

УДК 532.516.5:532.526.75

О ТОРМОЖЕНИИ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ БЕСКОНЕЧНЫМИ КОНУСАМИ

КРЫМОВ В. А., МАНИН Д. Ю.

Задача о движении жидкости между двумя осесимметричными бесконечными поверхностями рассматривалась в различной постановке многими авторами [1–8]. Общее решение линейной задачи при малых числах Россби $\varepsilon = \Delta\omega/\omega \ll 1$ и Экмана $E = \nu/\omega L^2 \ll 1$ (или больших числах Рейнольдса $Rt = E^{-1}$), получено в работе [1]. Для слабонелинейного случая применялось разложение по числу Россби [2, 3], а для сильнонелинейного – полуэмпирическая модель, введенная Ведемейером [4, 9].

Обойтись без модельных предположений позволяет метод сращиваемых асимптотических разложений. В работе [5] он применяется к стационарному течению между вращающимися бесконечными дисками, когда уравнения движения сводятся к известным уравнениям Кармана [10]. В [6] рассмотрен широкий класс поверхностей, сводящихся в одном предельном случае к дискам, а в другом – к конусам. Показано, что кармановская автомодельность справедлива асимптотически в первых членах разложения по обратным степеням радиальной координаты.

В настоящей работе рассматривается торможение жидкости между неподвижными конусами. Она примыкает к работе [7], где получены решения для жидкости, тормозящейся между двумя бесконечными дисками, и показано, что при различных начальных условиях зависимость скорости от радиуса и времени выходит на универсальную кармановскую стадию. Для случая конусов аналогичная универсальная стадия не является кармановской, что позволяет экспериментально проверить применимость автомодельных уравнений пограничного слоя, обобщающих уравнения Кармана и рассматривавшихся ранее [11–13]. Эксперимент подтверждает выводы теории.

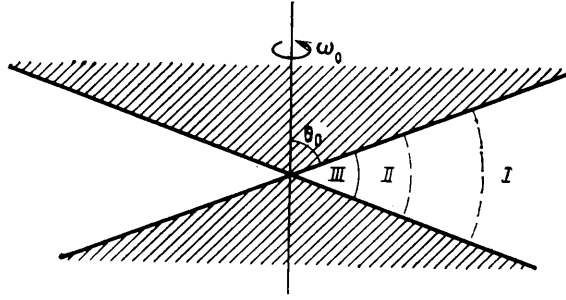
1. Рассматривается однородная несжимаемая жидкость с вязкостью ν , заключенная в области $-r \operatorname{ctg} \theta_0 < z < r \operatorname{ctg} \theta_0$ (используются цилиндрические координаты (r, φ, z)), $2\theta_0$ – угол раствора ограничивающих конических поверхностей (фиг. 1). Будем искать осесимметричное ($\partial v/\partial \varphi = 0$) течение, удовлетворяющее начальному условию $v_\varphi = r\omega_0$ при $t=0$ и граничным условиям прилипания на конусах $v_r = v_\theta = v_z = 0$ при $z = \pm r \operatorname{ctg} \theta_0$, $t > 0$. Введем масштабы времени ω_0^{-1} , длины $(\nu/\omega_0)^{1/2}$ и скорости $(\nu\omega_0)^{1/2}$. Обезразмеренные с их помощью уравнения Навье – Стокса имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u^2}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Характерной особенностью поставленной задачи является отсутствие глобального безразмерного параметра, подобного числу Экмана в задаче о движении жидкости между двумя бесконечными параллельными дисками. Можно ввести только локальное число Экмана $E = \nu/\omega r^2$, причем

всегда есть значения радиуса, такие, что $E \gg 1$, и такие, что $E \ll 1$, т. е. области соответственно медленного и быстрого вращения. Рассмотрим вторую из этих областей.

Как следует из результатов [6], течение при $E \ll 1$ должно быть качественно подобным течению между дисками [1, 7]. Это значит, что вблизи твердых границ образуются тонкие пограничные слои толщиной $O(rE^{1/2})$. В них имеется сильное радиальное течение, направленное от периферии к центру, скорость которого $O(v)$, где v — азимутальная скорость во внутренней области, не зависящая от z . Радиальная скорость во внутренней области u также не зависит от z и в силу условия сохранения массы имеет порядок $O(vE^{1/2})$. Вязкость во внутренней области не играет су-



Фиг. 1

щественной роли, поэтому момент количества движения сохраняется и радиальное течение приводит к уменьшению угловой скорости. Характерный масштаб времени этого процесса определяется соотношением $\partial_t = O(vE^{1/2}/r)$. Собственные движения погранслоя происходят значительно быстрее, для них $\partial_t = O(v/r)$, поэтому погранслой можно считать в каждый момент времени установившимся, т. е. квазистационарным.

2. Принимая во внимание порядки величин, будем записывать приближенные уравнения отдельно для внутренней области и для погранслоя, отбрасывая в уравнениях Навье — Стокса малые по числу Экмана члены. Полученное решение апостериори подтвердит сделанные предположения.

Приближенные уравнения для внутренней области тогда имеют вид (ср. аналогичные уравнения в [7])

$$r \frac{\partial g}{\partial t} + f \frac{\partial rg}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial rf}{\partial r} + rh = 0 \quad (2.1)$$

где компоненты скорости в цилиндрических координатах представлены в виде $u=f(r, t)$, $v=g(r, t)$, $w=zh(r, t)$.

Для пограничного слоя удобно переписать уравнения Навье — Стокса в сферических координатах (ρ, θ, φ)

$$\begin{aligned} v_\rho \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\theta}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{\rho} &= -\frac{\partial p}{\partial \rho} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^2} \right) v_\rho + \\ &+ \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \text{ctg } \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) v_\rho - \frac{2}{\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \text{ctg } \theta \right) v_\theta \\ v_\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial \rho} + \frac{v_\theta}{\rho} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\rho v_\theta}{\rho} - \frac{\text{ctg } \theta}{\rho} v_\varphi^2 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) v_\theta + \\ &+ \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \text{ctg } \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) v_\theta + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$v_p \frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} + \frac{v_\theta}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_p v_\varphi}{\rho} + \frac{v_\theta v_\varphi}{\rho} \operatorname{ctg} \theta = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) v_\varphi + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) v_\varphi$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho} \right) v_p + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \right) v_\theta = 0$$

Здесь опущена радиальная часть лапласиана, что возможно при условии $\partial/\partial \rho = O(\rho^{-1})$.

Оставляя главные по числу Экмана члены, получим из (2.2) систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[U \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{V^2}{r} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right] = 0$$

$$U \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{UV}{r} + W \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial r U}{\partial r} + r \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0 \quad (2.3)$$

$$r = \rho \sin \theta_0, \quad \xi = \pm \rho (\theta - \theta_0) \sin \theta_0$$

$$U = \frac{v_p}{\sin \theta_0}, \quad V = \frac{v_\varphi}{\sin \theta_0}, \quad W = \pm \frac{v_\theta}{\sin \theta_0} \pm (\theta - \theta_0) \frac{v_p}{\sin \theta_0}$$

(знаки плюс и минус соответствуют нижней и верхней границам).

Система (2.3) совпадает с точностью до замены переменных с известной системой уравнений для погранслоя на вращающейся пластине [14]. Граничные условия при $\theta = \pm \theta_0$ дают

$$U = V = W = 0, \quad \xi = 0 \quad (2.4)$$

Из условий сшивки с внутренней областью получим граничные условия при $\xi \rightarrow \infty$

$$U = 0, \quad V = g / \sin \theta_0, \quad W = (f - rh) \operatorname{ctg} \theta_0 \quad (2.5)$$

Уравнения (2.1), (2.3) с условиями (2.4), (2.5) описывают торможение жидкости в приближении быстрого вращения $E \ll 1$.

3. Система уравнений (2.1), (2.3)–(2.5) допускает однопараметрическое семейство автомодельных подстановок вида

$$f \simeq t^{-(p-1)/(p-3)} f_p(\xi), \quad g = t^{-2p/(p-3)} g_p(\xi), \quad h = t^{-1} h_p(\xi), \quad \xi = r t^{2/(p-3)} \quad (3.1)$$

где ξ — автомодельная переменная.

Получить аналитические выражения для функций f_p , g_p , h_p не представляется возможным, однако удастся найти две асимптотики. Одна из них имеет место при $\xi^{(p-3)/2} \rightarrow 0$, т. е. при малых временах t , и описывает начальную стадию торможения

$$g_p(\xi) \sim A \xi^p \left[1 - 2\sqrt{A} C(p) \frac{\sqrt{\sin \theta_0}}{\cos \theta_0} \xi^{(p-3)/2} \right] \quad (3.2)$$

или в исходных переменных

$$g(r, t) \sim A r^p \left[1 - 2\sqrt{A} C(p) \frac{\sqrt{\sin \theta_0}}{\cos \theta_0} r^{(p-3)/2} t \right] \quad (3.3)$$

Из (3.3) видно, что параметр p определяет вид начального состояния

$$v = A r^p, \quad t = 0$$

В частности, исходной постановке задачи соответствует значение $p=1$ (начальное состояние — твердотельное вращение). Величина $C(p)$ имеет тот же смысл, что и в [7]: если F , G , H — функции, удовлетворяющие

«обобщенной системе Кармана»

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Z} \left[pF^2 - G^2 + H \frac{\partial F}{\partial Z} - \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} \right] &= 0 \\ (p+1)FG + H \frac{\partial G}{\partial Z} - \frac{\partial^2 G}{\partial Z^2} &= 0, \quad \frac{p+3}{2}F + \frac{\partial H}{\partial Z} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

с граничными условиями Бедвадта [15]

$$\begin{aligned} F=G=H=0, \quad Z=0 \\ G \rightarrow 1, \quad H < \infty, \quad Z \rightarrow \infty \end{aligned}$$

то, по определению, $C(p)=H(\infty)$. При $p=1$ система (3.4) переходит в обычные уравнения Кармана [10], поэтому $C(1)=1,369$ (см. [16]).

Вторая асимптотика имеет место при $\xi^{1/2(p-3)} \rightarrow \infty$, т. е. при больших временах

$$g_p(\xi) \sim \left[\frac{3 \cos \theta_0}{2 C(3)} \right]^2 \frac{\xi^3}{\sin \theta_0}. \quad (3.5)$$

Размерные компоненты скорости при этом имеют вид

$$v(r, t) \sim \left[\frac{3 \cos \theta_0}{2 C(3)} \right]^2 \frac{r^3}{vt^2 \sin \theta_0}, \quad u(r, t) \sim \frac{r}{2t}, \quad w(r, t) \sim -\frac{z}{t} \quad (3.6)$$

Заметим, что сюда не входят параметры A и p , определяющие начальное состояние, поэтому формулы (3.6) описывают универсальную стадию торможения. При этом зависимость компонент скорости от времени получается такая же, как для случая двух бесконечных дисков. Аналогичным образом располагаются и области асимптотик (3.2) и (3.5) по радиусу: если $p > 3$, то (3.5) имеет место при $r \gg t^{3-p}$, т. е. при больших r , а (3.2) — при малых; если же $p < 3$, то наоборот. При этом легко видеть, что область (3.5) расширяется со временем за счет области (3.2).

4. Формулы (3.6) служат асимптотикой автомодельного решения (3.1) при $\xi \rightarrow \infty$. Но (3.1) в свою очередь является асимптотикой точного решения уравнений Навье — Стокса при $E \rightarrow 0$. Стремление решения (3.1) к универсальной стадии (3.6) указывает на то, что точное решение задачи также стремится к универсальной стадии, для которой (3.6) является асимптотикой при $E \rightarrow 0$. Отметим, что в (размерные) формулы (3.6) входит только один размерный параметр v (это, конечно, отражает независимость (3.6) от начального условия). Поэтому из соображений размерности и в соответствии с принципами асимптотической автомодельности [17] можно искать выражение для скорости на этой стадии в виде

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{v}{t}} \mathbf{v}_a \left(\frac{r}{\sqrt{vt}}, \frac{z}{\sqrt{vt}} \right) \quad (4.1)$$

Такое решение уравнений Навье — Стокса, удовлетворяющее граничным (но не начальным) условиям, будет служить асимптотикой точного решения при больших временах t независимо от числа Экмана.

Подстановка (4.1) в (1.1) практически не упрощает уравнений. Аналитическое выражение для (4.1) найти не удастся, но нетрудно описать асимптотическое поведение этого решения при $E \rightarrow 0$ и $E \rightarrow \infty$. Для случая $E \rightarrow 0$ асимптотику (4.1) должны давать, как уже говорилось, формулы (3.6). Действительно, сравнивая (3.6) и (4.1), найдем

$$\mathbf{v}_a(x, y) \sim \left(\left[\frac{3 \cos \theta_0}{2 C(3)} \right]^2 \frac{x^3}{\sin \theta_0}, \frac{x}{2}, -y \right)$$

Для случая $E \rightarrow \infty$ ($Re \rightarrow 0$) линеаризуем уравнения Навье — Стокса,

считая $v=O(\text{Re})$, $u, w=O(\text{Re}^2)$. Тогда для азимутальной компоненты векторной автомодельной функции v_a получим уравнение

$$\left(\eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left(2 + \frac{\eta^2}{2} \right) \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\eta^2}{2} \right) v_a + \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \text{ctg } \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) v_a = 0$$

где $\eta = \rho / \sqrt{vt}$; (ρ, φ, θ) — сферические координаты.

Разделяя переменные, найдем при $\eta \rightarrow 0$ (т. е. при больших временах)

$$v_a \sim T_1(\theta) \eta^{-1/2 + \sqrt{1/4 + \lambda_1}}$$

где λ_1 — первое собственное значение, а T_1 — соответствующая ему собственная функция краевой задачи

$$T'' + T' \text{ctg } \theta + \left(\lambda - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) T = 0$$

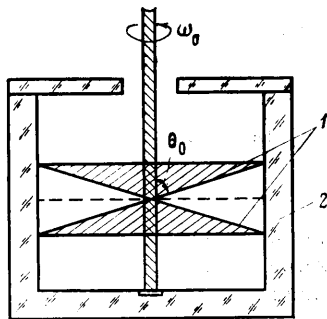
$$T(\theta_0) = T(\pi - \theta_0) = 0$$

В размерных переменных

$$v \sim T_1(\theta) p^{-1/2 + \sqrt{1/4 + \lambda_1}} (vt)^{-1/2 - 1/2 \sqrt{1/4 + \lambda_1}} \quad (4.2)$$

Интересно, что на этой вязкой стадии торможения азимутальная скорость зависит от времени по-прежнему алгебраически, в то время как при торможении между дисками эта зависимость экспоненциальная [8]. Впрочем, если $\theta_0 = \pi(1 - \epsilon)/2$, где $\epsilon \ll 1$, то $\lambda_1 = O(\epsilon^{-2}) \gg 1$, т. е. для «плоских» конусов зависимость (4.2) в некотором смысле приближается к экспоненциальной.

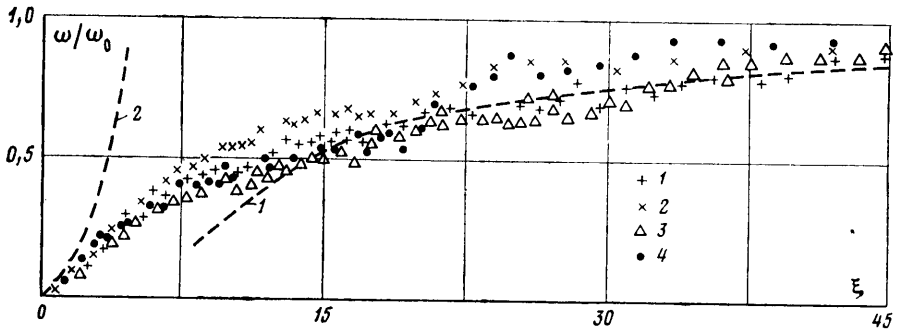
Суммируя полученные результаты, можно утверждать, что при фиксированном значении радиуса, где достаточно мало начальное значение числа Экмана, азимутальная скорость проходит три стадии: I — состояния, близкого к начальному (3.3), II — нелинейного торможения (3.6) и III — вязкого торможения (4.2). С другой стороны, в каждый момент времени имеются три области по радиусу, соответствующие этим стадиям, но их взаимное расположение зависит от степени p в начальном условии. Для наиболее легко практически реализуемого случая $p=1$ области схематически показаны на фиг. 1.



Фиг. 2

5. Для проверки выводов теории было проведено экспериментальное исследование процесса торможения жидкости между конусами. Схема экспериментальной установки приведена на фиг. 2. Два соосных конуса 1, насаженные на общий вал, помещались в цилиндрическую полость плексигласового куба 2. Конусы приводились во вращение электродвигателем; их угловая скорость могла выбираться в пределах от 1 до 20 с⁻¹. Рабочей жидкостью служила вода (вязкость $\nu = 0,01$ см²/с). Радиус цилиндрической полости $r_0 = 10$ см, зазор между стенкой полости и краями конусов не превышал 0,5 мм. Половинный угол раствора конусов составлял $\theta_0 = 78,7^\circ$ ($\text{ctg } \theta_0 = 1/5$). Точка, в которой измерялась скорость, располагалась в плоскости симметрии $z=0$; ее расстояние от оси системы составляло в разных экспериментах от 3,5 до 7,5 см.

После того как жидкость между конусами приходила в состояние квазитвердого вращения, они резко останавливались. Величина азимутальной скорости в зависимости от времени измерялась с помощью лазерного доплеровского анемометра фирмы DISA. Информация о величине ази-



Фиг. 3

мутальной скорости с аналогового выхода электронного блока обработки сигналов этой же фирмы регистрировалась самописцем. Измерения при малых скоростях течения (от 1 до 5 мм/с) производились с применением акустооптического преобразователя, сдвигающего частоту одного из лучей на 40 МГц.

6. Установка рассчитана на создание «быстрого» вращения (характерные начальные значения числа Экмана $10^{-5} < \nu/\omega r^2 < 10^{-3}$). Основным критерием применимости теории в этой области параметров служит подтверждение автомодельного характера течения в соответствии с формулами (3.1). Для случая $p=1$ (начальное состояние — твердотельное вращение) из (3.1) получим в размерных переменных

$$\xi = r/t\sqrt{\omega_0\nu} \quad (6.1)$$

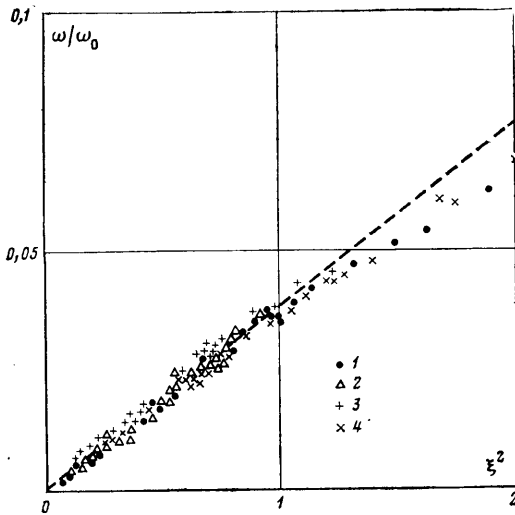
Для локальной угловой скорости жидкости ω из (3.1) найдем

$$\omega = \omega_0 g_1(\xi)/\xi \quad (6.2)$$

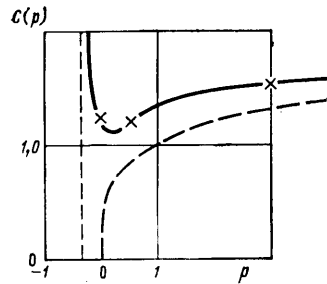
где ω_0 — начальное значение угловой скорости. На фиг. 3 приведены экспериментальные зависимости безразмерной угловой скорости ω/ω_0 от автомодельной координаты ξ при различных значениях r и ω_0 , пересчитанные с измеренных зависимостей $v(t)$. Точки 1–4 соответствуют следующим значениям r и ω_0 : 4,5 см, 2,5 с⁻¹; 4,5 см, 11,3 с⁻¹; 5,6 см, 2,6 с⁻¹; 6,0 см, 8,9 с⁻¹. Видно, что на начальном этапе торможения, при $\xi \geq 15$, они группируются около пунктирной кривой 1, изображающей асимптотику (3.2). Небольшой разброс на этом этапе обусловлен слабыми инерционными колебаниями (см. [1, 7]). По мере их затухания разброс уменьшается. Таким образом, эксперимент подтверждает автомодельный характер течения.

Количественное сравнение теории с экспериментом возможно при $\xi \rightarrow \infty$ и $\xi \rightarrow 0$, когда справедливы асимптотические формулы (3.4) и (3.9). В области $\xi \rightarrow \infty$ из данных эксперимента определялся коэффициент $C(1)$. Для этого данные представлялись в таком виде, чтобы асимптотика (3.4) изображалась прямой и ее наклон определялся методом наименьших квадратов. Эксперимент дает значение $C(1) = 1,39 \pm 0,03$, хорошо согласующееся со значением 1,369, полученным численными методами в [16], а также с величиной $1,37 \pm 0,02$, найденной экспериментально в [7].

Для малых значений автомодельной переменной ξ на фиг. 4 приведена зависимость ω/ω_0 от ξ^2 (точки 1–4 соответствуют значениям r и ω_0 : 3,8 см, 13,9 с⁻¹; 3,8 см, 15,5 с⁻¹; 5,6 см, 12,2 с⁻¹; 5,6 см, 15,7 с⁻¹). Видно, что точки приближаются к прямой, соответствующей асимптотике (3.9) (пунктир на фиг. 4; на фиг. 3 эта асимптотика изображается параболой 2). Начиная со значений $\xi \approx 1$ безразмерная угловая скорость пропорциональна ξ^2 . Эти данные позволяют определить значение коэффициента $C(3) = 1,52 \pm 0,05$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Экспериментальное подтверждение применимости «обобщенных уравнений Кармана» (3.6), рассматривавшихся, в частности, в работах [11–13] в связи с проблемой взаимодействия точечного вихря с твердой границей, представляет значительный интерес. Эти уравнения имеют ограниченные решения не при всех p . Так, для $p = -1$ доказано [11], что ограниченных решений нет. Для $-1 < p < -1/3$ в [12] показано, что ряды, представляющие решения, расходятся. С другой стороны, для $p = 1$ доказано существование решений [18]. Численными методами система (3.6) исследовалась при $p = 0, 1/2$ [12] и 1 [12, 16]. Для $p \rightarrow \infty$ нетрудно показать, что $C(p) = O(p^{1/4})$. Наконец, в [7] экспериментально определено $C(1)$, а в настоящей работе — $C(1)$ и $C(3)$; причем первое из них хорошо согласуется с результатами численного счета. К сожалению, авторам не удалось найти в литературе никаких расчетов для $p > 1$. Зависимость $C(p)$, следующая из перечисленных результатов, изображена на фиг. 5 сплошной кривой (пунктирная кривая схематически представляет асимптотику при $p \rightarrow \infty$).

В заключение авторы благодарят А. М. Обухова и Ф. В. Должанского за постановку задачи и конструктивные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Greenspan H. P., Howard L. N. On a time-dependent motion of a rotating fluid. — J. Fluid Mech., 1963, v. 17, pt 3, p. 385–404.
2. Greenspan H. P., Weinbaum S. On non-linear spin-up of a rotating fluid. — J. Math. and Phys., 1965, v. 44, № 1, p. 66–85.
3. Benton E. R. Nonlinear hydrodynamic and hydromagnetic spin-up driven by Ekman — Hartmann boundary layers. — J. Fluid Mech., 1973, v. 57, Pt 2, p. 337–360.
4. Weidman P. D. On the spin-up and spin-down of a rotating fluid. — J. Fluid Mech., 1976, v. 77, pt 4, p. 685–708.
5. Matkovsky B. J., Siegmann W. L. The flow between counter-rotating disks at high Reynolds number. — SIAM J. Appl. Math., 1976, v. 30, № 4, p. 720–727.
6. Должанский Ф. В. О движении жидкости между вращающимися конусами. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 2, с. 58–64.
7. Крымов В. А., Манин Д. Ю. Торможение жидкости в цилиндре малой высоты при больших числах Рейнольдса. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1986, № 3, с. 39–46.
8. Должанский Ф. В., Крымов В. А. О торможении жидкости в цилиндре малой высоты. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 1, с. 19–25.
9. Wedemeyer E. H. The unsteady flow within a spinning cylinder. — J. Fluid Mech., 1964, v. 20, pt 3, p. 383–399.
10. Karman Th., von. Uber laminare und turbulente Reibung. — Z. angew. Math. Mech., 1921, B. 1, H. 4, S. 233–252.

11. *Rott N., Lewellen W. S.* Boundary layer and their interactions in rotating flows.— In: Progress in Aeronaut. Sciences, 1966, v. 7, p. 111—144.
12. *Kuo H. L.* Axisymmetric flow in the boundary layer of a maintained vortex.— J. Atmos. Sci., 1971, v. 28, № 1, p. 20—41.
13. *Belcher R. J., Burggraf O. R., Stewartson K.* On generalized-vortex boundary layers.— J. Fluid Mech., 1972, v. 52, pt 4, p. 753—780.
14. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
15. *Bödewadt U. T.* Die Drehströmung über festem Gründe.— Z. angew. Math. Mech., 1940, B. 20, H. 5, S. 241—253.
16. *Rogers M. H., Lance G. N.* The rotationally symmetric flow of a viscous fluid in the presence of an infinite rotating disk.— J. Fluid Mech., 1960, v. 7, pt 4, p. 617—631.
17. *Баренблатт Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоздат, 1978. 207 с.
18. *McLeod J. B.* The existence of axially symmetric flow above a rotating disk.— Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1971, v. 324, № 1559, p. 391—414.

Москва

Поступила в редакцию
10.IV.1985