МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1986

УДК 532.51:537.84

КВАЗИПРОДОЛЬНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ УЗКИХ ПУЧКОВ НЕЛИНЕЙНЫХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВОЛН

РУДЕРМАН М. С.

В приближении идеальной магнитной гидродинамики в плазме могут распространяться волны трех типов: альфвеновские и быстрые и медленные магнитозвуковые [1]. В том случае, когда волны распространяются вдоль поля, скорость одной из магнитозвуковых волн стремится к скорости звука, а другой – к альфвеновской скорости. В волне, распространяющейся со скоростью звука, возмущаются только плотность, давление и продольная компонента скорости, поэтому она фактически является звуковой волной. Поскольку скорость продольно распространяющейся альфвеновской волны равна альфвеновской скорости, то имеются две волны, распространяющиеся с одной скоростью. В этих волнах возмущаются только поперечные компоненты скорости и магнитного поля, поэтому в дальнейшем такие волны будем называть поперечными.

Все эти утверждения остаются приближенно справедливыми и при квазипродольном распространении магнитозвуковых волн, поэтому магнитозвуковую волну, распространяющуюся со скоростью, близкой к скорости звука, будем называть квазизвуковой, а альфвеновскую волну и магнитозвуковую волну, распространяющуюся со скоростью, близкой к альфвеновской,– квазипоперечными.

При учете слабой нелинейности наклонное распространение плоских магнитозвуковых волн описывается уравнением простых волн, содержащих квадратичную нелинейность и по форме совпадающим с уравнением для нелинейных звуковых волн. То же верно для звуковой волны, распространяющейся вдоль магнитного поля. Однако для поперечных волн, распространяющихся вдоль поля, все будет иначе.

Нелинейное распространение плоских поперечных волн вдоль поля рассматривалось в [2–5]. Оказалось, что распространение поперечных волн вдоль магнитного поля описывается уравнением для двумерного вектора (например, для перпендикулярной компоненты магнитного поля), содержащим кубическую нелинейность. При этом волны с круговой поляризацией распространяются без изменения формы, поэтому за ними сохраняется название альфвеновских. Волны с плоской и эллиптической поляризацией опрокидываются. В результате образуются ударные волны включения.

В том случае, когда волна не плоская, необходимо учитывать зависимость от координат, перпендикулярных направлению распространения волны. В нелинейной акустике такой учет приводит к замене уравнения простых волн уравнением Хохлова – Заболотской [6, 7], содержащим дополнительный дифракционный член, описывающий диффузию энергии волны в направлении, перпендикулярном волновой трубке.

В настоящей работе выведено уравнение, аналогичное уравнению Хохлова – Заболотской, для узких пучков квазипоперечных волн, распространяющихся под малыми углами к магнитному полю. Исследовано влияние дифракции на распространение волн в линейном приближении.

1. Вывод основного уравнения. Рассмотрим распространение волн в столкновительной бездиссипативной плазме, описываемой уравнениями магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\rho\mathbf{v})=0;\qquad p=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{1}{4\pi\rho}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}\tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B});\qquad \nabla\mathbf{B}=0$$

Предполагается, что волны распространяются вдоль оси x декартовой системы координат x, y, z. В невозмущенном состоянии среда неподвижна, ее плотность и давление ρ_0 и p_0, а магнитное поле равно $\mathbf{B}_0=B_0\mathbf{x}_0+\mathbf{b}_0$, где $\mathbf{x}_0$ — единичный вектор оси x, $\mathbf{b}_0\perp\mathbf{x}_0$. Рассматриваются волны с амплитудой колебаний магнитного поля εB_0, $\varepsilon\ll 1$. Считается, что волны распространяются квазипродольно, т. е. $\mathbf{b}_0=\varepsilon\mathbf{B}_{\perp *}$, $|\mathbf{B}_{\perp *}|\sim B_0$. Учитывается слабая зависимость от y и z. При выводе уравнения Хохлова — Заболотской предполагается, что отношение характерной длины возмущения к характерному поперечному масштабу порядка $\sqrt{\varepsilon}$. При этом условии дифракция оказывается одного порядка с квадратичной нелинейностью. При продольном распространении поперечных волн нелинейность кубична. Предполагая, что член, описывающий дифракцию, имеет такой же вид, как в уравнении Хохлова — Заболотской, нетрудно получить, что дифракция будет конкурировать с кубичной нелинейностью, если отношение длины возмущения к характерному поперечному масштабу порядка ε. В соответствии с этим вводим новые переменные $Y=\varepsilon y$, $Z=\varepsilon z$.

В линейном приближении имеется альфвеновская волна, распространяющаяся со скоростью $V=B_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$, и две магнитозвуковые волны, распространяющиеся со скоростями $V+O(\varepsilon^2)$ и $c_0+O(\varepsilon^2)$ ($c_0^2=\gamma p_0/\rho_0$ — квадрат скорости звука). В дальнейшем полагаем $|V^2-c_0^2|/V^2\gtrsim 1$, поэтому взаимодействие между квазипоперечными и квазизвуковой волнами слабое. При этом если в начальный момент возбуждены только квазипродольные колебания с амплитудой $O(\varepsilon)$, то для любых моментов времени амплитуда квазизвуковой волны будет $O(\varepsilon^2)$.

Нелинейность оказывает заметное влияние на квазипоперечную волну, когда она проходит расстояние, в ε^{-2} раз превышающее характерную длину волны. Поэтому решение можно искать в виде $f(T, X, Y, Z)$, где $T=t-x/V$, $X=\varepsilon^2 x$. В новых переменных система уравнений (1.1) запишется в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial T}-\frac{1}{V}\frac{\partial(\rho u)}{\partial T}+\varepsilon^2\frac{\partial(\rho u)}{\partial X}+\varepsilon\nabla_\perp{}^\circ(\rho\mathbf{v}_\perp)=0;\qquad p=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

$$\frac{\partial u}{\partial T}-\frac{u}{V}\frac{\partial u}{\partial T}+\varepsilon^2 u\frac{\partial u}{\partial X}+\varepsilon(\mathbf{v}_\perp\nabla_\perp{}^\circ)u=\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial T}-\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial X}\right)\times$$
$$\times\left(p+\frac{B_\perp{}^2}{8\pi}\right)+\frac{\varepsilon}{4\pi\rho}(B_\perp\nabla_\perp{}^\circ)B_x$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}_\perp}{\partial T}-\frac{u}{V}\frac{\partial\mathbf{v}_\perp}{\partial T}+\varepsilon^2 u\frac{\partial\mathbf{v}_\perp}{\partial X}+\varepsilon(\mathbf{v}_\perp\nabla_\perp{}^\circ)\mathbf{v}_\perp=-\frac{\varepsilon}{\rho}\nabla_\perp{}^\circ\left(p+\frac{B^2}{8\pi}\right)+$$
$$+\frac{1}{4\pi\rho}\left(-\frac{B_x}{V}\frac{\partial\mathbf{B}_\perp}{\partial T}+\varepsilon^2 B_x\frac{\partial\mathbf{B}_\perp}{\partial X}+\varepsilon(\mathbf{B}_\perp\nabla_\perp{}^\circ)\mathbf{B}_\perp\right)\tag{1.2}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial T}=\varepsilon\nabla_\perp{}^\circ(u\mathbf{B}_\perp-B_x\mathbf{v}_\perp)$$

$$\frac{\partial B_\perp}{\partial T}=\frac{1}{V}\frac{\partial(u\mathbf{B}_\perp)}{\partial T}-\varepsilon^2\frac{\partial(u\mathbf{B}_\perp)}{\partial X}-\frac{B_x}{V}\frac{\partial\mathbf{v}_\perp}{\partial T}+\varepsilon^2 B_x\frac{\partial\mathbf{v}_\perp}{\partial X}+\varepsilon(\mathbf{B}_\perp\nabla_\perp{}^\circ)\mathbf{v}_\perp-$$
$$-\varepsilon(\mathbf{v}_\perp\nabla_\perp{}^\circ)\mathbf{B}_\perp-\varepsilon\mathbf{B}_\perp(\nabla_\perp{}^\circ\mathbf{v}_\perp)$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial B_x}{\partial T}=\varepsilon^2\frac{\partial B_x}{\partial X}+\varepsilon(\nabla_\perp{}^\circ\mathbf{B}_\perp)$$

$$\mathbf{v}=u\mathbf{x}_0+\mathbf{v}_\perp,\ \mathbf{B}=B_x\mathbf{x}_0+\mathbf{B}_\perp,\ \nabla_\perp{}^\circ=(0,\ \partial/\partial Y,\ \partial/\partial Z)$$

В дальнейшем предполагаем, что при $|Y|+|Z|\to\infty$ (или при $|Y|\to\infty$ в случае плоского пучка, когда $\partial/\partial Z=0$) все возмущения затухают. Рассматриваются либо периодические по времени возмущения, либо возмущения, затухающие при $T\to-\infty$. В случае периодических возмущений все переменные представляются в виде $f=f'+\langle f\rangle$, где угловые скобки означают среднее значение функции за период. При этом предполагается, что при $X=0$ средние значения всех возмущений равны нулю. Ниже дан вывод уравнения для периодических возмущений. Однако все остается справедливым и для возмущений, затухающих при $T\to-\infty$, если положить $\langle\ \rangle=0$.

Решение системы (1.2) ищем в виде степенных рядов $f=f_0+\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2+\varepsilon^3 f_3+\ldots$ В первом приближении имеем

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial T}=\frac{\rho_0}{V}\frac{\partial u_1}{\partial T};\qquad p_1=c_0^2\rho_1;\qquad \frac{\partial u_1}{\partial T}=\frac{1}{\rho_0 V}\frac{\partial p_1}{\partial T}$$
$$\frac{\partial\mathbf{v}_{\perp1}}{\partial T}=-\frac{V}{B_0}\frac{\partial\mathbf{B}_{\perp1}}{\partial T};\qquad \frac{\partial B_{x1}}{\partial T}=0;\qquad \frac{\partial\mathbf{B}_{\perp1}}{\partial T}=-\frac{B_0}{V}\frac{\partial\mathbf{v}_{\perp1}}{\partial T}\tag{1.3}$$

Из (1.3) следует
$$\rho_1'=p_1'=u_1'=B_{x1}'=0;\qquad \mathbf{v}_{\perp1}'=-(V/B_0)\mathbf{B}_{\perp1}'\tag{1.4}$$

Собирая члены порядка ε^2 в (1.2) и учитывая (1.4), имеем

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial T}-\frac{\rho_0}{V}\frac{\partial u_2}{\partial T}=-\rho_0(\nabla_\perp{}^\circ\mathbf{v}_{\perp1});\qquad p_2=c_0^2\left(\rho_2+\frac{\gamma-1}{2\rho_0}\langle\rho_1\rangle^2\right)$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial T}-\frac{1}{\rho_0 V}\frac{\partial p_2}{\partial T}=\frac{V}{2B_0^2}\frac{\partial}{\partial T}(\mathbf{B}_{\perp1}+\mathbf{B}_{\perp*})^2;\qquad \frac{\partial B_{x2}}{\partial T}=-B_0(\nabla_\perp{}^\circ\mathbf{v}_{\perp1})$$
$$\frac{\partial\mathbf{v}_{\perp2}}{\partial T}+\frac{V}{B_0}\frac{\partial\mathbf{B}_{\perp2}}{\partial T}=\left(\frac{V\langle\rho_1\rangle}{\rho_0 B_0}-\frac{V\langle B_{x1}\rangle}{B_0^2}-\frac{\langle u_1\rangle}{V}\right)\frac{\partial\mathbf{B}_{\perp1}}{\partial T}-$$
$$-\frac{1}{\rho_0}\nabla_\perp{}^\circ\left(c_0^2\langle\rho_1\rangle+\frac{B_0}{4\pi}\langle B_{x1}\rangle\right)\tag{1.5}$$
$$\frac{\partial\mathbf{B}_{\perp2}}{\partial T}+\frac{B_0}{V}\frac{\partial\mathbf{v}_{\perp2}}{\partial T}=\left(\frac{\langle u_1\rangle}{V}+\frac{\langle B_{x1}\rangle}{B_0}\right)\frac{\partial\mathbf{B}_{\perp1}}{\partial T}$$

Из (1.5) следует

$$\langle B_{x1}\rangle=-\frac{B_0c_0^2}{\rho_0V^2}\langle\rho_1\rangle;\qquad \langle u_1\rangle=\frac{V^2-2c_0^2}{2\rho_0V}\langle\rho_1\rangle;\qquad \nabla_\perp{}^\circ\langle\mathbf{v}_{\perp1}\rangle=\nabla_\perp{}^\circ\langle\mathbf{B}_{\perp1}\rangle=0$$
$$\mathbf{v}_{\perp2}'=-\frac{V}{B_0}\mathbf{B}_{\perp2}'+\frac{\langle\rho_1\rangle}{2\rho_0}\mathbf{B}_{\perp1}';\qquad B_{x2}'=V\varphi_1;\qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial T}=\nabla_\perp{}^\circ\mathbf{B}_{\perp1}$$
$$u_2'=\frac{V\{|\mathbf{B}_{\perp1}'|^2-\langle|\mathbf{B}_{\perp1}'|^2\rangle+2\mathbf{B}_{\perp1}'(\mathbf{B}_{\perp*}+\langle B_{\perp1}\rangle)\}}{8\pi\rho_0(V^2-c_0^2)}+\frac{c_0^2V^2\varphi_1}{B_0(V^2-c_0^2)}\tag{1.6}$$
$$\rho_2'=\frac{|\mathbf{B}_{\perp1}'|^2-\langle|\mathbf{B}_{\perp1}'|^2\rangle+2\mathbf{B}_{\perp1}'(\mathbf{B}_{\perp*}+\langle\mathbf{B}_{\perp1}\rangle)}{8\pi(V^2-c_0^2)}+\frac{\rho_0V^3\varphi_1}{B_0(V^2-c_0^2)}$$

Собирая члены порядка ε^3 в (1.2) и осредняя, получим с учетом (1.4) и (1.6)

$$\rho_0\frac{\partial\langle u_1\rangle}{\partial X}+\langle\mathbf{v}_{\perp1}\rangle\nabla_\perp{}^\circ\langle\rho_1\rangle+\rho_0\nabla_\perp{}^\circ\langle\mathbf{v}_{\perp2}\rangle=0$$
$$c_0^2\frac{\partial\langle\rho_1\rangle}{\partial X}+\rho_0\langle\mathbf{v}_{\perp1}\rangle\nabla_\perp{}^\circ\langle u_1\rangle-\frac{1}{4\pi}\langle\mathbf{B}_{\perp1}\rangle\nabla_\perp{}^\circ\langle B_{x1}\rangle=0$$
$$\frac{\partial\langle\mathbf{B}_{\perp1}\rangle}{\partial X}+\frac{1}{B_0}(\langle\mathbf{B}_{\perp1}\rangle\nabla_\perp{}^\circ)\langle\mathbf{B}_{\perp1}\rangle-\frac{B_0}{V^2}(\langle\mathbf{v}_{\perp1}\rangle\nabla_\perp{}^\circ)\langle\mathbf{v}_{\perp1}\rangle=$$
$$=\nabla_\perp{}^\circ\left(\frac{4\pi\langle p_2\rangle}{B_0}+\langle B_{x2}\rangle+\frac{1}{2}\langle|\mathbf{B}_{\perp1}|^2\rangle\right)$$

$$\langle \mathbf{B}_{\perp1}\rangle \nabla_\perp{}^\circ\langle u_1\rangle - \langle \mathbf{v}_{\perp1}\rangle \nabla_\perp{}^\circ\langle B_{x1}\rangle = B_0 \nabla_\perp{}^\circ\langle \mathbf{v}_{\perp2}\rangle \tag{1.7}$$

$$B_0\frac{\partial\langle \mathbf{v}_{\perp1}\rangle}{\partial X} + (\langle \mathbf{B}_{\perp1}\rangle \nabla_\perp{}^\circ)\langle \mathbf{v}_{\perp1}\rangle - (\langle \mathbf{v}_{\perp1}\rangle \nabla_\perp{}^\circ)\langle \mathbf{B}_{\perp1}\rangle = 0$$

$$\frac{\partial\langle B_{x1}\rangle}{\partial X} = -\nabla_\perp{}^\circ\langle \mathbf{B}_{\perp2}\rangle.$$

Из (1.6) следует, что $\langle \mathbf{v}_{\perp1}\rangle$ можно представить в виде $\langle \mathbf{v}_{\perp1}\rangle = \nabla_\perp{}^\circ\times(w\mathbf{x}_0)$. Подставляя это выражение в предпоследнее уравнение (1.6), получим

$$\frac{\partial w}{\partial X} + \frac{1}{B_0}\langle \mathbf{B}_{\perp1}\rangle \nabla_\perp{}^\circ w = 0$$

откуда в силу условия $w=0$ при $X=0$ следует $w\equiv0$, а следовательно, и $\langle \mathbf{v}_{\perp1}\rangle\equiv0$. Теперь из третьего уравнения (1.7) следует

$$\frac{\partial}{\partial X}(\nabla_\perp{}^\circ\times\langle \mathbf{B}_{\perp1}\rangle) + \frac{1}{B_0}(\langle \mathbf{B}_{\perp1}\rangle \nabla_\perp{}^\circ)(\nabla_\perp{}^\circ\times\langle \mathbf{B}_{\perp1}\rangle) = 0$$

откуда с учетом (1.6) легко получим $\nabla_\perp{}^\circ\times\langle \mathbf{B}_{\perp1}\rangle=0$. Поскольку $\nabla_\perp{}^\circ\langle \mathbf{B}_{\perp1}\rangle=0$, окончательно имеем $\langle \mathbf{B}_{\perp1}\rangle=0$. После этого из (1.6) и (1.7) находим

$$\langle\rho_1\rangle = \langle u_1\rangle = \langle B_{x1}\rangle = \nabla_\perp{}^\circ\langle \mathbf{B}_{\perp2}\rangle = \nabla_\perp{}^\circ\langle \mathbf{v}_{\perp2}\rangle = 0$$

$$8\pi c_0{}^2\langle\rho_2\rangle + 2B_0\langle B_{x2}\rangle + \langle|\mathbf{B}_{\perp1}|^2\rangle = \langle|\mathbf{B}_{\perp1}|^2\rangle_0 \equiv \langle|\mathbf{B}_{\perp1}|^2\rangle|_{X=0}. \tag{1.8}$$

Выпишем в третьем приближении по ε четвертое и шестое уравнения системы (1.2). С учетом предыдущих результатов получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{\perp3}}{\partial T} + \frac{V}{B_0}\frac{\partial \mathbf{B}_{\perp3}}{\partial T} = \frac{V^2}{B_0}\frac{\partial \mathbf{B}_{\perp1}}{\partial X} + \frac{V}{B_0}\left(\frac{\langle\rho_2\rangle}{\rho_0} - \frac{\langle u_2\rangle}{V} - \frac{\langle \mathbf{B}_{x2}\rangle}{B_0}\right)\frac{\partial \mathbf{B}_{\perp1}}{\partial T} +$$
$$+\frac{V^2}{B_0{}^2}(\mathbf{B}_{\perp*}\nabla_\perp{}^\circ)\mathbf{B}_{\perp1} - \frac{\varkappa V^2}{2B_0{}^2}\nabla_\perp{}^\circ(|\mathbf{B}_{\perp1}|^2 - \langle|\mathbf{B}_{\perp1}|^2\rangle + 2\mathbf{B}_{\perp*}\mathbf{B}_{\perp1} + 2VB_0\varphi_1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{\perp3}}{\partial T} + \frac{B_0}{V}\frac{\partial \mathbf{v}_{\perp3}}{\partial T} = -V\frac{\partial \mathbf{B}_{\perp1}}{\partial X} + \left(\frac{\langle u_2\rangle}{V} + \frac{\langle \mathbf{B}_{x2}\rangle}{B_0}\right)\frac{\partial \mathbf{B}_{\perp1}}{\partial T} + \varkappa\frac{V}{B_0}\frac{\partial(\varphi_1\mathbf{B}_{\perp1})}{\partial T} +$$
$$+\frac{\varkappa V}{B_0}\mathbf{B}_{\perp*}(\nabla_\perp{}^\circ\mathbf{B}_{\perp1}) - \frac{V}{B_0}(\mathbf{B}_{\perp*}\nabla_\perp{}^\circ)\mathbf{B}_{\perp1} + \frac{\varkappa}{2B_0{}^2}\frac{\partial}{\partial T}\{(|\mathbf{B}_{\perp1}|^2 - \langle|\mathbf{B}_{\perp1}|^2\rangle + \tag{1.9}$$
$$+2\mathbf{B}_{\perp*}\mathbf{B}_{\perp1})(\mathbf{B}_{\perp1}+\mathbf{B}_{\perp*})\}; \qquad \varkappa = \frac{V^2}{V^2 - c_0{}^2}$$

Условие разрешимости (1.9) запишется в виде

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{\perp1}}{\partial X} + \frac{1}{V}\left(\frac{\langle\rho_2\rangle}{2\rho_0} - \frac{\langle u_2\rangle}{V} - \frac{\langle B_{x2}\rangle}{B_0}\right)\frac{\partial \mathbf{B}_{\perp1}}{\partial T} + \frac{1}{B_0}(\mathbf{B}_{\perp*}\nabla_\perp{}^\circ)\mathbf{B}_{\perp1} -$$
$$-\frac{\varkappa}{2B_0}\mathbf{B}_{\perp*}(\nabla_\perp{}^\circ\mathbf{B}_{\perp1}) - \frac{\varkappa}{4VB_0{}^2}\frac{\partial}{\partial T}\{(|\mathbf{B}_{\perp1}|^2 - \langle|\mathbf{B}_{\perp1}|^2\rangle + 2\mathbf{B}_{\perp*}\mathbf{B}_{\perp1})(\mathbf{B}_{\perp1}+\mathbf{B}_{\perp*})\} - \tag{1.10}$$
$$-\frac{\varkappa}{2B_0}\frac{\partial}{\partial T}(\varphi_1\mathbf{B}_{\perp1}) - \frac{\varkappa}{4B_0}\nabla_\perp{}^\circ(|\mathbf{B}_{\perp1}|^2 - \langle|\mathbf{B}_{\perp1}|^2\rangle + 2\mathbf{B}_{\perp*}\mathbf{B}_{\perp1} + 2VB_0\varphi_1) = 0$$

Для определения $\langle\rho_2\rangle$, $\langle u_2\rangle$ и $\langle B_{x2}\rangle$ соберем члены порядка ε^4 в первом, третьем и пятом уравнениях системы (1.2) и осредним полученные уравнения. Учитывая предыдущие результаты, после преобразований имеем

$$\rho_0\frac{\partial\langle u_2\rangle}{\partial X} + \nabla_\perp{}^\circ\langle\rho_2\mathbf{v}_{\perp1}\rangle + \rho_0\nabla_\perp{}^\circ\langle \mathbf{v}_{\perp3}\rangle = 0$$

$$B_0\frac{\partial\langle B_{x2}\rangle}{\partial X} + \frac{\varkappa}{2B_0}\nabla_\perp{}^\circ\langle \mathbf{B}_{\perp1}(|\mathbf{B}_{\perp1}|^2 + 2\mathbf{B}_{\perp1}\mathbf{B}_{\perp*})\rangle + V\varkappa\langle \mathbf{B}_{\perp1}\nabla_\perp{}^\circ\varphi_1\rangle + \mathbf{B}_{\perp*}\nabla_\perp{}^\circ\langle B_{x2}\rangle = 0$$

$$B_0\nabla_\perp{}^\circ\langle \mathbf{v}_{\perp3}\rangle = \mathbf{B}_{\perp*}\nabla_\perp{}^\circ\langle u_2\rangle + \nabla_\perp{}^\circ\langle \mathbf{B}_{\perp1}(u_2 + VB_0{}^{-1}B_{x2})\rangle \tag{1.11}$$

Из первого и третьего уравнений (1.11) с учетом (1.6) следует

$$\frac{\partial\langle u_2\rangle}{\partial X}+\frac{1}{B_0}\mathbf{B}_{\perp *}\nabla_\perp{}^\circ\langle u_2\rangle=0$$

откуда в силу условия $\langle u_2\rangle=0$ при $X=0$ находим $\langle u_2\rangle=0$.

Умножая (1.10) на $2\mathbf{B}_{\perp 1}$ и осредняя, имеем

$$\frac{\partial\langle|\mathbf{B}_{\perp 1}|^2\rangle}{\partial X}+\frac{1}{B_0}\mathbf{B}_{\perp *}\nabla_\perp{}^\circ\langle|\mathbf{B}_{\perp 1}|^2\rangle-\frac{\varkappa}{2B_0}\nabla_\perp{}^\circ\langle\mathbf{B}_{\perp 1}(|\mathbf{B}_{\perp 1}|^2+2\mathbf{B}_{\perp *}\mathbf{B}_{\perp 1})\rangle-$$
$$-\varkappa V\langle B_{\perp 1}\nabla_\perp{}^\circ\varphi\rangle=0 \tag{1.12}$$

Складывая второе уравнение (1.11) с (1.12), получим

$$\frac{\partial}{\partial X}(B_0\langle\mathbf{B}_{x2}\rangle+\langle|\mathbf{B}_{\perp 1}|^2\rangle)+\frac{1}{B_0}\mathbf{B}_{\perp *}\nabla_\perp{}^\circ(B_0\langle B_{x2}\rangle+\langle|\mathbf{B}_{\perp 1}|^2\rangle)=0$$

откуда и из (1.8) легко находим

$$\langle B_{x2}\rangle=B_0^{-1}(\langle|\mathbf{B}_{\perp 1}|^2\rangle_0-\langle|\mathbf{B}_{\perp 1}|^2\rangle);\quad \langle\rho_2\rangle=\frac{\rho_0V^2}{2c_0{}^2B_0{}^2}(\langle|\mathbf{B}_{\perp 1}|^2\rangle-\langle|\mathbf{B}_{\perp 1}|^2\rangle_0)$$

Подставляя найденные значения $\langle\rho_2\rangle$, $\langle u_2\rangle$ и $\langle B_{x2}\rangle$ в (1.10), возвращаясь к исходным переменным и вводя $\mathbf{b}=\varepsilon\mathbf{B}_{\perp 1}$, $\varphi=\varepsilon\varphi_1$ и $\nabla=(0,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z)$, окончательно получим следующее уравнение, описывающее эволюцию магнитного поля в пучке:

$$\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial x}+\frac{1}{V}\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}-\frac{\varkappa}{4VB_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\{(|\mathbf{b}|^2-(1+\beta)\langle|\mathbf{b}|^2\rangle+\beta\langle|\mathbf{b}|^2\rangle_0+2\mathbf{b}_0\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{b}_0)\}-$$
$$-\frac{\varkappa}{2B_0}\mathbf{b}_0(\nabla_\perp\mathbf{b})+\frac{1}{B_0}(\mathbf{b}_0\nabla_\perp)\mathbf{b}-\frac{\varkappa}{2B_0}\frac{\partial}{\partial t}(\varphi\mathbf{b})-\frac{\varkappa V}{2}\nabla_\perp\varphi-$$
$$-\frac{\varkappa}{4B_0}\nabla_\perp(|\mathbf{b}|^2-\langle|\mathbf{b}|^2\rangle+2\mathbf{b}_0\mathbf{b})=0;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}=\nabla_\perp\mathbf{b};\quad \langle\varphi\rangle=0;\quad \beta=\frac{V^2+4c_0^2}{\varkappa c_0^2} \tag{1.13}$$

Отметим, что при $\mathbf{b}_0=0$ и $\nabla_\perp=0$ уравнение (1.13) с точностью до замены независимых переменных совпадает с уравнением, полученным в [5]. Как уже указывалось, уравнение (1.13) справедливо для случая, когда все возмущения затухают при $t\to-\infty$, если положить $\langle|\mathbf{b}^2|\rangle=0$. Если к тому же $\mathbf{b}_0=0$, то уравнение (1.13) заметно упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial x}+\frac{1}{V}\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}-\frac{\varkappa}{4VB_0^2}\frac{\partial}{\partial t}(|\mathbf{b}|^2\mathbf{b})-\frac{\varkappa}{2B_0}\frac{\partial}{\partial t}(\varphi\mathbf{b})-$$
$$-\frac{\varkappa}{4B_0}\nabla_\perp|\mathbf{b}|^2-\frac{\varkappa V}{2}\nabla_\perp\varphi=0$$

2. Линейное приближение для узких пучков. Уравнение (1.13) весьма сложно и его решение в сколько-нибудь интересных физических ситуациях можно, по-видимому, получить только с помощью численных расчетов. В связи с этим отметим, что до сих пор аналитически не получено ни одного физически интересного решения гораздо более простого уравнения Хохлова — Заболотской. Однако интересные эффекты, показывающие существенное различие в поведении квазипродольно распространяющихся пучков магнитогидродинамических волн и звуковых пучков, возникают уже в линейном приближении.

В линейном приближении уравнение (1.13) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial x}+\frac{1}{V}\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}+\frac{1}{B_0}(\mathbf{b}_0\nabla_\perp)\mathbf{b}-\frac{\varkappa}{2VB_0^2}\mathbf{b}_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{b}_0\mathbf{b})-\frac{\varkappa}{2B_0}\nabla_\perp(\mathbf{b}_0\mathbf{b})-\right.$$

$$-\frac{\varkappa}{2B_0}\mathbf{b}_0(\nabla_\perp\mathbf{b})\Big\} = \frac{\varkappa V}{2}\nabla_\perp(\nabla_\perp\mathbf{b}) \qquad (2.1)$$

Ищем решение (2.1) в виде $\mathbf{b}=\operatorname{Im}\mathbf{A}e^{i\tau}$, $\tau=\omega(t-x/V)$. В результате для $\mathbf{A}$ имеем уравнение

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} = -\frac{1}{B_0}(\mathbf{b}_0\nabla_\perp)\mathbf{A} + \frac{i\varkappa\omega}{2VB_0^2}\mathbf{b}_0(\mathbf{b}_0\mathbf{A}) + \frac{\varkappa}{2B_0}\mathbf{b}_0(\nabla_\perp\mathbf{A}) +$$
$$+\frac{\varkappa}{2B_0}\nabla_\perp(\mathbf{b}_0\mathbf{A}) - \frac{i\varkappa V}{2\omega}\nabla_\perp(\nabla_\perp\mathbf{A}) \qquad (2.2)$$

В дальнейшем рассматриваем волны с произвольной эллиптической поляризацией, однако полагаем, что поляризация одинакова во всех точках излучателя, т. е. во всех точках оси эллипсов поляризации направлены в одну сторону и отношение осей одно и то же. Из этого предположения следует, что при $x=0$ величину $\mathbf{A}$ можно записать в виде

$$\mathbf{A}=\mathbf{n}F(y,z),\ \mathbf{n}=(\cos\alpha+iq\sin\alpha,\ \sin\alpha-iq\cos\alpha)$$
$$0\leqslant q\leqslant 1,\ 0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2 \qquad (2.3)$$

где q — отношение осей эллипса поляризации, α — угол между большой осью эллипса поляризации и осью y, $\mathbf{n}$ — двумерный комплексный вектор, лежащий в плоскости y, z, $F(y, z)$ — действительная функция.

Прежде всего отметим, что продольный пучок ($\mathbf{b}_0=0$) распространяется без искажений, если $\nabla_\perp\mathbf{b}=0$ при $x=0$. Распространение без искажений строго вдоль невозмущенного магнитного поля (т. е. в направлении $B_0\mathbf{x}_0+\mathbf{b}_0$) возможно и для квазипродольно распространяющегося пучка ($\mathbf{b}_0\neq 0$), но при выполнении более жестких условий: $\mathbf{b}\perp\mathbf{b}_0$ и $\nabla_\perp\mathbf{b}=0$ при $x=0$.

Рассмотрим далее частные случаи, иллюстрирующие различия в линейной теории звуковых и квазипродольно распространяющихся магнитогидродинамических пучков.

Квазипродольное распространение плоского пучка с гауссовским распределением интенсивности. Пусть параметры пучка не зависят от z и функция F определяется формулой $F=F_0e^{-\eta^2}$, $\eta=y/a$, где a — характерная ширина излучателя. Кроме того, считаем, что $\mathbf{b}_0$ параллелен оси y. Уравнение для $\mathbf{A}$ перепишется в виде

$$\frac{\partial A_y}{\partial\sigma} = \frac{i\varkappa}{2}S^2A_y + (\varkappa-1)S\frac{\partial A_y}{\partial\eta} - \frac{i\varkappa}{2}\frac{\partial^2A_y}{\partial\eta^2}$$
$$\frac{\partial A_z}{\partial\sigma} + S\frac{\partial A_z}{\partial\eta} = 0;\quad \sigma=\frac{Vx}{\omega a^2};\quad S=\frac{\omega a b_0}{VB_0} \qquad (2.4)$$

Уравнение (2.4) с условием (2.3) при $x=0$ легко решается с помощью преобразования Фурье по y. В результате имеем для $\mathbf{b}$

$$b_y=F_0\{\delta(\cos^2\alpha+q^2\sin^2\alpha)\}^{1/2}\exp\{-\delta^2(\eta+S(\varkappa-1)\sigma)^2\}\sin\{\tau+\operatorname{arctg}(q\operatorname{tg}\alpha)+$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2\varkappa\sigma-2\varkappa\sigma\delta^2(\eta+S(\varkappa-1)\sigma)^2+\frac{\varkappa}{2}S^2\sigma\Big\} \qquad (2.5)$$
$$b_z=F_0(\sin^2\alpha+q^2\cos^2\alpha)^{1/2}\exp\{-(\eta-S\sigma)^2\}\sin\{\tau-\operatorname{arctg}(q\operatorname{ctg}\alpha)\};$$
$$\delta=\frac{1}{\sqrt{1+4\varkappa^2\sigma^2}}$$

Фактически формулы (2.5) можно интерпретировать как описывающие распространение двух пучков: магнитозвукового с линейной поляризацией вдоль оси y и альфвеновского с линейной поляризацией вдоль оси z. Магнитозвуковой пучок распространяется вдоль вектора групповой скорости $B_0\mathbf{x}_0-(\varkappa-1)\mathbf{b}_0$ и ведет себя аналогично обычному звуковому [7, 9]: его ширина пропорциональна δ^{-1}, амплитуда убывает как $\sqrt{\delta}$ и при $\sigma\gg1$ пучок становится цилиндрически расходящимся. Альфвеновский пучок распространяется без искажений вдоль вектора невозмущенного магнитного поля $\mathbf{B}_0$.

Продольное распространение цилиндрического пучка с гауссовским распределением интенсивности. Пусть $\mathbf{b}_0=0$ и функция F определяется формулой $F=F_0e^{-r^2}$, $\mathbf{r}=(y/a,\ z/a)$, причем, поскольку нет выделенного направления, полагаем $\alpha=0$.

Взяв дивергенцию уравнения (2.2), получим следующее уравнение и граничные условия, записанные в цилиндрических координатах r, θ, σ:

$$\frac{\partial D}{\partial\sigma}=-\frac{i\varkappa}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial D}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 D}{\partial\theta^2}\right),\qquad D=\frac{1}{a}\nabla_\perp\mathbf{A}$$
$$D|_{\sigma=0}=-2rF_0(\cos\theta-iq\sin\theta)e^{-r^2}\tag{2.6}$$

Решение задачи (2.6) ищем в виде $D=D_0(\sigma,\ r)(\cos\theta-iq\sin\theta)$. Граничная задача для D_0 легко решается с помощью преобразования Ганкеля и дает

$$D_0=-\frac{2rF_0}{(1-2i\varkappa\sigma)^2}\exp\left(-\frac{r^2}{1-2i\varkappa\sigma}\right)$$

После этого $\mathbf{A}$ находится из (2.2) с помощью интегрирования по σ

$$\mathbf{A}=F_0\left\{\mathbf{n}\left(1+\frac{1}{2r^2}\right)-r\frac{(\mathbf{nr})}{r^2}\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\right\}e^{-r^2}-$$
$$-\left\{\frac{\mathbf{n}}{2r^2}-\mathbf{r}\frac{(\mathbf{nr})}{r^2}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{1-2i\varkappa\sigma}\right)\right\}\exp\left(\frac{-r^2}{1-2i\varkappa\sigma}\right)\tag{2.7}$$

Для интенсивности пучка имеем (звездочка означает комплексное сопряжение)

$$\langle|\mathbf{b}|^2\rangle=\frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{A}^*=F_0^2\left\{\left[\frac{1}{4}(q^2+1+(q^2-1)\cos2\theta)\left(1+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1+q^2}{8r^4}\right]l^{-2r^2}-\right.$$
$$-\left[\left(\frac{1+q^2}{2r^2}\left(1+\frac{1}{2r^2}\right)-\frac{\varkappa^2\sigma^2\delta^2Q}{r^2}\right)\cos2\varkappa\sigma\delta^2r^2+\right.\tag{2.8}$$
$$\left.+\frac{\varkappa\sigma\delta^2Q}{2r^2}\sin2\varkappa\sigma\delta^2r^2\right]\exp(-2r^2\delta^2(1+2\varkappa^2\sigma^2))+$$
$$+\left[\frac{1+q^2}{8r^4}-\frac{\delta^2Q}{2}\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\right]\exp(-2\delta^2r^2);\qquad Q=q^2+1+(1-q^2)\cos2\theta$$

Нетрудно видеть, что при $q<1$ интенсивность пучка зависит от θ, т. е. при $\sigma>0$ пучок перестает быть цилиндрическим. Интенсивность на оси пучка определяется формулой

$$\langle|\mathbf{b}|^2\rangle=\frac{1}{2}F_0^2(1+q^2)(1+\varkappa^2\sigma^2)\delta^2$$

При $\sigma\to\infty$ интенсивность пучка на оси уменьшается в четыре раза по сравнению с интенсивностью при $\sigma=0$. Определим радиус пучка $R_\mu(\sigma)$ условием

$$\langle|\mathbf{b}|^2\rangle|_{r=R_\mu(\sigma)}=\mu\langle|\mathbf{b}|^2\rangle|_{r=0}$$

В общем случае $R_\mu(\sigma)$ зависит также от θ, но при $\mu\ll1$ и $\sigma=0$ или $\sigma=\infty$ эта зависимость отсутствует. Из (2.8) при $\mu\ll1$ имеем $R_\mu(\infty)/R_\mu(0)=(\mu\ln^2\mu)^{-1/4}$, т. е. радиус пучка стремится к конечному пределу при $\sigma\to\infty$. При $\mu\ll1$ величина $R_\mu(\infty)/R_\mu(0)$ слабо зависит от μ и при μ, меняющемся от 0,01 до 0,001, меняется от 1,5 до 2,1.

Поведение продольно распространяющегося магнитогидродинамического пучка резко отличается от поведения звукового пучка, который остается цилиндрическим при всех σ, имеет радиус, растущий как σ, и интенсивность, убывающую как σ^{-2} при $\sigma\to\infty$ [7, 9].

Пока не удалось построить ни одного физически интересного точного решения уравнения (1.13). Однако можно надеяться аналитически исследовать влияние нелинейности в случае, когда нелинейность мала по сравнению с дифракцией, либо в случае, когда дифракция мала по сравнению с нелинейностью, как это сделано для звуковых пучков [6–9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.
2. *Parker E. N.* Origin and dynamics of cosmic rays.– Phys. Rev., 1958, v. 109, № 4, p. 1328–1344.
3. *Montgomery D.* Development of hydromagnetic shocks from largeamplitude Alfven waves.– Phys. Rev. Lett., 1959, v. 2, № 2, p. 36–37.
4. *Barnes A., Hollweg J. V.* Large-amplitude hydromagnetic waves.– J. Geophys. Res., 1974, v. 79, № 16, p. 2302–2318.
5. *Cohen R. H., Kulsrud R. M.* Nonlinear evolution of parallel-propagating hydromagnetic waves.– Phys. Fluids, 1974, v. 17, № 12, p. 2215–2224.
6. *Заболотская Е. А., Хохлов Р. В.* Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков.– Акуст. журн., 1969, т. 15, вып. 1, с. 40–47.
7. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975, 288 с.
8. *Заболотская Е. А., Хохлов Р. В.* Сходящиеся и расходящиеся звуковые пучки в нелинейных средах.– Акуст. журн., 1970, т. 16, вып. 1, с. 49–53.
9. *Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В.* Ограниченные квазиплоские пучки периодических возмущений в нелинейной среде.– Акуст. журн., 1973, т. 19, вып. 6, с. 871–876.

Москва

Поступила в редакцию
16.VII.1985