac{\alpha-1}{\alpha-2} \frac{a}{r_*} \right) \sin^2 \theta$$

где звездочками отмечены размерные величины. Внутри облака происходит интенсивное перемешивание жидкости, и задача о массообмене сводится к определению диффузионного потока на границу облака.

Перейдем к безразмерным переменным, выбрав в качестве масштабов длины, концентрации и скорости радиус области замкнутой циркуляции a_c , концентрацию диффундирующего вещества в невозмущенном потоке C_∞ и скорость жидкости относительно пакета $|U_a - v_0|$.

В безразмерной форме в сферической системе координат уравнение стационарной конвективной диффузии и функция тока ψ имеют вид

$$\frac{\partial(c, \psi)}{\partial(r, \theta)} = \frac{1}{Pe} \sin \theta \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) \right] \quad (1.2)$$

$$Pe = a_c |U_a - v_0| / D$$

$$\psi = \frac{1}{2}(r-1) \left[r - \kappa \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right] \sin^2 \theta, \quad \kappa = \frac{2\sigma^3}{\delta+1} \left(\frac{\beta}{4(1+\beta)} - \frac{\alpha-1}{\alpha+2} \right) \quad (1.3)$$

Здесь Pe — число Пекле, определенное по эффективному коэффициенту диффузии D , r — безразмерная радиальная координата.

Условие полного поглощения диффундирующего вещества на границе области замкнутой циркуляции и постоянства концентрации вдали от нее имеет вид

$$r=1, \quad c=0; \quad r \rightarrow \infty, \quad c=1 \quad (1.4)$$

Ниже будет построено аналитическое решение задачи (1.2)–(1.4) в предельном случае $Pe \gg 1$, соответствующем преобладанию конвективного массопереноса над диффузионным, а также в противоположном случае $Pe \ll 1$. В результате будет найдено поле концентрации вне облака и диффузионный поток на его поверхность.

2. Большие числа Пекле. Постановка задачи (1.2)–(1.4) совпадает с постановкой задачи о массообмене капли с ламинарным потоком жидкости при малых числах Рейнольдса, если отношение вязкостей капли и окружающей жидкости в функции тока, соответствующей решению Рыбчинского — Адамара, заменить выражением $2\kappa/(1-\kappa)$. Заметим, что при $Pe \rightarrow \infty$ имеем $\delta \rightarrow \infty$, $a/a_c \rightarrow 1$, а следовательно, $\kappa \rightarrow \beta/[2(1+\beta)]$, как в решении Рыбчинского — Адамара.

При больших числах Пекле задача сводится к решению уравнения диффузионного погранслоя с условиями (1.4). Решение этой задачи ищется в виде асимптотического ряда по малому параметру $\varepsilon = \text{Pe}^{-1/2}$ [2]

$$c = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\varepsilon) c_n, \quad c_0(\psi, \tau) = \text{erf}\left(\frac{\psi}{2\sqrt{\tau}}\right)$$

$$n \geq 1, \quad c_n(\psi, \tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\tau} [G(\psi, x, \tau-t) - G(\psi, -x, \tau-t)] f_n(x, t) dt dx$$

$$G(\psi, x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{(\psi-x)^2}{4\tau}\right\}$$

$$f_1(x, t) = \frac{2}{A(t)\sqrt{\pi t}} \left\{ 1 + \left(B(t) - 1 + tA(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{B(t)}{A(t)} \right] \right) \frac{x^2}{2t} \right\} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

$$\tau = T(\theta) = \int_0^{\pi} \lambda_1(x) \sin x dx = 1/2 [1 - 2\kappa] \left(2/3 + \cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right)$$

$$\psi = \varepsilon(r-1)\lambda_1(\theta), \quad \theta = T^{-1}(\tau), \quad A(\tau) = \lambda_1(T^{-1}(\tau)), \quad B(\tau) = \frac{\lambda_2(T^{-1}(\tau))}{\lambda_1(T^{-1}(\tau))}$$

$$\lambda_1(\theta) = 1/2(1-2\kappa)\sin^2 \theta, \quad \lambda_2(\theta) = 1/2(1-\kappa)\sin^2 \theta$$

$$j = \left(\frac{\partial c}{\partial r} \right)_{r=1}, \quad I = \int_S j ds = 2\pi \int_0^{\pi} j(\theta) \sin \theta d\theta$$

где S — поверхность облака, j, I — безразмерные локальный и полный диффузионные потоки вещества на поверхность облака замкнутой циркуляции, охватывающего пакет. Используя соотношение (2.1), а также тот факт, что в окрестности задней критической точки концентрация имеет порядок ε^2 [2], с точностью до $O(\varepsilon)$ получаем

$$j(\theta) = j_0(\theta) + \text{Pe}^{-1/2} j_1(\theta), \quad j_0(\theta) = \left[\frac{3 \text{Pe}}{2\pi} (1-2\kappa) \frac{(1-\cos \theta)^2}{2-\cos \theta} \right]^{1/2}$$

$$j_1(\theta) = \lambda_1(\theta) \int_0^{\infty} \int_0^{\tau} \Lambda(\kappa, \tau-t) f_1(x, t) dt dx$$

$$\Lambda(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{x}{\tau^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right), \quad I = I_0 + \text{Pe}^{-1/2} I_1, \quad I_0 = \int_S j_0 ds$$

$$I_1 = \int_S j_1 ds, \quad I_0 = 8 \sqrt{\frac{\pi}{6}} (1-2\kappa)^{1/2} \text{Pe}^{1/2}, \quad \text{Pe}^{1/2} I_1 = 3\sqrt{3} \frac{(1-\kappa/2)}{(1-2\kappa)}$$

$$\text{Sh} = \frac{I}{4\pi} = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (1-2\kappa)^{1/2} \text{Pe}^{1/2} + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \frac{(1-\kappa/2)}{(1-2\kappa)} \quad (2.2)$$

При больших числах Пекле имеем $\kappa = \beta / [2(\beta+1)]$, т. е. выражения для концентрации, диффузионных потоков и числа Шервуда в случаях капли и облака замкнутой циркуляции совпадают.

На фиг. 1, б прямой I показана зависимость числа Шервуда от Pe , рассчитанная по формуле (2.2) при $\beta = 0,43$, что соответствует отношению

эффективных сдвиговых вязкостей пакета с пористостью $\varepsilon' = 0,65$ и внешнего псевдооживленного слоя с пористостью $\varepsilon = 0,45$. Песок крупностью $0,3-0,5$ мм ожигался воздухом [1]. Эффективный коэффициент диффузии положен равным $100 \text{ см}^2/\text{с}$, что соответствует экспериментальным данным [5].

3. Малые числа Пекле. Построим решение задачи (1.2)–(1.4) методом срачиваемых асимптотических разложений по малому числу Пекле. Введем новую переменную $z = (C_\infty - C)/C_\infty$, тогда задача (1.2)–(1.4) переишется следующим образом:

$$\Delta z = \frac{\text{Pe}}{r^2} \frac{\partial(\psi, z)}{\partial(r, \mu)} \quad (\mu = \cos \theta) \quad (3.1)$$

$$r=1, \quad z=1, \quad r \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

Внутреннее и внешнее асимптотические разложения соответственно в областях $\Omega^{(i)} = \{1 \leq r \leq O(\text{Pe}^{-1})\}$ и $\Omega^{(e)} = \{O(\text{Pe}^{-1}) \leq r\}$ представляются в виде

$$z^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^{(i)} (\text{Pe}) z_n^{(i)}(r, \mu), \quad z^{(e)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^{(e)} (\text{Pe}) z_n^{(e)}(\rho, \mu) \quad (3.3)$$

$$\rho = r \text{Pe}, \quad \frac{\varepsilon_{n+1}^{(i)}}{\varepsilon_n^{(i)}} \rightarrow 0, \quad \frac{\varepsilon_{n+1}^{(e)}}{\varepsilon_n^{(e)}} \rightarrow 0 \quad (\text{Pe} \rightarrow 0)$$

Во внешней области введем также нормированную функцию тока, $\psi^{(e)} = \psi \text{Pe}^2$, тогда из (3.1), (3.2), (1.3) получим

$$\Delta^{(e)} z^{(e)} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial(\psi^{(e)}, z^{(e)})}{\partial(\rho, \mu)} \quad (3.4)$$

$$\rho \rightarrow \infty, \quad z^{(e)} \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

$$\psi^{(e)} = \left\{ \rho^2 - \lambda \rho \text{Pe} + \kappa \frac{\text{Pe}^3}{\rho} \right\} \frac{1 - \mu^2}{2} \quad (3.6)$$

$$\lambda = \frac{2 + 3\beta}{2(1 + \beta)} \frac{\sigma \delta}{\delta + 1}, \quad \kappa = \frac{2\sigma^3}{\delta + 1} \left(\frac{\delta \beta}{4(1 + \beta)} - \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2} \right)$$

Здесь $\Delta^{(e)}$ – оператор Лапласа по переменным ρ и μ . Члены внутреннего разложения определяются из решения задачи (3.1), (3.2) с функцией тока (1.3), константы, возникающие при решении задач (3.1), (3.2), (1.3) и (3.4)–(3.6), находятся из условия срачивания разложений (3.3)

$$z^{(i)}(r \rightarrow \infty, \mu) \cong z^{(e)}(\rho \rightarrow 0, \mu) \quad (3.7)$$

Эта задача аналогична рассмотренной в [2] задаче о диффузии к твердой частице, однако в данном случае функция тока имеет другой вид.

Не ограничивая общности, полагаем $\varepsilon_0^{(i)} = 1$. Из условий (3.2) и (3.5) следует, что члены разложений (3.3) удовлетворяют условиям

$$z_0^{(i)}(1, \mu) = 1; \quad n \geq 1, \quad z_n^{(i)}(1, \mu) = 0 \quad (3.8)$$

$$n \geq 0, \quad z_n^{(e)}(\rho \rightarrow \infty, \mu) = 0 \quad (3.9)$$

Нулевой член внешнего разложения, очевидно, имеет вид $z_0^{(e)} = 0$.

После подстановки (3.3), (1.3), (3.6) в (3.1) и (3.4), выделяя старшие члены по Pe , получаем, что функции $z_0^{(i)}$ и $z_1^{(e)}$ должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta z_0^{(i)} = 0 \quad (3.10)$$

$$\Delta z_1^{(e)} = 0, \quad \Lambda \equiv \Delta^{(e)} - \mu \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1 - \mu^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \mu} \quad (3.11)$$

После подстановки $z_1^{(e)} = x \exp({}^{1/2}\rho\mu)$ уравнение (3.11) принимает вид уравнения Гельмгольца

$$\Delta^{(e)}x = {}^{1/4}x \quad (3.12)$$

Общие решения уравнений (3.10) и (3.12), удовлетворяющие граничным условиям (3.8) и (3.9), записываются следующим образом:

$$z_0^{(i)} = (1-a_0) + \frac{a_0}{r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r^{-(n+1)} - r^n) P_n(\mu)$$

$$x = \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n K_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\right) P_n(\mu)$$

$$K_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{1/2} e^{-1/2\rho} \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{(n-m)! m! \rho^m}$$

где $K_{n+1/2}(x)$ — модифицированная функция Бесселя, $P_n(\mu)$ — полиномы Лежандра первого рода, a_n, A_n — постоянные. Определив их из условия сращивания (3.7), получим

$$z_0^{(i)} = \frac{1}{r}, \quad z_1^{(e)} = \frac{1}{\rho} \exp\left[\frac{\rho}{2}(\mu-1)\right], \quad \varepsilon_i^{(e)}(\text{Re}) = \text{Re} \quad (3.13)$$

Из условий (3.7) и (3.13) следует, что $\varepsilon_1^{(i)}(\text{Re}) = \text{Re}$.

Уравнение для $z_1^{(i)}$ и его решение с граничным условием (3.8) имеют вид

$$\Delta z_1^{(i)} = -\left(1 - \frac{\lambda}{r} + \frac{\kappa}{r^3}\right) \frac{\mu}{r^2} \quad (3.14)$$

$$z_1^{(i)} = b_0 \left(-1 + \frac{1}{r}\right) + \left[\left(-b_1 + \frac{3}{4}\kappa\right)r + \frac{b_1}{r^2} + \left({}^{1/2} - \frac{\lambda}{2r} - \frac{\kappa}{4r^3}\right)\right] \mu +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} b_k (r^{-(k+1)} - r^k) P_k(\mu)$$

Из условия сращивания и выражений (3.13) следует, что

$$z_1^{(i)}(r \rightarrow \infty, \mu) = (\mu-1)/2 \quad (3.15)$$

$$z_1^{(i)} = {}^{1/2} \left(-1 + \frac{1}{r}\right) + \left[\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2r} + \frac{\kappa}{4} \left(\frac{3}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right)\right] \mu \quad (3.16)$$

Из (3.7) и выражений (3.13), (3.16) следует, что $\varepsilon_2^{(e)}(\text{Re}) = \text{Re}^2$. Подставляя разложение (3.3) для $z^{(e)}$ в (3.4) и приравнявая члены порядка Re^2 , получаем уравнение для $z_2^{(e)}$

$$\Delta z_2^{(e)} = -\lambda \left[\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial z_1^{(e)}}{\partial \rho} + \frac{1-\mu^2}{2\rho^2} \frac{\partial z_1^{(e)}}{\partial \mu} \right]$$

Подставляя вместо $z_1^{(e)}$ его выражение (3.13) и делая замену $z_2^{(e)} = x(\rho, \mu) \exp({}^{1/2}\rho\mu)$, получаем уравнение для $x(\rho, \mu)$

$$\Delta^{(e)}x = \frac{x}{4} + \frac{e^{-1/2\rho}}{6\rho^2} \lambda \left[-2 + \left(3 + \frac{6}{\rho}\right) \mu - \frac{3\mu^2-1}{2} \right]$$

Решение аналогичного уравнения, найденное в работе [4], имеет вид

$$z_2^{(e)} = e^{1/2\rho\mu} \left[\left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n K_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\right) P_n(\mu) + \sum_{j=0}^2 R_j P_j(\mu) \right]$$

$$\begin{aligned}
 R_0(\rho) &= {}^2/3\lambda \left[-\frac{e^{1/2\rho}}{2\rho} \text{Ei}(-\rho) + \frac{e^{-1/2\rho}}{2\rho} \ln \rho \right] = \\
 &= {}^2/3\lambda \left[-\frac{\gamma}{2\rho} - \frac{\ln \rho}{2} + {}^1/2 - \frac{\gamma}{4} \right] + O(\rho) \\
 R_1(\rho) &= \lambda \left[\frac{e^{1/2\rho}}{2\rho} \left(1 - \frac{2}{\rho} \right) \text{Ei}(-\rho) - \frac{e^{-1/2\rho}}{2\rho} \left(1 + \frac{2}{\rho} \right) \ln \rho - \frac{e^{-1/2\rho}}{\rho^2} \right] = \\
 &= \lambda \left[\frac{\gamma-1}{\rho^2} - \frac{1}{2\rho} - \frac{\gamma-1}{8} \right] + O(\rho) \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_2(\rho) &= {}^2/3\lambda \left[-\frac{e^{1/2\rho}}{4\rho} \left(1 - \frac{6}{\rho} + \frac{12}{\rho^2} \right) \text{Ei}(-\rho) + \frac{e^{-1/2\rho}}{4\rho} \left(1 + \frac{6}{\rho} + \frac{12}{\rho^2} \right) \ln \rho + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3e^{-1/2\rho}}{2\rho^2} \left(1 + \frac{6}{\rho} \right) \right] = {}^2/3\lambda \left[\frac{3(3-\gamma)}{\rho^3} - \frac{3-\gamma}{8\rho} + {}^1/24 \right] + O(\rho)
 \end{aligned}$$

$$\text{Ei}(-\rho) = - \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = \gamma + \ln \rho + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\rho)^k}{k!k}$$

Здесь $\text{Ei}(-\rho)$ — интегральная показательная функция, $\gamma=0,5772\dots$ — постоянная Эйлера.

Из условия (3.7) и выражений (3.13), (3.16), (3.17) следует, что

$$\varepsilon_2^{(i)}(\text{Pe}) = \text{Pe}^2 \ln \text{Pe}, \quad A_0 = \frac{1}{2\pi} (1 + {}^2/3\lambda\gamma), \quad A_1 = \lambda \frac{1-\gamma}{\pi}$$

$$A_2 = -{}^2/3\lambda \frac{3-\gamma}{4\pi}; \quad k \geq 3, \quad A_k = 0$$

Подставляя разложение для $z^{(i)}$ в (3.1) и приравнявая члены порядка $\text{Pe}^2 \ln \text{Pe}$, получаем $\Delta z_2^{(i)} = 0$. Решением этого уравнения с граничным условием (3.8) будет

$$z_2^{(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (r^{-(k+1)} - r^k) P_k(\mu)$$

Условие (3.7) дает

$$z_2^{(i)} = \frac{\lambda}{3} \left(\frac{1}{r} - 1 \right), \quad \varepsilon_3^{(e)}(\text{Pe}) = \text{Pe}^3 \ln \text{Pe}$$

Очевидно, что $z_3^{(e)}$ удовлетворяет тому же уравнению (3.11) и тому же граничному условию (3.9), что и $z_1^{(e)}$. Условие сращивания для $z_3^{(e)}$ имеет вид $z_3^{(e)}(\rho, \mu) \rightarrow {}^1/3\lambda/\rho$ ($\rho \rightarrow 0$), т. е. отличается от асимптотики $z_1^{(e)}$ при $\rho \rightarrow 0$ только множителем $\lambda/3$. Таким образом, $z_3^{(e)} = {}^1/3 z_1^{(e)} = {}^1/3\lambda \exp({}^1/2\rho(\mu-1))$.

Условие сращивания дает $\varepsilon_3^{(i)} = \text{Pe}^2$. Подставляя разложение для $z^{(i)}$ в (3.1) и приравнявая члены порядка Pe^2 , получаем уравнение для $z_3^{(i)}$, которое после подстановки выражений (3.16) и (1.3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 \Delta z_3^{(i)} &= \sum_{k=0}^2 X_k(r) P_k(\mu) \\
 X_0 &= \frac{1}{3r} - \frac{\lambda}{3r^2} + \left(\frac{\lambda}{2} - {}^1/6 \right) \frac{\kappa}{2r^4} + \frac{\lambda\kappa}{6r^5} + \frac{\kappa^2}{4} \left(-\frac{3}{r^6} + \frac{4}{3r^7} \right) \\
 X_1 &= -\frac{1}{2r^2} + \frac{\lambda}{2r^3} - \frac{\kappa}{2r^5}, \quad X_2 = -\frac{1}{3r} + \frac{5\lambda}{6r^2} - \left[\frac{3\kappa}{2} + \frac{\lambda^2}{2} \right] \frac{1}{r^3} +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{5\kappa}{6} \left(\frac{3\lambda}{2} + 1 \right) \frac{1}{r} - \frac{5\kappa\lambda}{12r^2} - \frac{3\kappa^2}{4} \left(\frac{1}{r^6} - \frac{5}{9r^7} \right)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$z_3^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} [\xi_n(r) + a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}] P_n(\mu)$$

$$\xi_0(r) = \frac{r}{6} - \frac{\lambda}{3} \ln r + \frac{\kappa}{24} \left[2\lambda \left(\frac{3}{2r^2} + \frac{1}{3r^3} \right) - \frac{1}{r^2} \right] - \frac{\kappa^2}{16} \left(\frac{1}{r^4} - \frac{4}{15r^5} \right)$$

$$\xi_1(r) = 1/4 - \frac{\lambda}{4r} - \frac{\kappa}{8r^5}, \quad \xi_2(r) = \frac{r}{12} - \frac{5\lambda}{36} + \frac{\kappa}{4} \left[\frac{1}{r} - \frac{5}{6r^2} + \right.$$

$$\left. + 2\lambda \left(\frac{5}{16r^2} + \frac{\ln r}{6r^3} \right) \right] + \frac{\kappa^2}{4} \left(-\frac{1}{2r^4} + \frac{5}{12r^7} \right); \quad \xi_n(r) = 0, \quad n \geq 3$$

Из условий (3.7) и (3.8) получаем

$$z_3^{(i)} = \left[\frac{\lambda}{3} (\gamma^{-1/4}) - \xi_0(1) \right] \frac{1}{r} - \frac{\lambda}{3} (\gamma^{-1/4}) + \xi_0(r) +$$

$$+ \left[(\gamma^{-1/4} - \xi_1(1)) \frac{1}{r^2} - \frac{r}{4} + \xi_1(r) \right] P_1(\mu) + \left[\xi_2(r) - \frac{\xi_1(1)}{r^3} \right] P_2(\mu)$$

Из условия (3.7) следует, что

$$\varepsilon_4^{(i)}(\text{Pe}) = \text{Pe}^3 \ln \text{Pe}, \quad \varepsilon_5^{(i)}(\text{Pe}) = \text{Pe}^3, \quad z_4^{(i)}(r \rightarrow \infty, \mu) = \lambda(\mu - 1)/6 \quad (3.18)$$

Функция $z_4^{(i)}$ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta z_4^{(i)} = - \left[1 - \frac{\lambda}{r} + \frac{\kappa}{r^3} \right] \frac{\lambda\mu}{3r^2} \quad (3.19)$$

Заметим, что записанные соответственно для $z_1^{(i)}$ и $z_4^{(i)}$ уравнения (3.14) и (3.19), а также асимптотики (3.15) и (3.18) совпадают с точностью до множителя $\lambda/3$ в правой части, поэтому $z_4^{(i)} = \lambda/3 z_1^{(i)}$. С учетом того что $\varepsilon_5^{(i)}(\text{Pe}) = \text{Pe}^3$, внутреннее разложение запишем в виде

$$z^{(i)} = \frac{1}{r} + \left(\text{Pe} + \frac{\lambda}{3} \text{Pe}^3 \ln \text{Pe} \right) z_1^{(i)} + \frac{\lambda}{3} \left(\frac{1}{r} - 1 \right) \text{Pe}^2 \ln \text{Pe} + \text{Pe}^2 z_3^{(i)} + O(\text{Pe}^3)$$

Таким образом, число Шервуда для диффузионного потока на область циркуляции равно

$$\text{Sh} = -1/2 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial z^{(i)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} d\mu = 1 + \frac{\text{Pe}}{2} + \frac{\lambda}{3} \text{Pe}^2 \ln \text{Pe} +$$

$$+ \left[\frac{\lambda}{3} (\gamma^{-1/4}) - \xi_0(1) - \xi_0'(1) \right] \text{Pe}^2 + \frac{\lambda}{6} \text{Pe}^3 \ln \text{Pe} + O(\text{Pe}^3) \quad (3.20)$$

В качестве примера рассмотрим, как и в п. 2, пакет с пористостью $\varepsilon' = 0,65$ в слое с пористостью $\varepsilon = 0,45$. Отношение эффективных вязкостей твердой фазы внутри и вне пакета $\beta = 0,43$, а эффективный коэффициент диффузии положен равным $100 \text{ см}^2/\text{с}$. Кривая 2 на фиг. 1, б соответствует зависимости числа Sh от Pe , рассчитанной по формуле (3.20). Соотношения (2.2) и (3.20) можно интерполировать на промежуточную область и для всего интервала изменения числа Пекле представить в виде приближенной формулы [2]

$$\text{Sh} = 1 + \frac{0,5 \text{ Pe}}{1 + 1,1(1 + \beta)^{1/2} \text{ Pe}^{1/2}} \quad (3.21)$$

Зависимость числа Шервуда от Pe согласно формуле (3.21) для рассматриваемого примера показана на фиг. 1, б кривой 3.

4. Сравнение результатов для пакетов и пузырей. В случае пузыря, так же как и в случае быстро всплывающего пакета, задача о массообмене сводится к определению диффузионного потока на границу области циркуляции. Выражения для полей концентрации и диффузионных потоков при больших и малых числах Пекле определяются теми же методами, что и в случае пакетов. Эти выражения для пузыря могут быть также найдены предельным переходом при $\epsilon' \rightarrow 1$ в полученных выше соответствующих соотношениях для быстро всплывающих пакетов. Непосредственное решение задачи и предельный переход приводят к одному и тому же результату.

Особый интерес представляют выражения для числа Шервуда

$$Pe \gg 1, \quad Sh = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} Pe^{1/2} + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \quad (4.1)$$

$$Pe \ll 1, \quad Sh = 1 + \frac{Pe}{2} + \frac{\sigma\delta_b}{3(\delta_b-1)} Pe^2 \ln Pe + O(Pe^2) \quad (4.2)$$

Соотношения (4.1) и (4.2) можно интерполировать на промежуточную область значений числа Пекле и для всего интервала изменения Pe представить в виде приближенной формулы [2]

$$Sh = 1 + \frac{0,5 Pe}{1+1,1 Pe^{1/2}} \quad (4.3)$$

Для сравнения выпишем выражения для числа Шервуда в случае больших чисел Рейнольдса

$$Pe \gg 1, \quad Sh = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Pe^{1/2} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \quad (4.4)$$

$$Pe \ll 1, \quad Sh = 1 + \frac{Pe}{2} + O(Pe^2) \quad (4.5)$$

Заметим, что выражение (4.5) и старший член в разложении (4.4) получены в работе [3]. В [3] была также предложена интерполяционная формула

$$Sh = (1+2\pi^{-1}Pe)^{1/2} \quad (4.6)$$

На фиг. 2 кривым 1–4 соответствуют зависимости числа Шервуда от Pe , рассчитанные соответственно по формулам (4.1)–(4.3), (4.6). Заметим, что значения числа Шервуда в случаях больших и малых чисел Рейнольдса совпадают при малых числах Пекле, а при больших числах Пекле различаются примерно на 40%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобков Н. Н., Галиева Л. М., Гупало Ю. П. О движении неоднородностей развитого кипящего слоя при малых числах Рейнольдса. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 4, с. 57–65.
2. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Массообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука, 1985. 336 с.
3. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А. О массообмене между пузырями и непрерывной фазой в псевдоожигенном слое. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 4, с. 42–49.
4. Acrivos A., Taylor T. D. Heat and mass transfer from single spheres in Stokes flow. — Phys. Fluids, 1962, v. 5, № 4, p. 387–394.
5. Псевдоожигение. М.: Химия, 1974, 75 с.

Москва

Поступила в редакцию
4.VII.1985