

УДК 532.517.4

## ЯВЛЕНИЕ ГИСТЕРЕЗИСА ПРИ ТЕЧЕНИИ В КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ С ВНЕЗАПНЫМ РАСШИРЕНИЕМ

МАЙОРОВА А. И., СВИРИДЕНКОВ А. А.

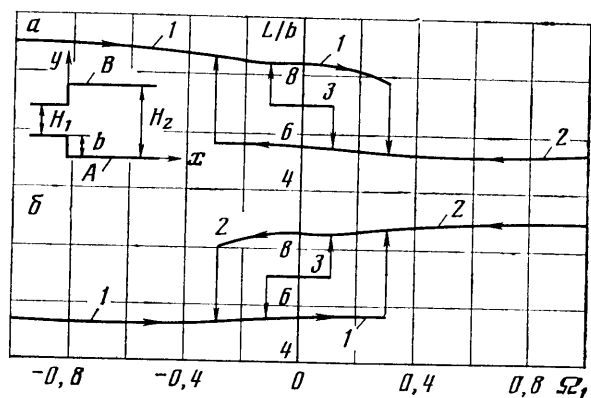
Обзоры современного состояния исследований турбулентных отрывных течений за уступами в трубах и каналах даны в [1, 2]. Течение в плоском канале с внезапным расширением в виде двух уступов изучалось в [3]. Проводилась визуализация срывных зон в каналах с одинарными и двойными уступами. Пограничный слой во входном канале был турбулентным, число Рейнольдса набегающего потока изменялось в диапазоне  $2 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^4$ . В [3] было показано, что в случае одиночного уступа относительная длина срывной зоны почти постоянна в диапазоне степеней расширения  $n$  от 1,1 до 5 и составляет  $(7-8)b$ , где  $b$  — высота уступа. Однако в случае канала с двумя уступами при  $n > 1,5$  осредненное течение становится несимметричным. С ростом  $n$  поток прижимается к одной стенке и создает у стенок зоны отрыва с сильно отличающимися длинами  $\sim 10b$  и  $(3-4)b$ . Проведенное в [4] расчетное исследование этого течения на основе двухпараметрической модели турбулентности показало, что существование устойчивого асимметричного режима связано с падением статического давления у стенки, к которой прижимается поток, и сопровождается уменьшением гидравлических потерь по сравнению с каналом, имеющим один уступ.

В эксперименте [3] не исследовалось, каким образом устанавливается стационарный режим течения, поэтому в [4] на входе в канал задавалось нулевое значение завихренности потока, а за начальное приближение для итерационного метода решения конечно-разностных уравнений принималось состояние покоя. В настоящей работе показано, что режим течения при одних и тех же условиях на входе в канал может зависеть от предыстории потока.

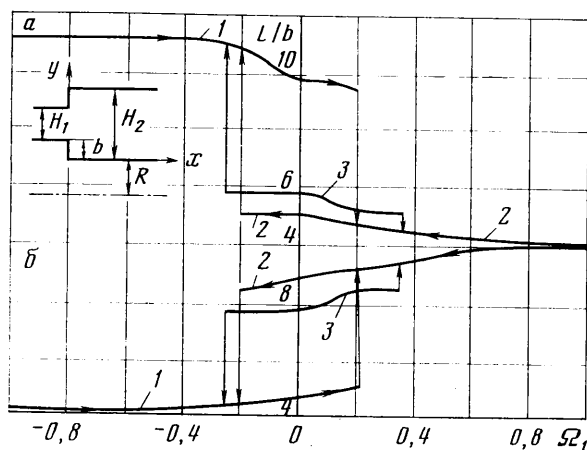
Для практических целей интерес представляет кольцевой канал с двумя уступами, который можно рассматривать как предельный случай кольцевого диффузора с углом раскрытия  $180^\circ$ . В таком канале наружная и внутренняя стенки различаются радиусами кривизны, поэтому возникает вопрос: у какой стенки зона отрыва будет больше? Ниже приводятся результаты расчетного исследования турбулентного течения несжимаемой жидкости в плоском канале с внезапным расширением (фиг. 1) при  $n = H_2/H_1 = 2,2$ , а также результаты расчетного и экспериментального исследования течения в кольцевом канале с внезапным расширением при  $n = 2,2$ ;  $R/H_2 = 1,83$  (фиг. 2). Число Рейнольдса, вычисленное по высоте входного канала и средней скорости набегающего потока, составляло  $4 \cdot 10^5$ . Уступы с внутренней и наружной сторон канала имели одинаковую высоту.

1. Расчетное исследование течения проводилось конечно-разностным методом с использованием полной системы уравнений двумерного стационарного турбулентного движения несжимаемой жидкости [5] в переменных функция тока  $\psi$ , завихренность  $\Omega$ . Для определения коэффициента турбулентной вязкости  $\nu_t$  использовалась двухпараметрическая модель турбулентности  $k-\epsilon$  [6] ( $k$  — кинетическая энергия турбулентности на единицу массы,  $\epsilon$  — скорость диссипации кинетической энергии турбулентности)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{y^j} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y^j} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) &= -\rho \Omega & (1.1) \\ \frac{y^j}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\Omega}{y^j} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\Omega}{y^j} \right) \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left[ y^{2j} \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t \frac{\Omega}{y^j} \right) \right] - \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^{3j} \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t \frac{\Omega}{y^j} \right) \right] &= S_\Omega \\ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} k \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} k \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) - \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^j \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) &= S_k \end{aligned}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \varepsilon \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \varepsilon \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^j \frac{v_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) = S_\varepsilon$$

$$S_\varepsilon = 2y^j \left[ \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 v_i}{\partial x \partial y} \right]$$

$$v_i = C_D \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad S_k = v_i F_k - \varepsilon, \quad S_\varepsilon = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} v_i F_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

$$F_k = 2 \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{V}{y} j \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2$$

$$\rho U = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho V = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$\sigma_k=1,0$ ;  $\sigma_\varepsilon=1,3$ ;  $C_D=0,09$ ;  $C_{\varepsilon 1}=1,44$ ;  $C_{\varepsilon 2}=1,92$ , где  $U$ ,  $V$  – осредненные продольная и поперечная составляющие скорости,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\rho$  – плотность,  $j=0$  и  $1$  для плоского и осесимметричного течений. Применялась «гибридная» конечно-разностная схема [7], полученная система алгебраических уравнений решалась методом Гаусса – Зейделя.

В качестве граничного условия на непроницаемых стенках задавались значения функции тока, для остальных переменных граничные условия носились на один шаг в расчетную область, где предполагалось выполнение универсального «закона стенки» [5]

$$\frac{U}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u^* h}{\nu} + A, \quad k = \frac{u^{*2}}{C_D^{1/2}}, \quad \varepsilon = \frac{u^{*3}}{\kappa h}, \quad \kappa=0,41; \quad A=5,36 \quad (1.2)$$

где  $u^*$  — динамическая скорость,  $h$  — расстояние до стенки. Во входном сечении канала задавались значения  $\psi$ ,  $\Omega$ ,  $k$ ,  $\epsilon$ ; в выходном сечении ставились «мягкие» граничные условия: равенство нулю продольных производных всех зависимых переменных.

Интегрируя первое из уравнений (1.2) от точки  $c$  на стенке до ближайшей точки  $M$  на нормали, получим значение расхода жидкости в слое высотой  $h_c$

$$|\psi_M - \psi_c| = u^* h_c \left\{ \left( \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u^* h_c}{\nu} + A \right) \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 + (j-1) \left( y_c + \frac{q}{2} \right) \right] - \frac{1}{\kappa} \left[ 1 + (j-1) \left( y_c + \frac{q}{4} \right) \right] \right\} \quad (1.3)$$

где  $q = -h_c$ ,  $h_c$ ,  $0$  соответственно для наружной, внутренней и боковой стенок. Отсюда, зная значение  $\psi_M$ , можно определить величину  $u^*$ . Значение вихря в точке  $M$  находится дифференцированием (1.2)

$$\Omega_M = \frac{-u^*}{\kappa h_c} \text{sign}(\psi - \psi_c) \quad (1.4)$$

В процессе расчета уравнение (1.3) разрешалось относительно  $u^*$  методом касательных совместно с итерациями во внутренних точках, при этом сначала из первого уравнения (1.1) определялось значение  $\psi_M$ , потом  $u^*$  из (1.3), затем  $\Omega_M$  из (1.4),  $k_M$  и  $\epsilon_M$  из (1.2).

Вблизи угловой точки за внезапным расширением поток ведет себя как турбулентная струя, поэтому в точках, ближайших к угловым, вместо логарифмического закона (1.2) ставилось условие параллельности оси  $x$  линии тока, сходящей с угловой точки. Значение энергии турбулентности принималось таким же, как в пограничном слое набегающего потока, а для нахождения  $\epsilon$  использовалось условие пропорциональности масштаба турбулентности в слое смещения ширине слоя [8]. После нахождения  $\psi$ ,  $\Omega$ ,  $k$ ,  $\epsilon$  из уравнений движения определялся градиент давления; давление восстанавливалось вычислением интеграла от входного сечения вдоль центральной линии канала, а затем перпендикулярно к ней вплоть до стенок. Использовалась равномерная конечно-разностная сетка. Методические расчеты с измельчением сетки показали, что достаточны размеры ячеек  $1/10 H_2$  по длине и  $1/33 H_2$  по высоте канала. Расчеты производились на ЭВМ БЭСМ-6.

2. В расчете в сечении входного канала на расстоянии  $H_1$  от внезапного расширения задавалась функция тока, т. е. значения  $U$  и  $\partial U / \partial y$ , так, что  $U/U_1 = 1$  ( $U_1$  — средняя скорость потока в канале высотой  $H_1$ ), что соответствовало равномерному профилю продольной компоненты скорости, и варьировалось значение завихренности  $\partial V / \partial x$  (постоянное поперек сечения), т. е. величина, которая связана с радиальным градиентом давления. Результаты расчетов плоского течения представлены на фиг. 1 в виде зависимости длины зон отрыва за уступами от условий во входном сечении (длины зон отнесены к высоте уступа,  $a$ ,  $b$  соответствуют стенкам  $A$  и  $B$ ).

Возможны три стационарных режима течения: 1, 2 — асимметричные с отклонением потока соответственно к стенкам  $B$  и  $A$ ; 3 — симметричный с одинаковыми срывными зонами. При непрерывном изменении параметра  $\Omega_1 = (\partial V / \partial x) (H_2 / U_2)$  во входном сечении от  $-1$  до  $+0,31$  решение уравнений движения проходит кривую 1. При  $\Omega_1 = 0,32$  происходит скачкообразное изменение режима течения: переход скачком на кривую 2 (расчет проводился с шагом  $0,10$  по  $\Omega_1$  для  $0,4 \leq |\Omega_1| \leq 1$  и  $0,01$  для  $|\Omega_1| < 0,4$ ). Если теперь двигаться вдоль оси абсцисс в обратном направлении, то при  $\Omega_1 = -0,32$  решение уравнений движения перестраивается с кривой 2 на кривую 1, образуя петлю гистерезиса (стрелками показано направление движения по кривой). Таким образом, в области  $-0,31 \leq \Omega_1 \leq 0,31$  установление режима течения зависит от начальных условий расчета.

При счете от нулевых начальных условий, что можно рассматривать как моделирование внезапного ускорения потока из состояния покоя, решение уравнений движения выходит на режим 1, если  $\Omega_1 \leq 0$ , и на режим 2, если  $\Omega_1 > 0$ . Вне петли гистерезиса устанавливается одно решение независимо от начальных условий. Как показывает фиг. 1, в окрестности

точки  $\Omega_1=0$  существует также «нормальное» решение, повторяющее симметрию внешних граничных условий. На кривой 3 длины зон отрыва у обеих стенок одинаковы и составляют 7*b*. Это решение получалось при специальных начальных условиях: в начальный момент расчета задавалось поле течения с двумя бесконечно длинными срывными зонами. При движении вдоль кривой 3 решение уравнений движения теряет устойчивость в точках  $\Omega_1=\pm 0,12$  и перестраивается на наиболее устойчивый режим.

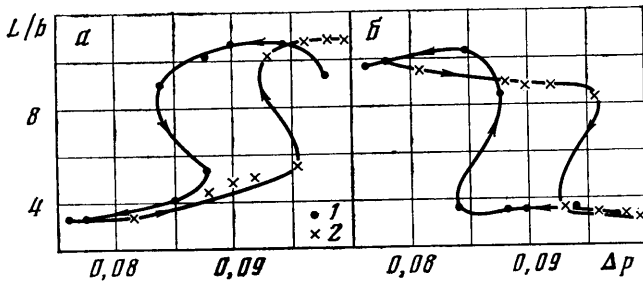
Аналогичная расчетная зависимость для кольцевого канала представлена на фиг. 2 (*a* соответствует внутренней стенке, *b* — наружной). Естественно предположить, что в кольцевом канале зона отрыва у наружной стенки будет больше, чем у внутренней, так как наружная стенка имеет большую площадь. Как видно из фиг. 2, это предположение справедливо для «нормального» решения (кривая 3), обладающего максимальной симметрией, совместимой с граничными условиями задачи. Для получения этого решения задавались специальные начальные условия, такие же, как для плоского канала. Фигура 2 показывает, что в кольцевом канале сохраняются два «ненормальных» решения: с «короткой» наружной зоной отрыва и «длинной» внутренней, с «короткой» внутренней срывной зоной и «длинной» наружной. При движении вдоль оси абсцисс образуется петля гистерезиса. Область одновременного существования режимов 1 и 2 несколько меньше, чем в плоском случае:  $-0,20 \leq \Omega_1 \leq 0,20$ .

Расчетное исследование течения в кольцевом канале при изменении  $R/H_2$  от 0,1 до 10 показало, что зона гистерезиса вблизи оси ординат сохраняется до  $R/H_2=0,5$ . Для  $R/H_2 < 0,5$  петля гистерезиса перемещается в область отрицательных  $\Omega_1$ . Результаты расчета при  $R/H_2 < 0,5$  нельзя, однако, считать достоверными, так как в этом случае используемые граничные условия на стенках могут стать недостаточно точными. При увеличении радиуса кривизны канала течение становится практически неотличимым от плоского при  $R/H_2=5$ .

3. С целью экспериментальной проверки возможности существования разных режимов течения было проведено исследование течения в вертикальном кольцевом осесимметричном канале, имеющем разделяющую обечайку на расстоянии  $7 H_1$  от внезапного расширения, что позволило варьировать распределение скоростей и статического давления по сечению канала. Наружная стенка канала была прозрачной. Изменение давления и скоростей достигалось установкой решеток с различной степенью проницаемости в каналы, разделенные обечайкой. Осредненная и пульсационная скорости измерялись термоанемометром с полосой пропускания до 20 кГц. Разность статических давлений на стенках во входном участке канала измерялась микроанемометром.

Для проверки окружной симметрии течения проводились контрольные замеры в разных положениях по окружности. Длина зон возвратного течения определялась визуально с помощью шелковинок, наклеенных на стенки канала. В процессе эксперимента проницаемость решетки внутреннего канала оставалась постоянной, а проницаемость решетки внешнего канала постепенно изменялась. Профили продольной составляющей осредненной и пульсационной скоростей перед внезапным расширением были близки к равномерным, изменение проницаемости решетки приводило к изменению радиального градиента давления и соответственно поперечной составляющей скорости.

Результаты экспериментального исследования представлены на фиг. 3 в виде зависимостей длин зон отрыва за уступами (*a* — внутренней, *b* — наружной) от разности статических давлений на стенках входного канала ( $p_v$  — давление на внутренней стенке,  $p_n$  — давление на наружной стенке,  $\Delta p = 2(p_v - p_n)/\rho U^2$ , 1 — движение в сторону уменьшения разности давлений, 2 — движение в сторону увеличения разности давлений). Понижение проницаемости решетки внешнего канала соответствует уменьшению раз-



Фиг. 3

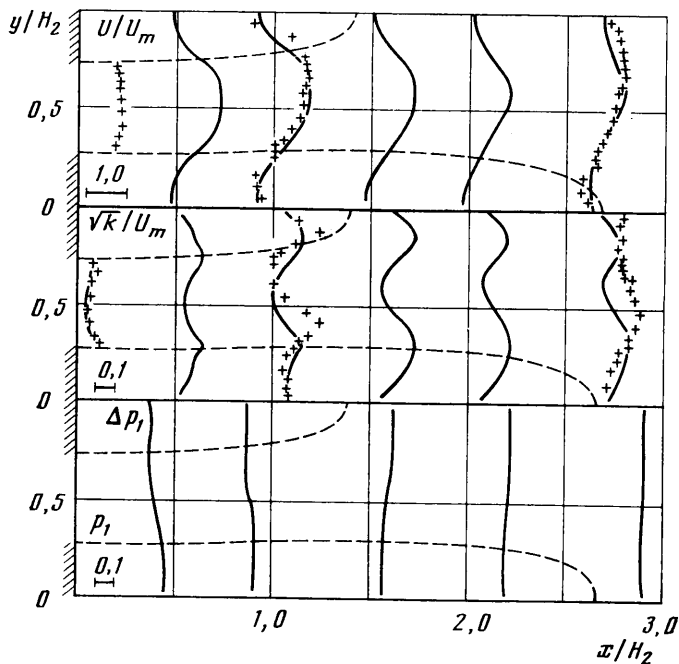
ности давлений на стенках. Как видим из фиг. 3, в эксперименте оправдывается теоретическое предсказание о существовании петли гистерезиса. При уменьшении проницаемости решетки происходит внезапная смена режима течения, что соответствует переходу с ветви 1 расчетной кривой на фиг. 2 на ветвь 2. Если теперь изменять проницаемость решетки в обратном направлении, то перестройка течения (соответствующая переходу с ветви 2 расчетной кривой на ветвь 1) происходит при большем значении разности давлений на стенках.

Таким образом, в области  $0,082 \leq \Delta p \leq 0,092$  при одних и тех же условиях на входе в канал существуют два режима течения, устанавливающихся в зависимости от предыстории потока: с «длинной» внутренней срывной зоной и «короткой» наружной, и с «длинной» наружной зоной и «короткой» внутренней. Решения с близкими по длине срывными зонами в эксперименте не наблюдались, что говорит об их физической неустойчивости. Количественное сопоставление результатов, представленных на фиг. 2 и 3, затруднительно, так как в эксперименте не измерялась радиальная компонента скорости, а в расчете течения несжимаемой жидкости нельзя задать распределение давления во входном сечении, однако эти результаты показывают, что основное влияние на установление режима течения оказывают, по-видимому, радиальная компонента скорости и связанный с ней радиальный градиент давления. Отметим, что в области гистерезиса перестройка отрывных зон может происходить в результате случайных пульсаций, например при выключении и повторном включении вентилятора, подающего воздух в кольцевой канал.

4. На фиг. 4 представлены расчетные и экспериментальные характеристики течения в кольцевом канале при  $R/H_2=1,83$  для режима с «длинной» внутренней зоной отрыва при входных условиях, взятых вне области гистерезиса ( $a$  — продольная составляющая скорости  $U/U_m$ ,  $b$  — интенсивность турбулентности  $\sqrt{k}/U_m$ ;  $c$  — статическое давление  $\Delta p_1=2(p-p_1)/\rho U_1^2$ ; сплошные кривые — расчет; точки — эксперимент; штриховые линии — расчетные линии тока, ограничивающие области отрывного течения). За интенсивность турбулентности приняты величины  $\sqrt{k}/U_m$  в расчете и  $u/U_m$  в эксперименте, где  $u$  — пульсационная скорость,  $U_m$  — максимальная скорость во входном канале. Как видим из фиг. 4,  $a$ , расчет с удовлетворительной точностью предсказывает распределение средней скорости.

Рассчитанные значения интенсивности турбулентности значительно ниже измеренных в центре канала вблизи точек присоединения потока. Аналогичное рассогласование расчетных и экспериментальных характеристик в областях за отрывной зоной имеет место и в работах других авторов, например в [9], где модель  $k-\epsilon$  применялась для расчета течения за диском, причем для устранения влияния схемной вязкости использовалась очень мелкая конечно-разностная сетка. Ошибки, присущие этой модели, в основном связаны с неуниверсальностью источникового члена уравнения диссипации и возникают поэтому и при расчетах по моделям более высокого порядка. Точность модели повышается при учете анизотропии тензора напряжений Рейнольдса, которая может быть существенна вблизи точек присоединения потока. В этих областях кривизна линий тока оказывает дестабилизирующее влияние на течение, приводя к увеличению турбулентной энергии.

Простейший учет кривизны линий тока путем модификации диссипативного члена в уравнении для  $\epsilon$  был сделан в работе [10], что позволило с хорошей точностью предсказать длину отрывной зоны за прямоугольным телом. В данном случае, одна-



Фиг. 4

ко, использование поправки, предложенной в [10], не привело к существенному изменению рассчитанных значений энергии турбулентности.

Из фиг. 4, в видно, что вблизи внезапного расширения распределение статического давления несимметричное: давление падает у стенки с «короткой» срывной зоной и возрастает у стенки с «длинной» зоной. Разрежение у стенки, к которой отклоняется поток, приводит к «инерции» отрывного течения: для смены режима течения необходим подвод энергии, достаточный для преодоления радиального градиента давления. Результаты расчета показывают, что при симметричном растекании в плоском канале давление вблизи внезапного расширения остается постоянным по сечению. В этом случае любое возмущение потока приведет к нарушению постоянства давления и отклонению потока к одной из стенок.

Для решений 3 установлено, что в кольцевом канале существует некоторая асимметрия давления (поэтому область их существования больше, чем в плоском канале), но меньшая, чем для решений 1 и 2. Таким образом, асимметричные решения физически более устойчивы, чем «нормальные». Отметим, что в эксперименте наблюдается некоторая нестационарность течения: низкочастотные колебания конца «длинной» зоны. Такие же явления наблюдались Эбботом и Клайном [3] в плоском канале. Собственные колебания потока разрушают симметричные режимы течения. По-видимому, эти режимы устойчивы к бесконечно малым возмущениям, о чем говорит возможность получения их в расчетах на ЭВМ, но неустойчивы к возмущениям конечной амплитуды.

Проведенное исследование показывает, что уравнения Рейнольдса (1.1) могут иметь несколько решений. Неединственность решений уравнений Навье – Стокса хорошо известна для ламинарных течений [11]. Если число Рейнольдса мало, то можно доказать [12], что течение независимо от начального состояния однозначно определяется внешними условиями и имеет максимально совместимую с внешними условиями симметрию. С увеличением числа Рейнольдса единственность пропадает и могут наблюдаться решения, не повторяющие симметрию граничных условий. Так, хорошо изучена неединственность ламинарного течения и переходов к турбулентности в слоях между концентрическими сферами, когда внутренняя сфера вращается, а внешняя покоится [13].

Что касается ламинарных течений в плоских каналах с внезапным расширением, то здесь имеется экспериментальное исследование течения в плоском канале с двумя уступами [14] при нескольких числах Рейнольдса. В эксперименте [14] при числе Рейнольдса входного канала 55 наблюдалось симметричное течение, а при числах Рейнольдса 114 и 252 – асимметричное. В случае турбулентного течения, как следует из расчета, эффективные числа Рейнольдса, вычисленные по турбулентной вязкости, имеют порядок сотни.

Есть основания предполагать, что при некотором числе Рейнольдса данное те-

чение претерпевает так называемую бифуркацию докритического типа [11] и в некотором диапазоне чисел Рейнольдса могут существовать как симметричные, так и асимметричные режимы. Приведенные выше результаты показывают, что турбулентные течения могут в свою очередь быть не единственными. Это обстоятельство следует учитывать при численном исследовании турбулентных течений, обладающих пространственной симметрией.

Авторы выражают благодарность В. Л. Зимонту за ценные замечания, высказанные в процессе обсуждения работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Турбулентность/Под ред. Бредшоу П. М.: Машиностроение, 1980. 343 с.
2. *Durst F., Tropea C.* Turbulent, backward-facing flows in twodimensional ducts and channels.— The 3-d Symposium on Turbulent Shear Flows. Penn. State Univ., 1981, p. 18. 1—18. 6.
3. *Abbot D. E., Kline S. J.* Experimental investigation of subsonic turbulent flow over single and double backward facing steps.— Trans. ASME, J. Basic Engng, 1962, v. 84, p. 317—325. (Рус. перев.: Эббот, Клайн. Экспериментальное исследование дозвукового течения при обтекании одинарных и двойных уступов.— Тр. Америк.-американского инж.-мех. сер. Д. Техн. механика, 1962, т. 84, № 3, с. 20—28).
4. *Майорова А. И.* Расчетное исследование обтекания одинарных и двойных уступов в плоском канале.— Инж.-физ. журн., 1984, т. 46, № 1, с. 24—30.
5. *Хинце Н. О.* Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
6. *Jones W. P., Launder B. E.* The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence.— Int. J. Heat and Mass Transfer, 1972, v. 15, № 2, p. 301—314.
7. *Spalding D. B.* A novel finite-difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives.— Int. J. Num. Meth. Engng., 1972, № 4, p. 551—559.
8. *Абрамович Г. Н.* Теория турбулентных струй. М.: Физматгиз, 1960, 715 с.
9. *McGuirk J. J., Taylor A. M. K. P., Whitelaw J. H.* The assessment of numerical diffusion in upwind difference calculations of turbulent recirculating flows.— In: Turbulent Shear Flows. 3d Int. Symp. Berlin e. a.: Springer-Verlag, 1982, p. 206—224.
10. *Durst F., Rastogi A. K.* Turbulent flow over two-dimensional fences.— In: Turbulent Shear Flows. 2nd. Int. Symp., London, 1979. Berlin: Springer-Verlag, 1980, p. 218—232.
11. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984. 344 с.
12. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
13. *Белыев Ю. Н., Монохов А. А., Щербаков С. А., Яворская И. М.* Неединственность последовательности переходов к турбулентности во вращающихся слоях.— Докл. АН СССР, 1984, т. 279, № 1, с. 51—54.
14. *Durst F., Melling A., Whitelaw J. H.* Low-Reynolds number flow over a plane symmetric sudden expansion.— J. Fluid Mech., 1974, v. 64, pt 1, p. 111—128.

Москва

Поступила в редакцию  
14.III.1985