7. *Брыкин М. В.* Приближенная методика расчета распределения радиационных потоков по поверхности затупленных тел при гиперзвуковом обтекании.– Теплофизика высоких температур, 1980, т. 18, № 3, с. 562–566.
8. *Пилюгин Н. Н., Тирский Г. А.* Основы динамики излучающего газа. М.: Изд-во МГУ, 1979. 147 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.VII.1985

УДК 533.6.011.72:534.222.2

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВЗРЫВНОЙ ВОЛНЫ В ГРАВИТИРУЮЩЕМ ШАРЕ С ПОСЛЕДУЮЩИМ РАЗЛЕТОМ В ПУСТОТУ

ГОЛУБЯТНИКОВ А. Н., ЧИЛАЧАВА Т. И.

В звездах, в массивных галактических облаках может происходить детонация легких элементов, содержащихся во внешних слоях, например при гравитационном коллапсе ядра, сопровождающемся инициирующим детонацию нейтринным излучением [1–3]. При этом обычно основное внимание уделяется физическим процессам, связанным с термоядерными реакциями и распространением излучения, и в меньшей степени – газовой динамике в целом.

В [4] рассмотрена сферически-симметричная автомодельная задача об адиабатическом движении гравитирующего совершенного газа при наличии детонационной волны, возникающей в результате неоднородного гравитационного коллапса газа при нулевом начальном давлении или при разрушении положения равновесия.

В настоящей работе рассматривается неавтомодельная задача о центральном взрыве, сопровождающемся детонацией, однородного гравитирующего газового шара. Для решения задачи применяется асимптотический метод тонкого ударного слоя, предложенный Г. Г. Черным и связанный с малым параметром $\varepsilon=(\gamma_2-1)/(\gamma_2+1)$ [5]. Для применимости метода вплоть до выхода детонационной волны на поверхность тела величины энергии взрыва и удельного тепловыделения на разрыве предполагаются соответственно порядков $1/\varepsilon^2$ и $1/\varepsilon$ по сравнению с параметрами начального состояния. Используемый метод малого параметра позволяет также описать процесс разлета основной массы газа в пустоту. Вычислены первые приближения для закона движения и термодинамических характеристик среды.

В работе [6] этим методом дано приближенное решение неавтомодельной задачи о сильном точечном взрыве в однородной негравитирующей газообразной горючей смеси.

1. Будем использовать уравнения адиабатического сферически-симметричного движения гравитирующего совершенного газа в лагранжевой форме

$$\ddot{r}+4\pi r^2 p' + \frac{km}{r^2} = 0, \qquad \dot{r} \equiv \frac{\partial r}{\partial t}, \qquad p' \equiv \frac{\partial p}{\partial m} \tag{1.1}$$

$$p = (\gamma-1) f(m) \rho^{\gamma}, \qquad \rho = \frac{1}{4\pi r^2 r'}, \qquad r' \equiv \frac{\partial r}{\partial m}$$

Функция $f(m)$ связана с распределением энтропии по лагранжевой координате m, k – гравитационная постоянная, γ – показатель адиабаты.

В качестве начальных данных рассмотрим точное решение задачи о равновесии однородного гравитирующего газового шара, где гравитационная постоянная, плотность и радиус шара приняты за основные единицы измерения

$$r = \left(\frac{3m}{4\pi}\right)^{1/3}, \qquad p = \frac{2\pi}{3}(1-r^2), \qquad \rho = 1 \tag{1.2}$$

Интегральное уравнение энергии для слоя газа, заключенного между поверхностями $m=0$ и $M(t)$, имеет вид

$$T+U+V=E+\int_0^t \left[\dot{M}\left(\frac{\dot{r}^2}{2}+\frac{p}{(\gamma_1-1)\rho}-\frac{M}{R}+Q\right)-4\pi R^2 \dot{r} p\right]_1 d\tau \tag{1.3}$$

$$T=\frac{1}{2}\int_0^M \dot{r}^2\,dm, \qquad U=\frac{1}{\gamma_2-1}\int_0^M \frac{p}{\rho}\,dm \qquad V=-\int_0^M \frac{m\,dm}{r}$$

Здесь T, U, V – кинетическая, внутренняя и потенциальная энергии газа, Q – энергия, выделяющаяся при сгорании единицы массы газа, E – энергия взрыва, $m=$

$=M(t)$ — закон движения детонационной волны по массе, $R=r(M,\ t)$. Индексами 1, 2 обозначены соответственно состояния газа перед и за детонационной волной.

Условия на разрыве, разрешенные относительно параметров газа за детонационной волной, имеют вид

$$\rho_2=\frac{\gamma_2+1}{\gamma_2-1}\rho_1\left[1+\frac{1}{\gamma_2-1}\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{a_1^2}{(\dot R-\dot r_1)^2}+1-g\right)\right]^{-1},\qquad a_1^2=\frac{\gamma_1 p_1}{\rho_1}\tag{1.4}$$

$$p_2=\frac{1}{\gamma_2+1}\left[p_1+\rho_1(\dot R-\dot r_1)^2+\rho_1(\dot R-\dot r_1)^2 g\right]$$

$$\dot R-\dot r_2=\frac{\dot R-\dot r_1}{\gamma_2+1}\left[\gamma_2+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{a_1^2}{(\dot R-\dot r_1)^2}-g\right]$$

$$g\equiv\left[\left(1-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{a_1^2}{(\dot R-\dot r_1)^2}\right)^2+\frac{2(\gamma_2+1)(\gamma_1-\gamma_2)}{\gamma_1(\gamma_1-1)}\frac{a_1^2}{(\dot R-\dot r_1)^2}-\frac{2(\gamma_2^2-1)Q}{(\dot R-\dot r_1)^2}\right]^{1/2}$$

При этом радиус детонационной волны определяется функцией $r=R(t)$ и следует учитывать непрерывность эйлеровых и лагранжевых переменных.

2. Введем малый параметр $\varepsilon=(\gamma_2-1)/(\gamma_2+1)$ (см. [5]).

Будем считать, что в основном приближении для закона движения среды реализуется асимптотика при $\varepsilon\to0$ решения Л. И. Седова задачи о сильном точечном взрыве (см. [7]).

Анализ интегрального уравнения энергии и условия существования сильной детонационной волны до момента ее выхода на поверхность тела (см. (1.2)—(1.4)), а также соотношения $Q\gg a_1^2$ (см. [3, 7, 8]) приводит к условиям

$$E=\frac{E_0}{\varepsilon^2},\qquad E_0=O(1),\qquad Q=\frac{Q_0}{\varepsilon},\qquad Q_0=O(1)\tag{2.1}$$

При этом время движения детонационной волны до выхода на поверхность шара будет порядка $\varepsilon^{1/2}$, поэтому удобно произвести дополнительное растяжение времени $\tau=t/\varepsilon^{1/2}$.

Анализ уравнений движения и краевых условий показывает, что решение в окрестности за детонационной волной можно искать в виде

$$r=R_0(\tau)+\varepsilon H(m,\tau)+\ldots,\quad R(\tau)=R_0(\tau)+\varepsilon R_1(\tau)+\ldots\tag{2.2}$$

$$p=\frac{p_0(m,\tau)}{\varepsilon}+p_1(m,\tau)+\ldots,\qquad \rho=\frac{\rho_0(m,\tau)}{\varepsilon}+\rho_1(m,\tau)+\ldots$$

Однако вблизи центра симметрии разложение (2.2) оказывается нерегулярным (см. [9]). В этой области для регуляризации решения применим метод последовательных приближений, который приводит к решению, совпадающему, в частности, при отсутствии гравитации и выделения энергии на разрыве, с точным решением задачи о сильном взрыве с точностью до $O(\varepsilon^2)$.

В нулевом приближении решение задачи имеет вид:

$$p_0=R_0'^2+\frac{R_0''}{4\pi R_0^2}(M_0-m),\qquad M_0=\frac{4\pi R_0^3}{3},\qquad R_0=\left(\frac{75E_0\tau^2}{4\pi}\right)^{1/5}\tag{2.3}$$

$$\rho_0=p_0^{1/\gamma_2}[R_0'^2(T_0)]^{-1/\gamma_2}\left[1+\frac{(1/\gamma_1-\gamma_*)a_1^2(m)+2Q_0}{R_0'^2(T_0)}\right]^{-1}$$

$$a_1^2(m)=\frac{2\pi\gamma_1}{3}\left[1-\left(\frac{3m}{4\pi}\right)^{2/3}\right]$$

$$\gamma_*=\frac{1}{\gamma_1},\quad \gamma_1-1=O(1);\qquad \gamma_*=\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_1-1}=O(1),\quad \gamma_1-1=O(\varepsilon)$$

$$\gamma_*=0,\quad \gamma_1=\gamma_2;\qquad T_0(m)=\left(\frac{4\pi}{75E_0}\right)^{1/2}\left(\frac{3m}{4\pi}\right)^{5/6}$$

Здесь $T_0(m)$ — момент времени, в который детонационная волна проходит через частицу с лагранжевой координатой m.

Как следует из (2.3), уже в нулевом приближении решение задачи (распределение плотности) зависит от величины энергии, выделяющейся на скачке при сгорании единицы массы газа.

3. В следующем приближении определение плотности (см. (1.1)) в окрестности

детонационной волны дает

$$\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{4\pi R^3}{3}-\int_m^M\frac{\varepsilon\, dm}{\rho_0(m,\tau)} \tag{3.1}$$

Для определения закона движения детонационной волны в первом приближении потребуем выполнения граничного условия в центре: $r=0$ при $m=0$ [9]. По существу это условие эквивалентно удовлетворению интегрального уравнения энергии (1.3) в первом приближении, которое, однако, требует дополнительного вычисления распределения давления [5].

Подробные вычисления в соотношении (3.1) приводят к следующим формулам для закона движения газа и детонационной волны:

$$\begin{gathered}r=R_0\xi^{2\varepsilon/3}\left(1-\frac{2\varepsilon}{3}\ln 2(1+\xi)\right)+\\+\frac{2\varepsilon}{3}R_0M_0\left[\beta\ln(1+\xi)-\frac{\alpha(3/4\pi)^{2/3}}{4E_0}M_0^{2/3}G(\xi)\right]+O(\varepsilon^2)\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$M=M_0\left\{1+2\varepsilon\left[-2\ln 2+\beta M_0\ln 2-\frac{\alpha}{4E_0}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}M_0^{5/3}G(1)\right]\right\}+O(\varepsilon^2)$$

$$R=R_0\left\{1+\frac{2\varepsilon}{3}\left[-2\ln 2+\beta M_0\ln 2-\frac{\alpha}{4E_0}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}M_0^{5/3}G(1)\right]\right\}+O(\varepsilon^2)$$

$$\xi\equiv\frac{m}{M_0},\qquad \beta\equiv\frac{\alpha+2Q_0}{4E_0},\qquad \alpha\equiv\frac{2\pi}{3}(1-\gamma_*\gamma_1)$$

$$\begin{gathered}G(y)\equiv\int_0^y\frac{z^{2/3}\,dz}{z+1}=\frac{3}{2}y^{2/3}+\ln(1+y^{1/3})-\\-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}+\left(y^{1/3}-\frac{1}{2}\right)^2\right)+3^{1/2}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-2y^{1/3}}{3^{1/2}}-\frac{\pi}{6}\right)\end{gathered}$$

Используя найденный закон движения газа за детонационной волной (3.2), из уравнений движения и адиабатичности (1.1) можно определить величину p_1 и ρ_1, чем полностью заканчивается построение первого приближения.

$$\begin{gathered}p_1=2R_0'R_1'+\frac{2\pi}{3}\gamma_*\gamma_1(1-R_0^2)-2Q_0-R_0'^2+\frac{2}{3}R_0R_0''\left[-2\ln 2+\right.\\\left.+\beta M_0\ln 2-\frac{\alpha}{4E_0}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}M_0^{5/3}G(1)\right]+\frac{1}{4\pi R_0^2}\int_m^{M_0}\left(H''+\frac{m}{R_0^2}-\frac{2HR_0''}{R_0}\right)dm\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\rho_1=\rho_0\left[\frac{p_1}{p_0}+\frac{2A-\Lambda_*+1}{A+1}-\frac{2R_0'(T_0)\,(R_0''(T_0)T_1+R_1'(T_0))+\gamma_*a_1^2(m)-2Q_0}{R_0'^2(T_0)}\right]$$

$$\begin{gathered}H\equiv\frac{R_0}{\varepsilon}(\xi^{2\varepsilon/3}-1)-\frac{2}{3}R_0\xi^{2\varepsilon/3}\ln 2(1+\xi)+\\+\frac{2}{3}R_0M_0\left[\beta\ln(1+\xi)-\frac{\alpha(3/4\pi)^{2/3}M_0^{2/3}G(\xi)}{4E_0}\right]\end{gathered}$$

$$R_1=\frac{2}{3}R_0\left[-2\ln 2+\beta M_0\ln 2-\frac{\alpha}{4E_0}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}M_0^{5/3}G(1)\right]$$

$$T_1(m)=-\frac{5}{3}T_0(m)\left[-2\ln 2+\beta m\ln 2-\frac{\alpha}{4E_0}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}m^{5/3}G(1)\right]$$

$$A\equiv\frac{a_1^2(m)\,(1/\gamma_1-\gamma_*)+2Q_0}{R_0'^2(T_0)},\qquad \Lambda\equiv\frac{2(R_0''(T_0)T_1+R_1'(T_0))}{R_0'(T_0)}$$

$$\Lambda_* \equiv \frac{(2-\Lambda)a_1^2(m)}{\gamma_1 R_0'^2(T_0)} - \frac{a_1^4(m)}{4\gamma_1^2 R_0'^4(T_0)} + \frac{\gamma_* a_1^2(m)\Lambda+2Q_0(2-\Lambda)}{R_0'^2(T_0)} +$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{2\gamma_* a_1^2(m)-4Q_0-\gamma_1^{-1}a_1^2(m)}{R_0'^2(T_0)}\right)^2$$

Отметим, что формулы (2.3), (3.2), (3.3) дают решение задачи при малых временах $t\leqslant O(\varepsilon^{1/2})$ о взрыве в детонирующем газе с противодавлением, если устремить к нулю гравитационную постоянную, сохранив величину начального давления в центре постоянной (1.2).

Вплоть до выхода на поверхность тела распространяющаяся ударная волна является пересжатой волной детонации (см. (1.4), (2.1), (2.3)).

4. Выход детонационной волны на поверхность тела происходит в момент времени t_*, который определяется из (2.3)

$$t_*=\varepsilon^{-1/2}[4\pi/(75E)]^{1/2} \tag{4.1}$$

и приводит к распаду произвольного разрыва с последующим расширением газа в пустоту.

Покажем, что используемый выше метод малого параметра применим и для описания процесса адиабатического разлета основной массы газа в пустоту.

Заметим, что время движения волны разрежения от внешней границы тела к центру и обратно порядка ε, т. е. мало по сравнению с характерным временем движения газа порядка $\varepsilon^{1/2}$ (см. (2.1), (4.1)). Поэтому построенное ниже приближенное решение сразу описывает состояние газа при разлете в пустоту за отраженной от центра волной разрежения в области, содержащей почти всю массу газа, исключая окрестность границы тела с массой порядка $\exp(-N/\varepsilon^{1/2})$, $N=O(1)$.

Уравнения движения газа имеют вид (1.1) с функцией $f(m)$, определяемой из решения до выхода детонационной волны на поверхность шара

$$f(m)=\frac{2E\varepsilon}{m}\left[1+\frac{2Q_0+2\pi(1-\gamma_1\gamma_*)/3}{4E_0}m-\frac{\pi 3^{2/3}(4\pi)^{-2/3}(1-\gamma_1\gamma_*)m^{5/3}}{6E_0}\right] \tag{4.2}$$

В нулевом приближении из уравнения движения получим

$$r=R(t),\qquad p=\frac{\ddot R}{4\pi R^2}(M_*-m)+\frac{1}{8\pi R^4}(M_*^2-m^2) \tag{4.3}$$

где $M_*=4\pi/3$ – масса шара.

Из уравнений (1.1) и (4.2) получим

$$\frac{4\pi}{3}(r^3)'=\frac{1}{\rho}=\left[\frac{4E\varepsilon^2}{pm}\left(1+\frac{2Q_0+2\pi(1-\gamma_1\gamma_*)/3}{4E_0}m-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\pi 3^{2/3}(4\pi)^{-2/3}(1-\gamma_1\gamma_*)m^{5/3}}{6E_0}\right)\right]^{1-2\varepsilon} \tag{4.4}$$

Интегрируя (4.4) с учетом граничного условия в центре $r=0$ при $m=0$, а также соотношений (4.3), имеем

$$r=R(t)\left\{\left(\frac{m}{M_*}\right)^{2\varepsilon}+\left(1+\frac{2Q_0\pi}{3E_0}\right)\left[1-\left(1-\frac{m}{M_*}\right)^{2\varepsilon}\right]\right\}^{1/3} \tag{4.5}$$

$$\int\limits_1^{R(t)}\left[\frac{2E_*}{M_*}+\frac{M_*}{y}+\frac{2E_*}{M_*}\left(2\varepsilon\frac{E}{E_*}-1-\frac{M_*^2}{2E_*}\right)y^{-6\varepsilon}\right]^{-1/2}dy=t-t_*$$

$$E_*=E+QM_*+\frac{16\pi^2}{15}\left(\frac{1}{3(\gamma_1-1)}-1\right)$$

где функция $R(t)$ определяется из интегрального уравнения энергии (1.3).

Подставляя найденное решение для закона движения среды (4.5), в систему (1.1) при использовании (4.2) можно определить распределения плотности и давления в следующем приближении.

Анализ полученного закона движения среды показывает, что почти вся масса газа сосредоточена в тонком слое с относительной толщиной порядка $-\varepsilon\ln\varepsilon$. Граница тела движется со скоростью, в $[2+2Q_0\pi/(3E_0)]^{1/2}$ раз большей скорости движения основной массы газа.

Для сравнения рассмотрим точное значение скорости движения границы расширяющегося в пустоту газа, связанное с сохранением соответствующего инварианта Римана

$$\dot{R}_b = 2\left(\frac{E}{M_*}\right)^{1/2}\left(1+\frac{2\pi Q_0}{3E_0}\right)^{1/2}$$

Из приближенных формул (4.5) следует, что граница газа движется со скоростью

$$\dot{R}_b = 2^{5/6}\left(\frac{E}{M_*}\right)^{1/2}\left(1+\frac{Q_0\pi}{3E_0}\right)^{1/3}$$

при этом, например при $Q_0=0$, погрешность составляет $\Delta \simeq 9\%$, что связано с неточностью асимптотического метода в оцененной выше малой окрестности границы тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванова Л. Н., Имшенник В. С., Чечеткин В. М.* Термоядерный взрыв вырожденного углеродного ядра звезды. Препринт № 31. М.: Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1975.
2. *Balbus S. A.* The propagation and stability of time-dependent galactodetonation waves.– Astrophys. J., 1984, v. 277, № 2, Pt 1, p. 550–555.
3. *Arnett W. D.* A possible model of supernovae: Detonation of C^{12}.– Astrophys. and Space Sci., 1969, v. 5, № 2, p. 180–212.
4. *Голубятников А. Н., Чилачава Т. И.* Об оценках движения детонационных волн в гравитирующем газе.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 2, с. 140–145.
5. *Черный Г. Г.* Задача о точечном взрыве.– Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 2, с. 213–216.
6. *Левин В. А.* Приближенное решение задачи о сильном точечном взрыве в горючей смеси.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1, с. 122–124.
7. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 447 с.
8. *Марков В. В.* Точечный взрыв в детонирующем газе.– Науч. тр. Ин-та мех. МГУ, 1974, № 31, с. 93–99.
9. *Голубятников А. Н., Чилачава Т. И.* О центральном взрыве вращающего гравитирующего тела.– Докл. АН СССР, 1983, т. 273, № 4, с. 825–829.

Москва

Поступила в редакцию
9.VII.1985